

J. Szantyr - Wykład nr 11 – Podstawy gazodynamiki II

Prostopadłe fale uderzeniowe

Propagacja zaburzeń o skończonej (dużej) amplitudzie.

W takim przypadku nie jest możliwa linearyzacja równań zachowania. Rozwiązanie ich w postaci nieliniowej jest skomplikowane i prowadzi do następujących zależności na prędkość propagacji odpowiednich zaburzeń:

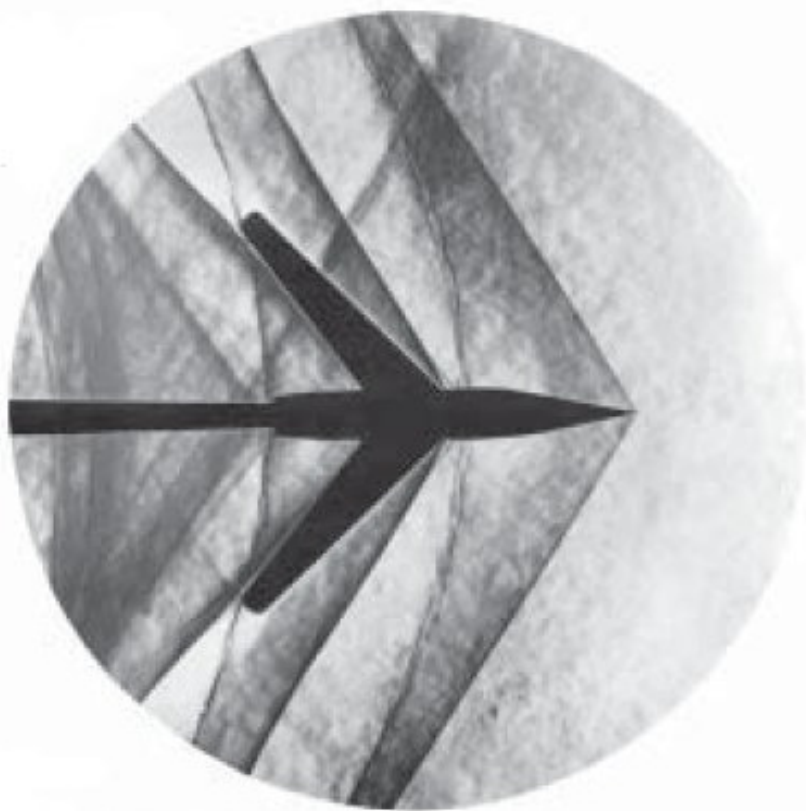
$$\rho = f_1 \left\langle x \mp \frac{2a_0}{\kappa-1} \left[\frac{\kappa+1}{2} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2}} - 1 \right) \right] t \right\rangle \quad \text{dla gęstości}$$

$$p = f_2 \left\langle x \mp \frac{2a_0}{\kappa-1} \left[\frac{\kappa+1}{2} \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - 1 \right) \right] t \right\rangle \quad \text{dla ciśnienia}$$

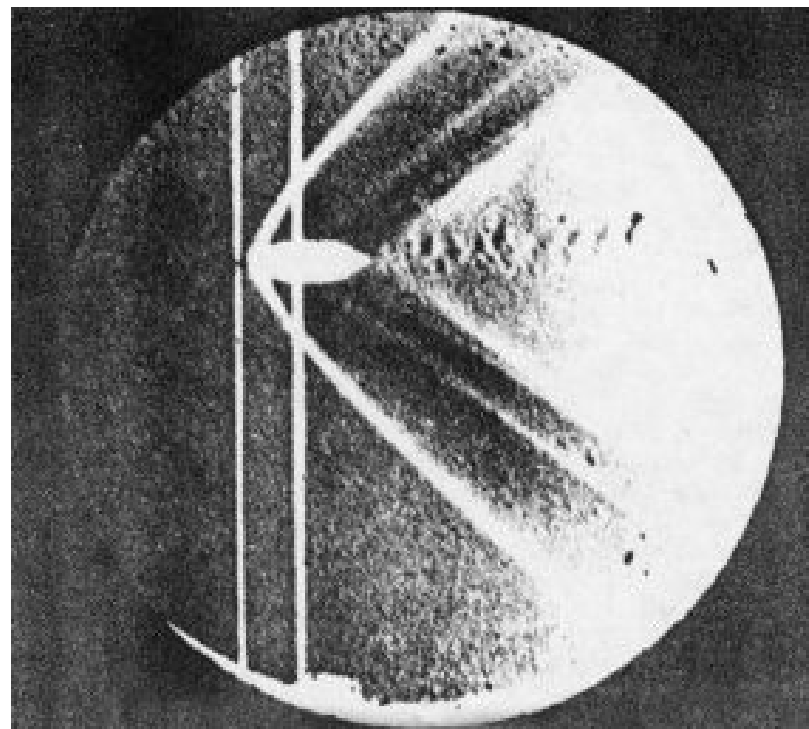
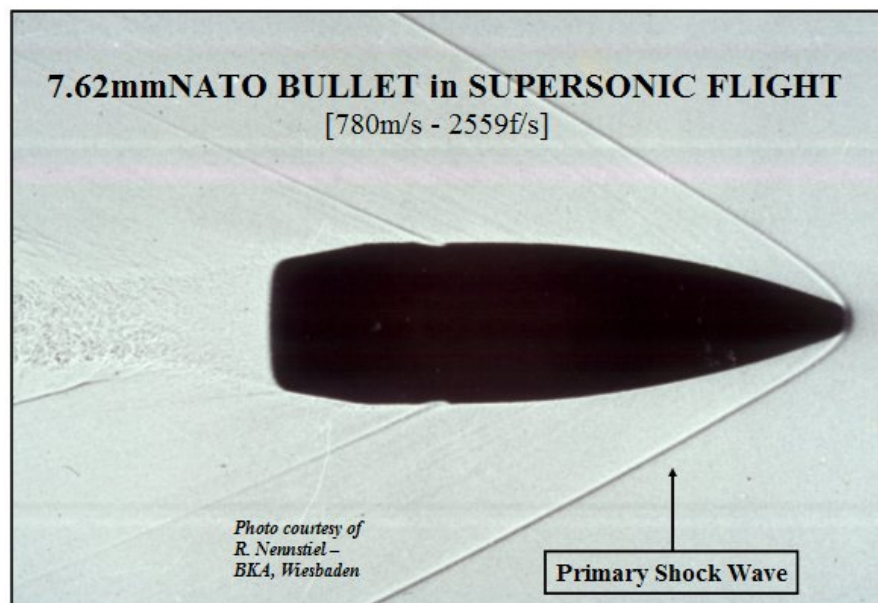
$$u = f_3 \left\langle \left(x \mp a_0 + \frac{\kappa+1}{2} u \right) t \right\rangle \quad \text{dla prędkości}$$

