Studia magisterskie ENERGETYKA

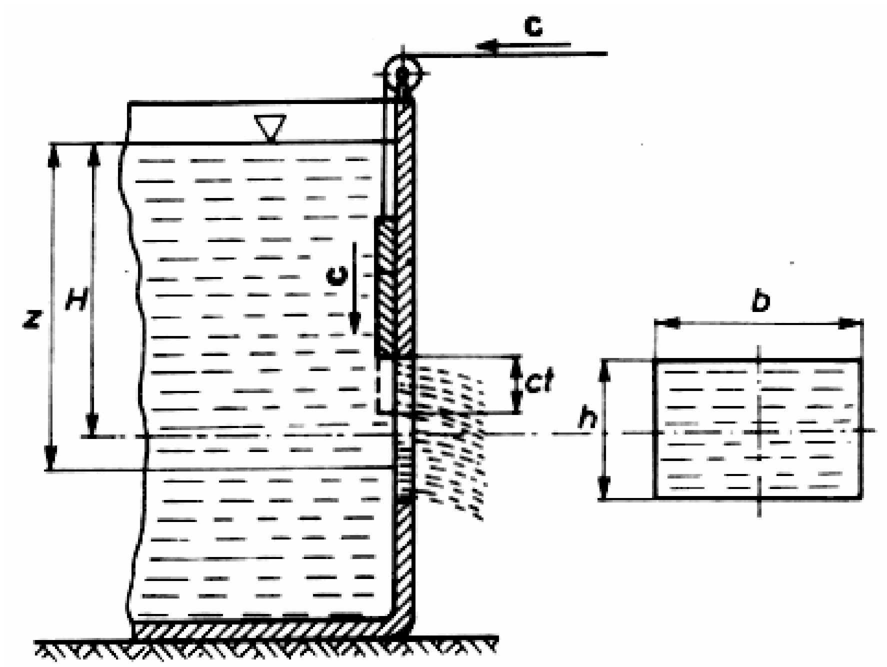
Jan A. Szantyr

Wybrane zagadnienia z mechaniki płynów

Ćwiczenia 6

Wyznaczanie przepływu przez rurociągi II

Przykład 1



W otwartym zbiorniku znajduje się prostokątny otwór o szerokości b i wysokości h, zamykany zasuwą. Odległość powierzchni cieczy od osi otworu w chwili rozpoczęcia zamykania zasuwy wynosi H. Obliczyć objętość wody V jaka wypłynie ze zbiornika w czasie niezbędnym do całkowitego zamknięcia zasuwy. Prędkość zamykania zasuwy c=const, współczynnik objętościowego natężenia wypływu wynosi μ.

Objętość cieczy jaka wypłynie w czasie *dt* określa wzór: $dV = Q \cdot dt$

Gdzie natężenie przepływu wynosi: $Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z}$

W ostatnim równaniu mamy: $A = b \cdot (h - c \cdot t)$ $\qquad z = H + \dfrac{c \cdot t}{2}$

Po podstawieniu: $dV = \mu \cdot b \cdot (h - c \cdot t) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(H + \dfrac{c \cdot t}{2} \right) \cdot dt}$

Czyli: $V = \int_0^{t_c} \mu \cdot b \cdot (h - c \cdot t) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(H + \dfrac{c \cdot t}{2} \right)} \cdot dt$ gdzie: $t_c = \dfrac{h}{c}$

W celu rozwiązania całki stosujemy podstawienie:

$$H + \frac{c \cdot t}{2} = u \qquad t = \frac{2}{c} \cdot (u - H) \qquad dt = \frac{2}{c} du$$

Co prowadzi do:

$$V = \int_H^{H+\frac{h}{2}} \mu \cdot b \cdot (h - 2 \cdot \mu + 2 \cdot H) \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{c} \cdot du$$

Czyli:

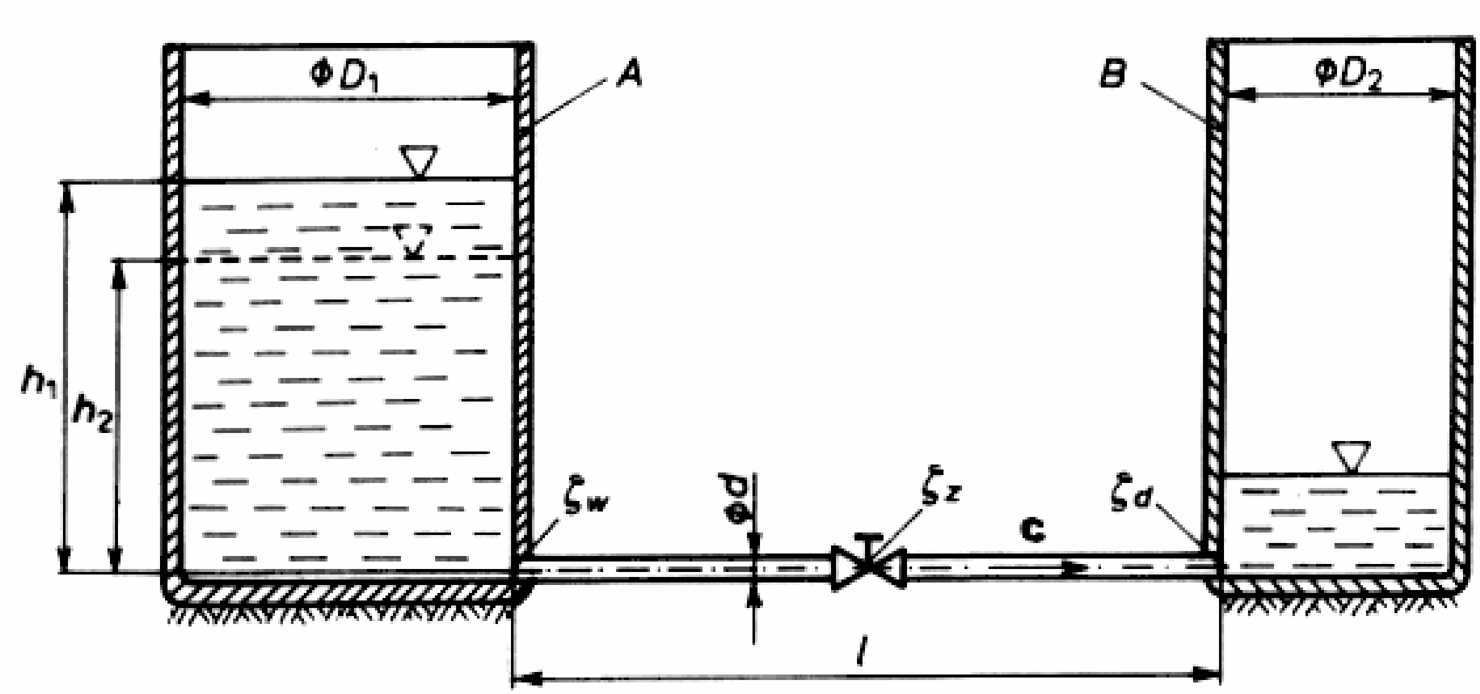
$$V=\frac{2\cdot\mu\cdot b\cdot\sqrt{2\cdot g}}{c}\cdot\int_{H}^{H+\frac{h}{2}}\left(2\cdot H\cdot u^{\frac{1}{2}}+h\cdot u^{\frac{1}{2}}-2\cdot u^{\frac{3}{2}}\right)\cdot d=$$

$$=\frac{2\cdot\mu\cdot b\cdot\sqrt{2\cdot g}}{c}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot H\cdot u^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\cdot h\cdot u^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}\cdot u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{H}^{H+\frac{h}{2}}$$

Ostatecznie:

$$V=\frac{8\cdot\mu\cdot b\cdot\sqrt{2\cdot g}}{15\cdot c}\left[\left(H+\frac{h}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(2\cdot H+h)-H^{\frac{3}{2}}\cdot\left(2\cdot H+\frac{5}{2}\cdot h\right)\right]$$

Przykład 2



Dwa zbiorniki cylindryczne A i B o średnicach D_1 i D_2 połączono prostoosiowym przewodem o długości l i średnicy d. Obliczyć czas niezbędny do opróżnienia zbiornika A od poziomu h_1 do poziomu h_2 jeżeli współczynnik strat liniowych wynosi λ a współczynniki strat miejscowych wynoszą: ζ_w ζ_z ζ_d