Z postaci powyższych wzorów wynika, że najszybciej przemieszcza się grzbiet fali odkształcenia, a najwolniej jej dolina. W wyniku tego procesu profil fali deformuje się aż do postaci linii (powierzchni) skokowej zmiany parametrów przepływu, czyli **fali uderzeniowej**.

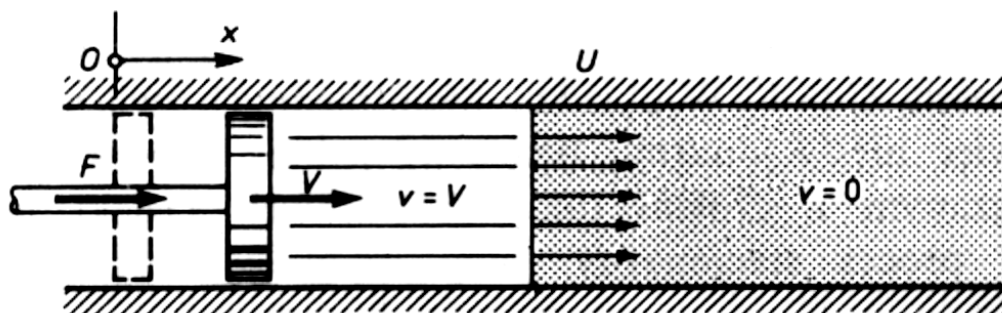




Przykłady wizualizacji fal uderzeniowych. Po prawej oryginalna fotografia Macha z drugiej połowy XIX wieku.



Mechanizm powstawania fali uderzeniowej

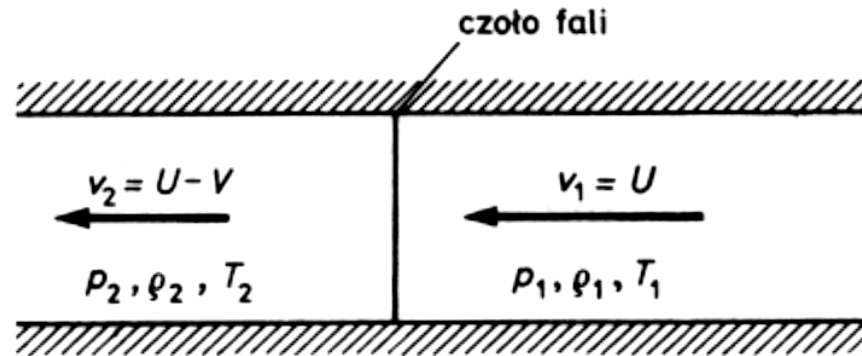


Nagły ruch tłoka w cylindrze powoduje powstanie lokalnego zaburzenia (zgęszczenia) gazu propagującego się z prędkością U . Zaburzenie to można traktować jako ciąg fal przebiegających kolejno przez gaz o parametrach zmienionych przez falę poprzednią. Adiabatyczne zagęszczenie gazu powoduje wzrost temperatury i jednocześnie wzrost lokalnej prędkości dźwięku. Oznacza to, że każda kolejna fala propaguje się z większą prędkością, dogania poprzednią i nakłada się na nią. Ostatecznie powstaje bardzo cienka powierzchnia nieciągłości, czyli skokowej zmiany parametrów gazu nazywana

prostopadłą falą uderzeniową.

(prostopadłą do kierunku prędkości)

Elementarna teoria prostopadłej fali uderzeniowej



Równania zachowania dla prostopadłej fali uderzeniowej można napisać w postaci:

równanie zachowania masy: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

równanie zachowania pędu: $p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$

równanie zachowania energii: $c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2}$

równanie stanu: $\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} = R$

Z rozwiązania powyższego układu równań uzyskujemy zależności:

$$\frac{u_1 \cdot u_2}{a_*^2} = 1 \quad Ma_2 = \sqrt{\frac{(k-1) \cdot Ma_1^2 + 2}{2 \cdot k \cdot Ma_1^2 - k - 1}} \quad \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma_1^2 - 1)$$

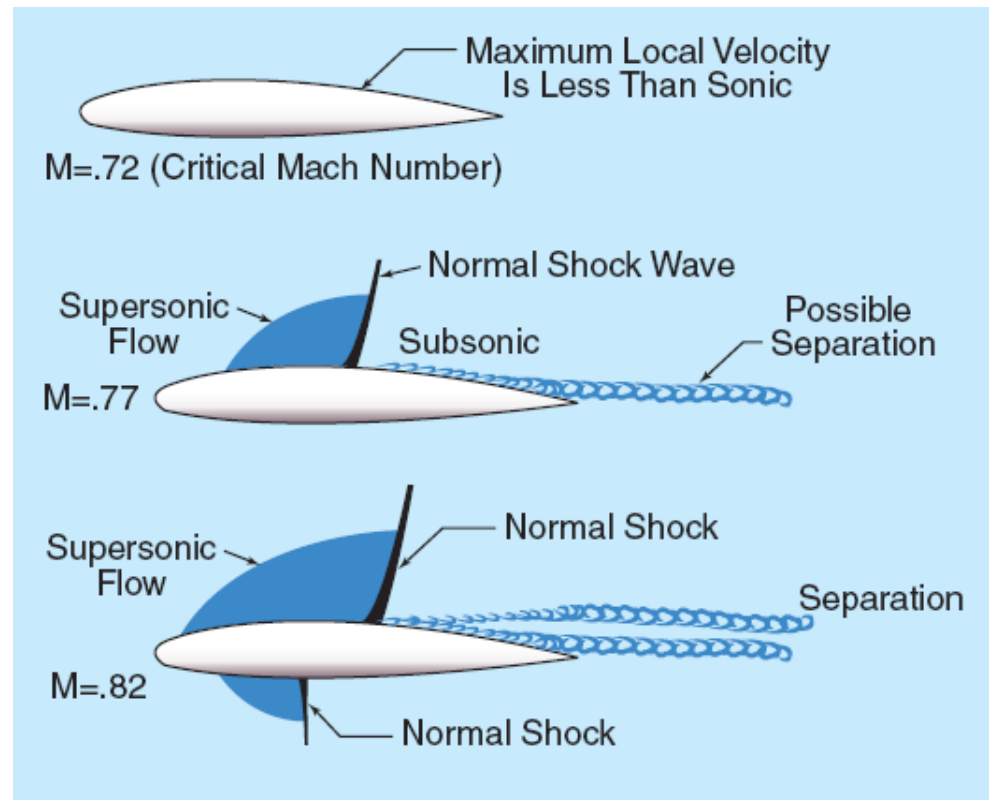
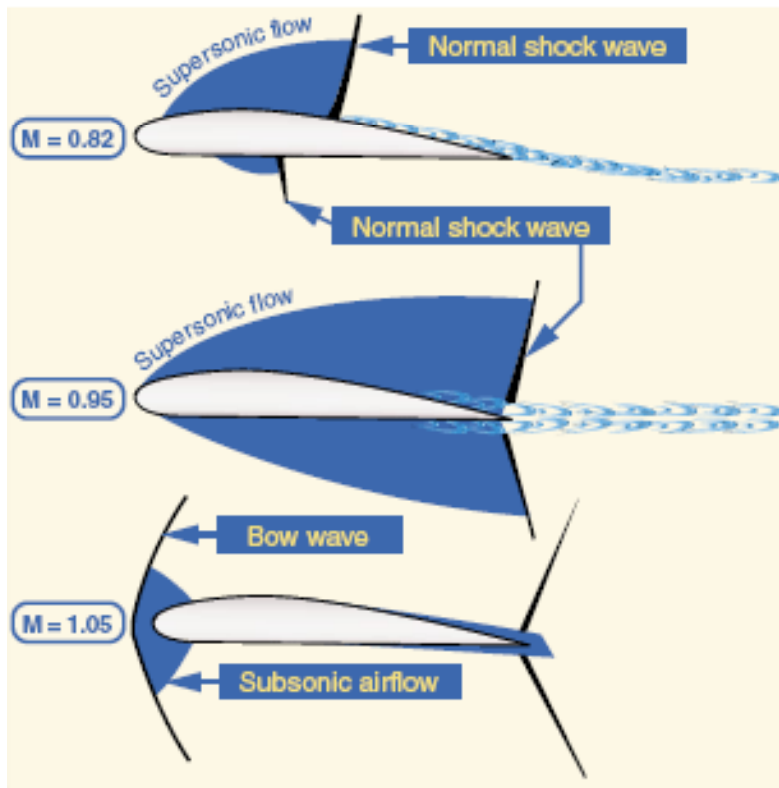
$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = (Ma_1^2 - 1) \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \right)^{-1} \quad \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{2(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)^2 Ma_1^2} (Ma_1^2 - 1) (1 + \kappa Ma_1^2)$$

Z zależności tych wynika, że:

- fala uderzeniowa powstaje, gdy $Ma > 1,0$
- przy przejściu prostopadłej fali uderzeniowej mamy spadek prędkości oraz wzrost ciśnienia, gęstości, temperatury i entropii gazu
- za prostopadłą falą uderzeniową jest zawsze $Ma < 1,0$

Fala uderzeniowa jest to występująca w naddźwiękowych przepływach gazu bardzo cienka (o grubości rzędu kilkunastu mikronów) strefa (powierzchnia) nagłej zmiany parametrów przepływu.