Elementarna zmiana różnicy poziomów w zbiornikach wynosi:

$$dz = dh + dh \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

gdyż w czasie dt poziom wody w zbiorniku A opadnie o dh, a w zbiorniku B podniesie się o $dh \cdot \left(D_1^2 / D_2^2\right)$

Warunek zachowania ciągłości ruchu cieczy w zbiorniku A i w przewodzie ma postać:

$$-\frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot dh = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot c \cdot dt$$

Wysokość rozporządzalna wywołująca ruch cieczy w przewodzie wynosi:

$$z = \frac{c^2}{2 \cdot g} + \sum h_s = \frac{c^2}{2 \cdot g} + \frac{c^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\zeta_w + \zeta_z + \zeta_d + \lambda \cdot \frac{l}{d} \right) = \frac{c^2}{2 \cdot g} \cdot \left(1 + \zeta_w + \zeta_z + \zeta_d + \lambda \cdot \frac{l}{d} \right)$$

Z powyższego wzoru wyznaczamy prędkość c, a ze wzoru na dz wartość dh i podstawiamy je do równania ciągłości przepływu, otrzymując:

$$-\frac{\pi \cdot D_1^2}{4 \cdot \left(1+\frac{D_1^2}{D_2^2}\right)} \cdot dz = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \sqrt{1+\zeta_w+\zeta_z+\zeta_d+\lambda \cdot \frac{l}{d}}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \cdot dt$$

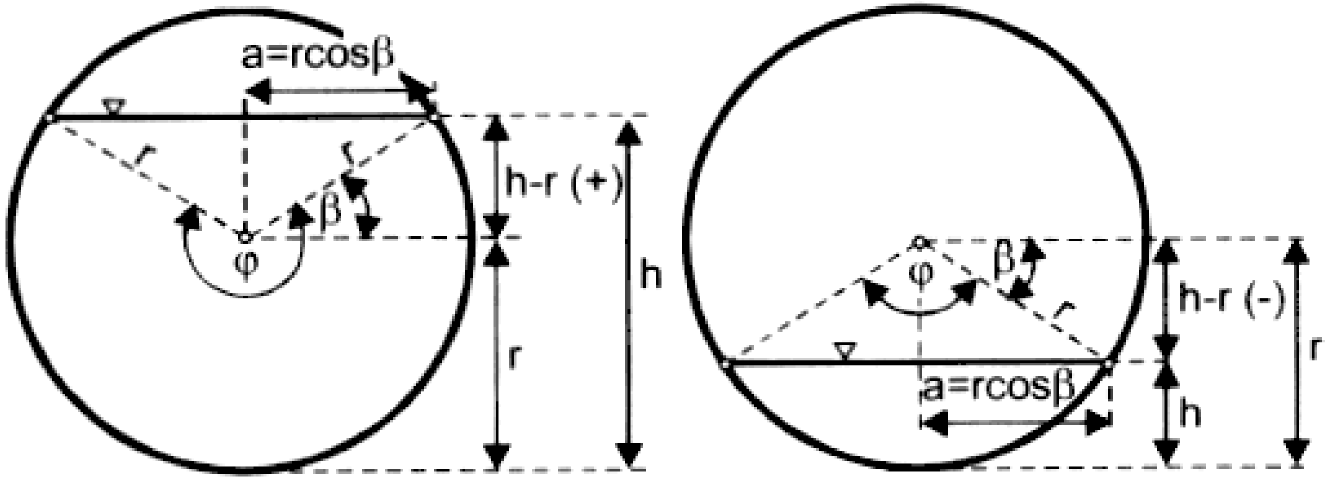
Co prowadzi do:

$$dt = -\frac{D_1^2 \cdot \sqrt{1+\zeta_w+\zeta_z+\zeta_d+\lambda \cdot \frac{l}{d}}}{\left(1+\frac{D_1^2}{D_2^2}\right) \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz$$

Po scałkowaniu powyższego otrzymujemy czas częściowego opróżnienia zbiornika A:

$$t = \frac{2 \cdot D_1^2 \cdot \sqrt{1+\zeta_w+\zeta_z+\zeta_d+\lambda \cdot \frac{l}{d}}}{d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \left(1+\frac{D_1^2}{D_2^2}\right)} \cdot \left(h_1^{\frac{1}{2}} - h_2^{\frac{1}{2}}\right)$$