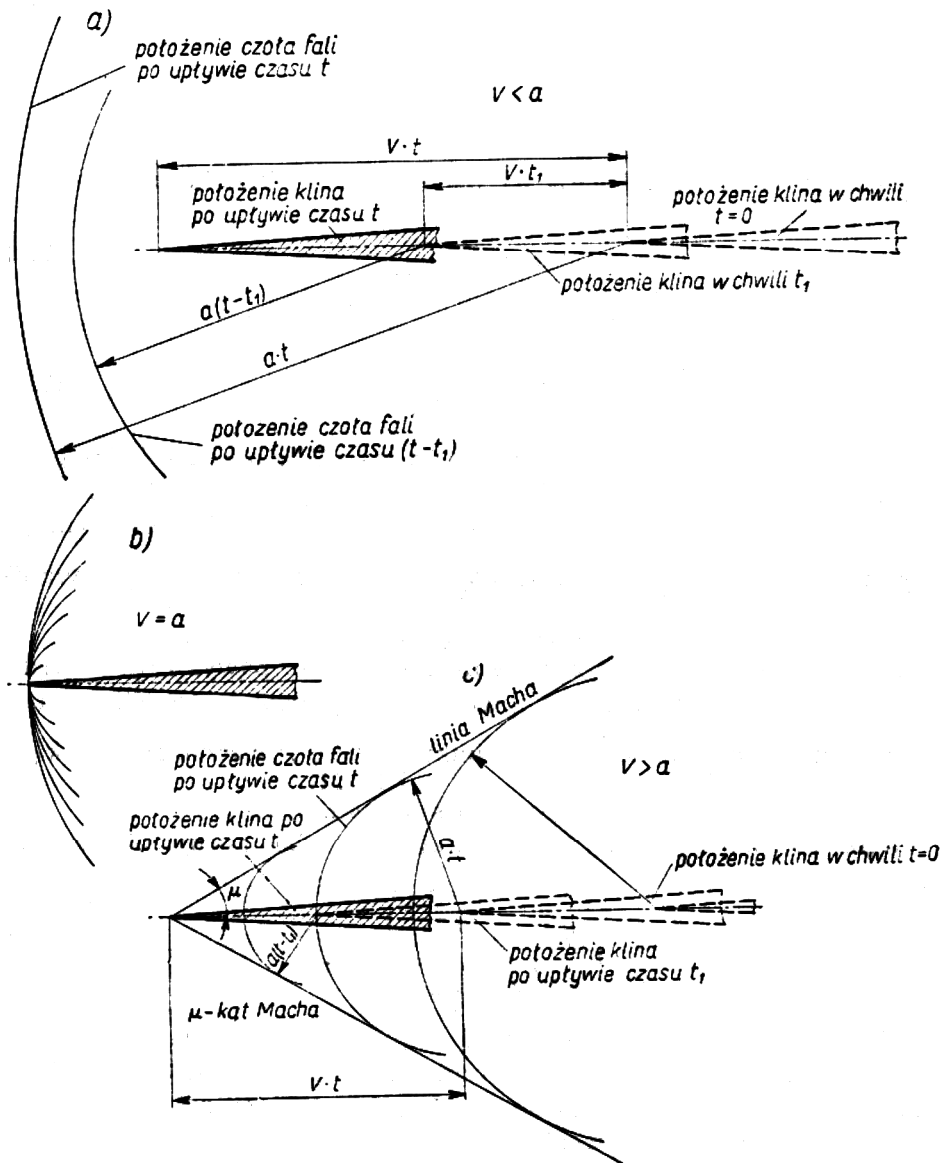
W przepływach okołodźwiękowych zdarza się, że lokalnie na obiekcie prędkość jest naddźwiękowa i mogą powstać lokalne fale uderzeniowe pomimo tego, że ogólna prędkość ruchu obiektu względem powietrza jest poddźwiękowa – przeanalizuj przykłady podane poniżej.



Przykłady lokalnych fal uderzeniowych wskazujących na lokalne przepływy naddźwiękowe na samolotach lecących z dużymi kątami natarcia, ale z prędkościami poddźwiękowymi.



Skośne fale uderzeniowe



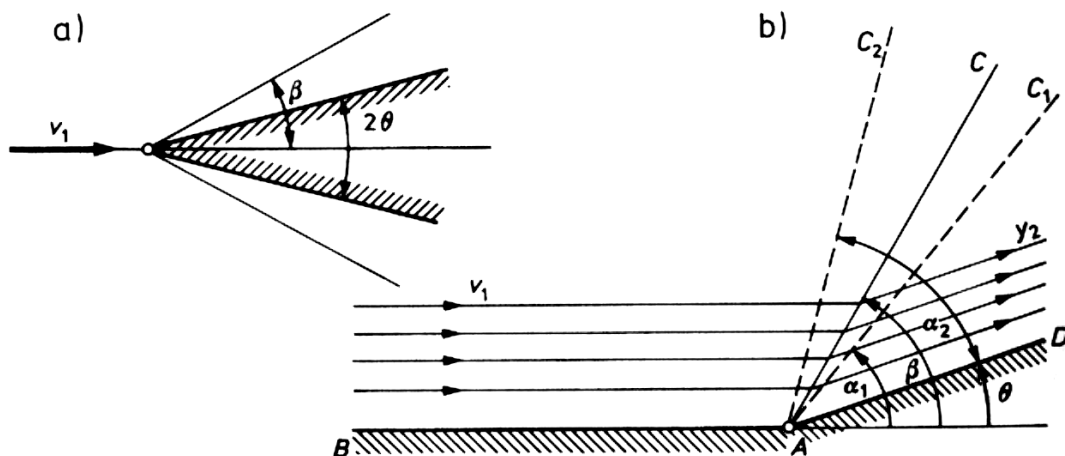
a) Przepływ poddźwiękowy – fala dźwiękowa wyprzedza obiekt ją generujący

b) Przepływ okołodźwiękowy – w miarę wzrostu prędkości fale zgęszczają się i przy $v=a$ tworzą falę uderzeniową

c) Przepływ naddźwiękowy – obiekt wyprzedza generowane fale dźwiękowe – front fali uderzeniowej tworzy tzw. stożek Macha o kącie rozwarcia:

$$\mu = \arcsin\left(\frac{1}{Ma_{\infty}}\right)$$

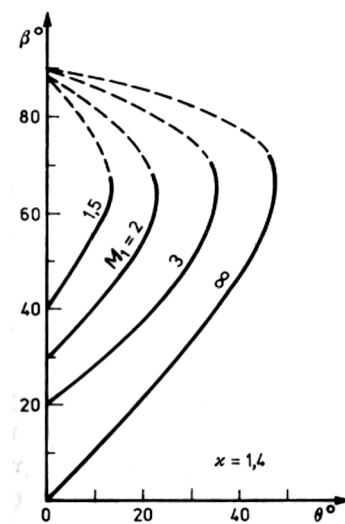
Skośne fale uderzeniowe w przepływach wewnętrznych są często generowane przez załamania ścian kanałów:

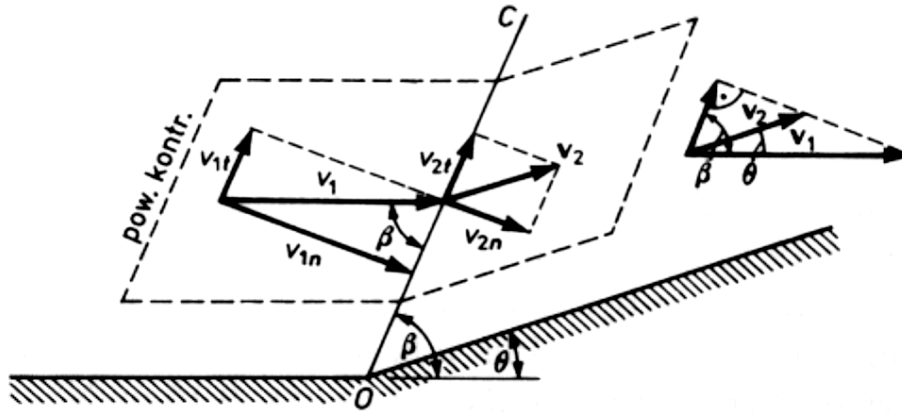


W takim przypadku mamy dwa przepływy o różnych kierunkach: przed i za falą uderzeniową – można by więc wyznaczyć dwa kąty Macha. Ponieważ jest to fizycznie niemożliwe, mamy tylko jedną falę uderzeniową A-C nachyloną pod kątem β wyrażonym wzorem:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1}{1 + Ma_1^2 \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \sin^2 \beta \right)} \operatorname{ctg} \beta$$

patrz
rysunek →





Rozkład prędkości w skośnej fali uderzeniowej można przedstawić w postaci składowych normalnych i stycznych do fali. Wtedy można napisać równania:

równanie zachowania masy

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$$

równanie zachowania pędu w kierunku prostopadłym do OC:

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2$$

równanie zachowania pędu w kierunku stycznym do OC:

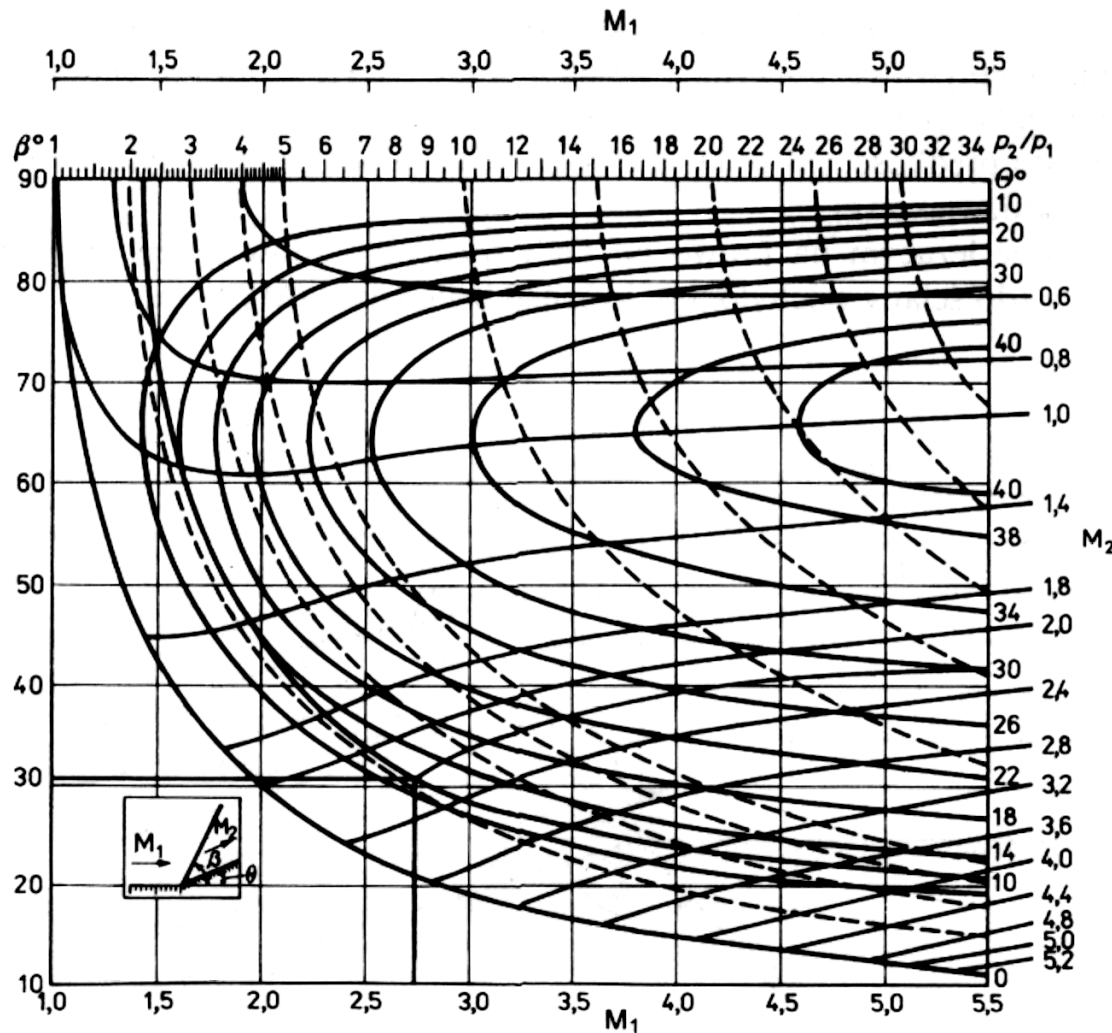
$$\rho_1 v_{1n} v_{1t} = \rho_2 v_{2n} v_{2t}$$

równanie zachowania energii:

$$c_p T_1 + \frac{\rho_1 v_{1n}^2}{2} = c_p T_2 + \frac{\rho_2 v_{2n}^2}{2}$$

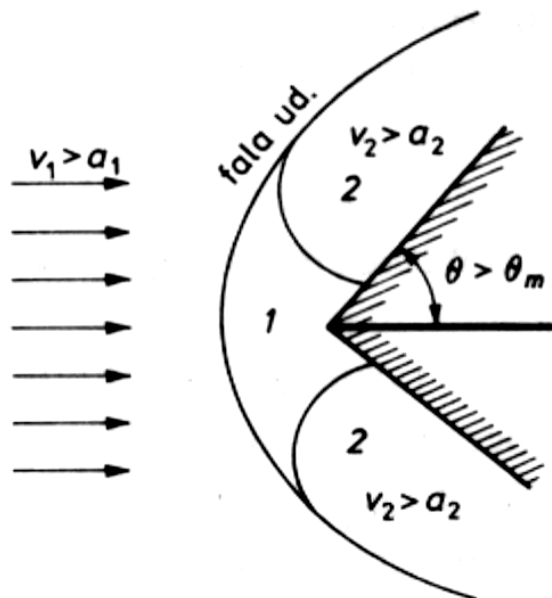
Równania te są identyczne jak dla prostopadłej fali uderzeniowej, jeżeli tylko użyjemy w nich składowych prędkości normalnych do fali.

W skośnej fali uderzeniowej tylko prędkość normalna do fali spada poniżej prędkości dźwięku przy przejściu przez falę – **całkowita prędkość przepływu za falą może pozostać naddźwiękowa.**

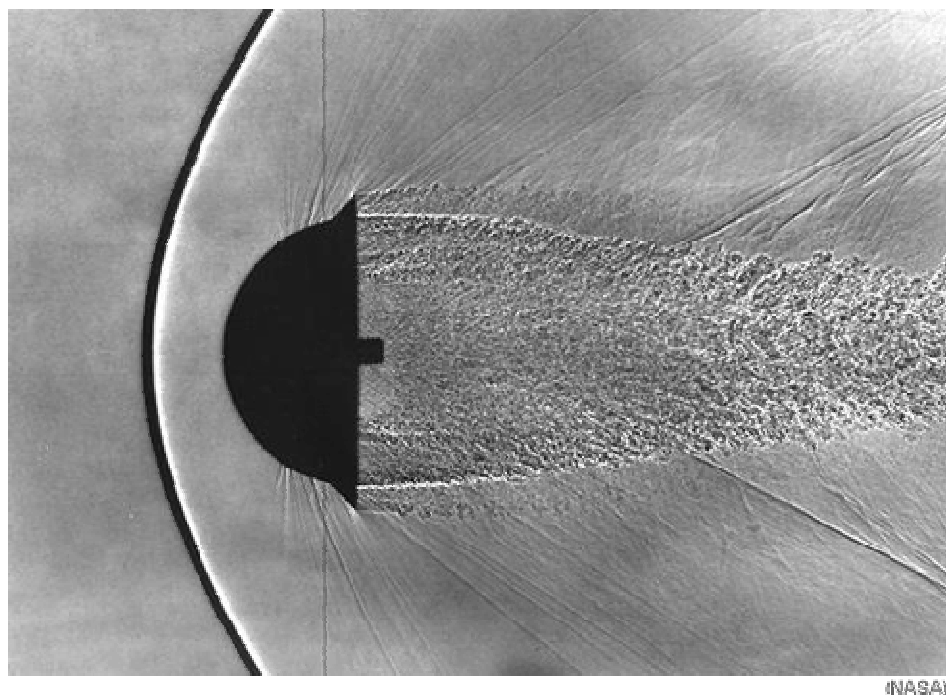


Zależności pomiędzy kątem załamania ściany, kątem nachylenia fali uderzeniowej, oraz liczbami Macha przed falą (1) i za falą (2) pokazuje wykres. Na przykład dla $\theta = 12$ stopni oraz $Ma_1 = 2,8$ otrzymujemy: $Ma_2 = 2,2$

$$\beta = 31^\circ \quad p_2/p_1 = 2.2$$



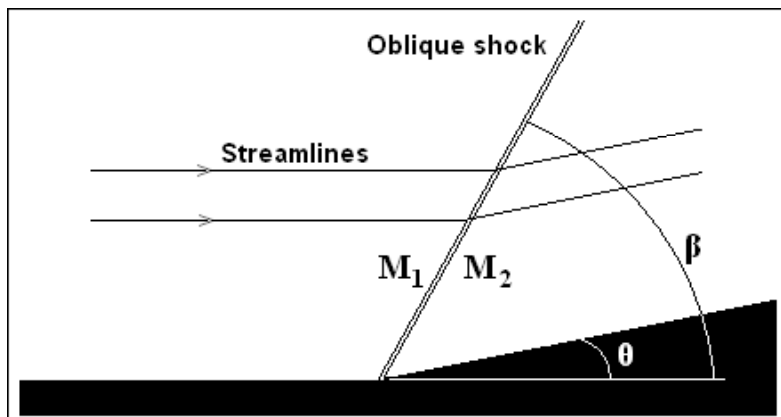
Przy dużym kącie rozwarcia wierzchołka obiektu generującego falę uderzeniową nie może powstać fala rozpoczynająca się na wierzchołku. W takim przypadku powstaje tzw. fala odsunięta. W takiej fali w strefie 1 mamy przepływ poddźwiękowy, a przed falą i w strefie 2 za falą – przepływ naddźwiękowy.



Graniczna wartość kąta rozwarcia zależy od liczby Macha dla przepływu przed falą i wynosi około 70 stopni.

Przykład 1

Powietrze płynące z prędkością $Ma=2,0$ przy ciśnieniu $p=68948$ Pa jest zmuszone o zmiany kierunku o kąt $\theta=10$ stopni przez załamanie ściany. Powoduje to powstanie słabej skośnej fali uderzeniowej. Wyznaczyć kąt β , oraz prędkość i ciśnienie za falą uderzeniową.



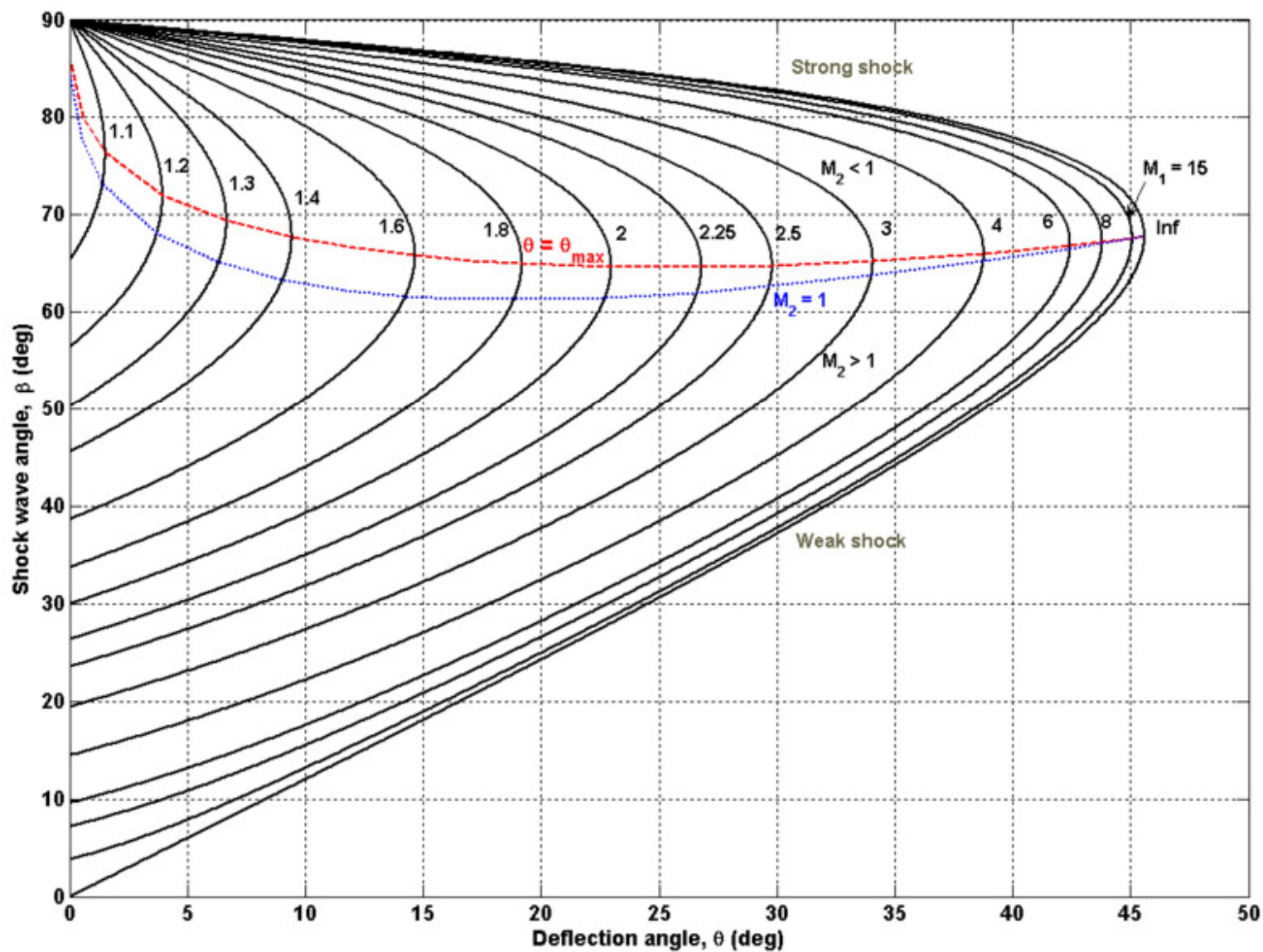
Z wykresu na stronie następnej można odczytać: $\beta \approx 39^\circ$

Alternatywnie można użyć podanej wyżej zależności, obliczając:

dla $\beta=39$ mamy $\theta=9,7102$, a dla $\beta=40$ mamy $\theta=10,6229$.

Interpolacja liniowa daje wynik $\beta=39,32$ stopnia.

Zależność pomiędzy kątami β i θ a liczbą Macha dla skośnej fali uderzeniowej



Liczba Macha przed falą liczona w kierunku normalnym do fali wynosi:

$$Ma_{n1} = Ma_1 \cdot \sin \beta = 1,267$$

Teraz można wykorzystać relacje dla prostopadłej fali uderzeniowej:

$$Ma_{n2} = \sqrt{\frac{(k-1) \cdot Ma_{n1}^2 + 2}{2 \cdot k \cdot Ma_{n1}^2 - k - 1}} = 0,8031$$

Liczba Macha za falą w kierunku linii prądu wynosi:

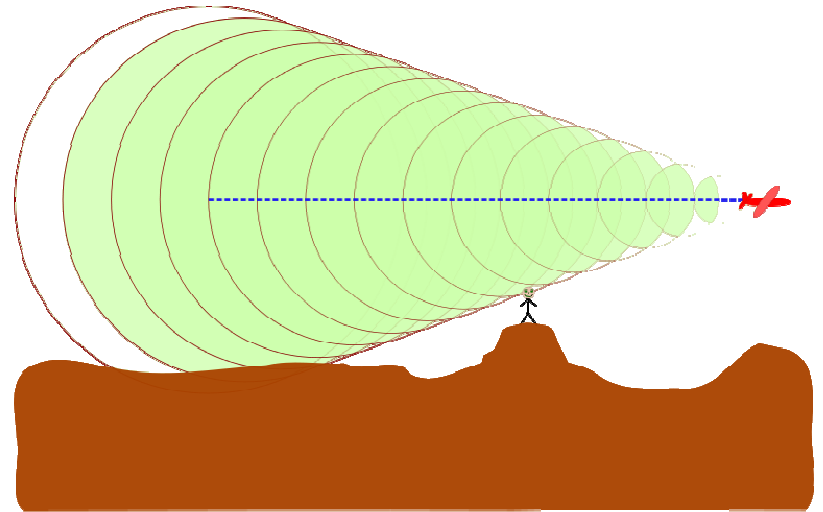
$$Ma_2 = \frac{Ma_1}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0,8031}{\sin(39,32 - 10)} = 1,64$$

Ciśnienie za falą można wyznaczyć z zależności dla fali prostopadłej:

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{1 + k \cdot Ma_{n1}^2}{1 + k \cdot Ma_{n2}^2} = 108148 [Pa]$$

Przykład 2

Obserwator usłyszał dźwięk samolotu lecącego na wysokości 5000 metrów z prędkością naddźwiękową w momencie gdy samolot oddalił się o 9000 metrów. Z jaką liczbą Macha leci samolot?



kąt Macha wynosi: $\operatorname{tg} \mu = \frac{5000}{9000} = 0.5556 \rightarrow \mu = 29,05^{\circ}$

liczba Macha wynosi: $Ma = \frac{1}{\sin \mu} = \frac{1}{\sin 29,05} = 2,06$

Uwaga! Powyższe obliczenie jest przybliżone. W rzeczywistości fala zbliżając się do powierzchni Ziemi będzie się zakrzywiała w kierunku ruchu samolotu. Dlaczego?