Przykład 3



Niecałkowicie wypełnionym kołowym kolektorem o promieniu r=1,5 [m] płynie grawitacyjnie woda. Kolektor zbudowano z tworzywa sztucznego o chropowatości k=0,5 [mm] i spadku J=0,4 [promile]. Sporządzić krzywą natężenia przepływu i krzywą prędkości wody w zależności od poziomu napełnienia kolektora. Przyjąć kinematyczny współczynnik lepkości wody: $\nu = 1{,}3 \cdot 10^{-6} \left[m^2/s\right]$

Objętościowe natężenie przepływu w niecałkowicie wypełnionym przewodzie obliczyć wg wzoru Darcy'ego-Weisbacha:

$$Q = \upsilon \cdot A = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R \cdot J}{\lambda}} \cdot A$$

Przy napełnieniu kolektora do głębokości h parametry przepływu są następujące:

- pole przekroju poprzecznego strumienia

$$A = \frac{\varphi}{360^0} \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot (h - r) = \frac{180^0 + 2 \cdot \beta}{360^0} + a \cdot (h - r)$$

gdzie:

$$\beta = \arcsin \frac{h - r}{r}$$

$$a = r \cdot \cos \beta$$

- obwód zwilżony kolektora $L_0 = \frac{\varphi}{180^0} \cdot \pi \cdot r$
- promień hydrauliczny $R = A / L_0$
- prędkość przepływu $\upsilon = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R \cdot J}{\lambda}}$

Współczynnik oporu liniowego zależy od chropowatości względnej i liczby Reynoldsa. Można go wyznaczyć metodą kolejnych przybliżeń według poniższego schematu:

- zakładamy wartość współczynnika oporu liniowego λ
- obliczamy prędkość przepływu wody wg wzoru Darcy'ego-Weisbacha $\upsilon = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R \cdot J}{\lambda}}$

- obliczamy wartość liczby Reynoldsa $\mathrm{Re} = \frac{\upsilon \cdot 4 \cdot R}{\nu}$

- dla znanej chropowatości względnej *k/4R* i liczby Reynoldsa obliczamy współczynnik λ z zależności Colebrook'a – White'a:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2{,}51}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k/(4 \cdot R)}{3{,}71} \right)$$

- jeżeli założona wartość współczynnika oporu liniowego nie zgadza się z obliczonym, powyższa procedura jest powtarzana, z przyjęciem wartości obliczonej jako kolejnego założenia

Poniżej **dla przykładu** obliczono natężenie przepływu i prędkość średnią przepływu w kolektorze dla głębokości wody h=0,8 [m]

$$A = \frac{\varphi}{360^0} \cdot \pi \cdot r^2 + a \cdot (h - r)$$

gdzie:

$$\sin\beta = \frac{h-r}{r} = \frac{0{,}8 - 1{,}5}{1{,}5} = -0{,}469 \rightarrow \beta = -27{,}818 \rightarrow a = r \cdot \cos\beta = 1{,}5 \cdot \cos 27{,}818 = 1{,}327 [m]$$

$$A = \frac{180^0 + 2 \cdot \left(-27{,}818^0\right)}{360^0} \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 + 1{,}327 \cdot (0{,}8 - 1{,}5) = 1{,}513\left[m^2\right]$$

$$L_0 = \frac{\varphi}{180^0} \cdot \pi \cdot r = \frac{180^0 + 2 \cdot \beta}{180^0} \cdot \pi \cdot r = \frac{180^0 - 2 \cdot 27{,}818^0}{180^0} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5 = 3{,}256[m]$$

$$R = \frac{A}{L_0} = \frac{1{,}513}{3{,}256} = 0{,}465[m]$$

Obliczenie współczynnika oporu liniowego według ww. procedury iteracyjnej daje wynik λ=0,0152.

Średnia prędkość przepływu wynosi wobec tego:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R \cdot J}{\lambda}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}465 \cdot 0{,}0004}{0{,}0152}} = 0{,}98[m/s]$$

Objętościowe natężenie przepływu wynosi:

$$Q = \upsilon \cdot A = 0{,}98 \cdot 1{,}513 = 1{,}483\left[m^3/s\right]$$

Po przeprowadzeniu obliczeń dla wszystkich wybranych wartości głębokości wody wyniki można przedstawić graficznie: