

## J. Szantyr – Wykład 15 – Praktyczne wyznaczanie przepływów – przepływy lepkie II

**Metoda objętości skończonych** polega na przekształceniu równań różniczkowych w równania algebraiczne poprzez całkowanie tych równań w granicach każdej objętości skończonej w oparciu o założoną aproksymację zmienności parametrów opisujących przepływ w granicach objętości (np. liniową, kwadratową itp.)

**Prosty przykład: ogólne stacjonarne równanie transportu poprzez konwekcję i dyfuzję.**

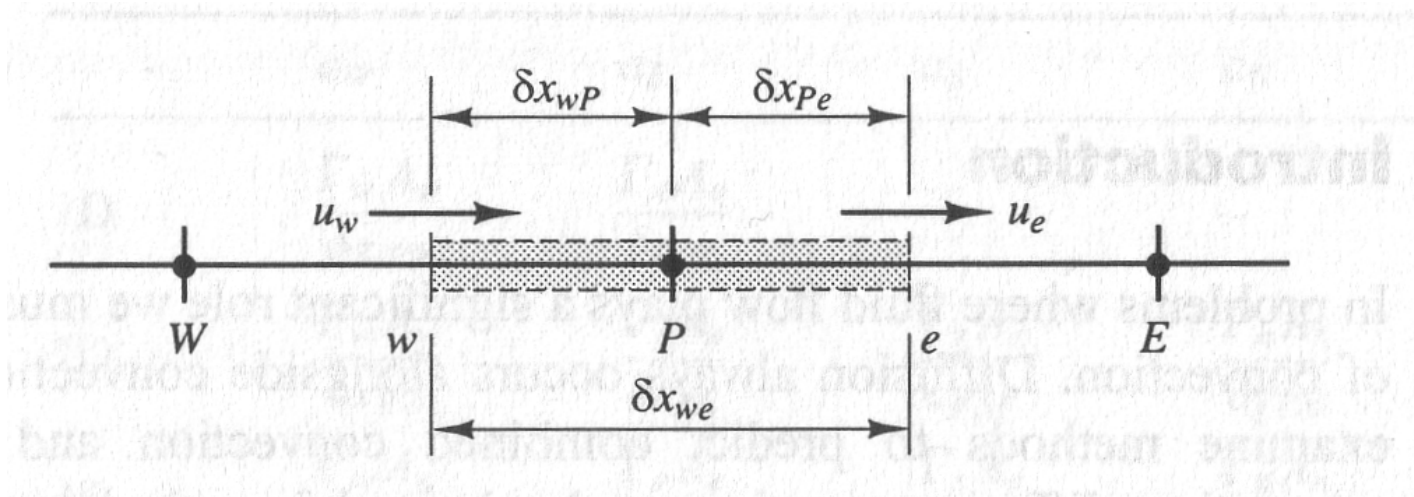
$$\mathit{div}(\rho \bar{u} \phi) = \mathit{div}(\Gamma \mathit{grad} \phi) + S_{\phi}$$

**W przypadku jednowymiarowym mamy:**

Równanie transportu: 
$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)$$

Równanie zachowania masy: 
$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0$$

Zakładamy, że prędkość  $u$  jest znana.



Scałkowanie równań w granicach objętości skończonej prowadzi do:

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

współczynnik konwekcji

$$F = \rho u$$

$$F_e = \rho u_e$$

współczynnik dyfuzji

$$D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

to równania można zapisać w postaci:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

$$F_e - F_w = 0$$

Współczynniki równania mogą być wyznaczone np. w oparciu o liniowy schemat różnic centralnych:

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E) / 2 \quad \phi_w = (\phi_W + \phi_P) / 2$$

Podstawienie do różniczkowego równania transportu prowadzi do równoważnej postaci algebraicznej, czyli wzoru interpolacyjnego wyznaczającego wartość w punkcie P na podstawie wartości w punktach sąsiednich W i E:

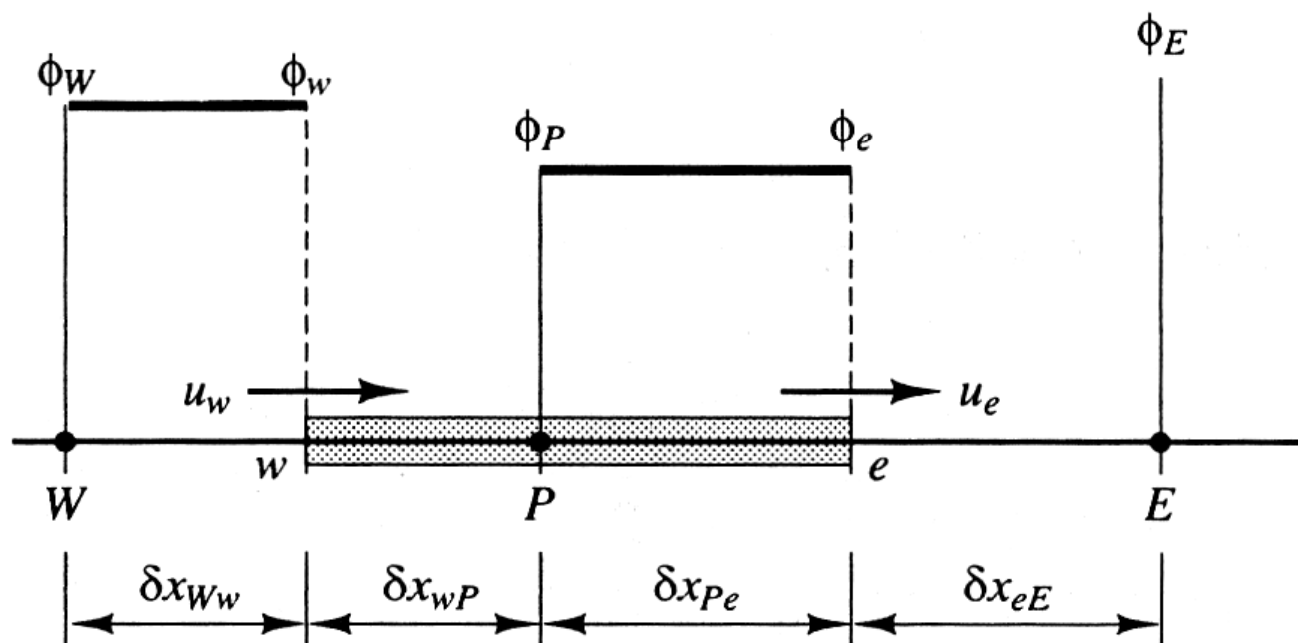
$$\left[ \left( D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

Schemat interpolacyjny różnic centralnych działa dobrze, gdy intensywność konwekcji i dyfuzji w procesie transportu jest podobnego rzędu. W przypadku gdy wyraźnie dominuje konwekcja, lepsze wyniki daje schemat „pod prąd” (ang. upwind).

Najprostszy schemat „pod prąd” jest oparty na założeniu, że wielkość transportowana jest przenoszona przez konwekcję o pół długości objętości skończonej bez zmiany wartości, czyli:

$$\phi_w = \phi_W$$

$$\phi_e = \phi_P$$



Zastosowanie schematu „pod prąd” prowadzi do następującej postaci algebraicznego równania transportu (czyli wzoru interpolacyjnego):

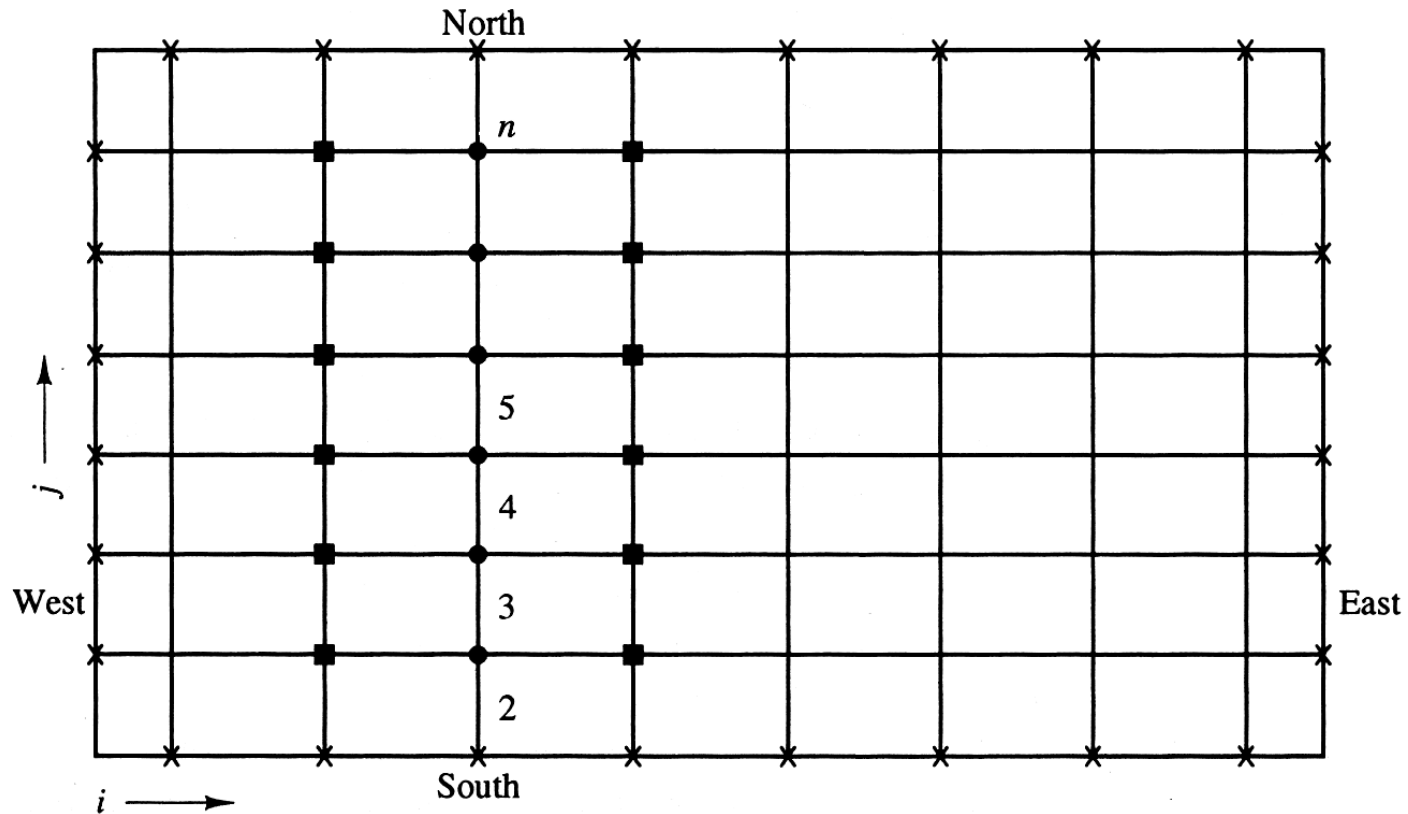
$$\left[ (D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w) \right] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E$$

Schemat interpolacyjny „pod prąd” daje stabilne rozwiązania równania transportu zdominowanego przez konwekcję, ale w zastosowaniach dwu- i trójwymiarowych prowadzi do sztucznej „numerycznej” dyfuzji, szczególnie w przypadkach gdy kierunek konwekcji przebiega po przekątnych objętości skończonych. Wyeliminowanie dyfuzji numerycznej wymaga stosowania dużej liczby małych objętości skończonych, co powiększa rozmiary zadania obliczeniowego.

Algebraiczne równanie transportu zastosowane do wszystkich objętości skończonych w przypadku jednowymiarowym prowadzi do układu równań liniowych, którego rozwiązanie dostarcza wartości transportowanej wielkości w punktach centralnych wszystkich objętości.

W przypadkach dwu- i trójwymiarowych konieczne jest zastosowanie procedury iteracyjnej, której zasady wyjaśniają poniższe rysunki. Uzyskanie zbieżnego rozwiązania wymaga wielokrotnego powtarzania procesu iteracyjnego w całym obszarze przepływu. W przypadku dwuwymiarowym wzór interpolacyjny wyznacza wartość poszukiwaną w oparciu o 4 punkty sąsiednie (W, E, N, S), a w przypadku trójwymiarowym – w oparciu o 6 punktów sąsiednich (W, E, N, S, B, T).

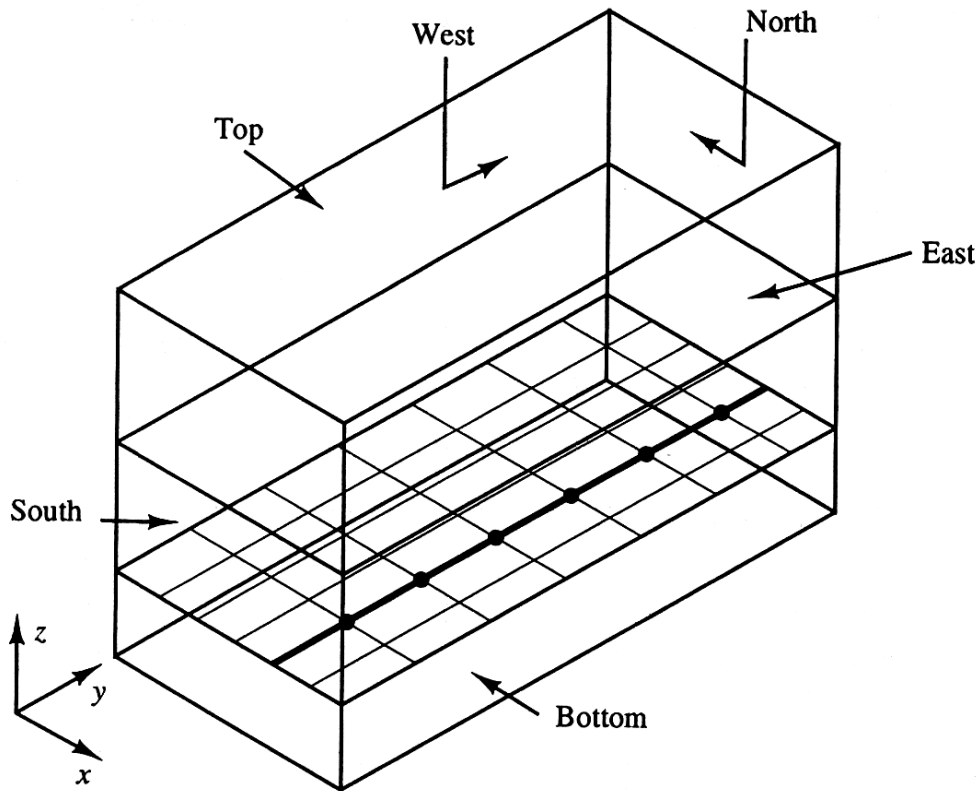
# Iteracyjna procedura rozwiązania układu równań algebraicznych dla przypadku dwuwymiarowego.



- Points at which values are calculated
- Points at which values are considered to be temporarily known
- x Known boundary values

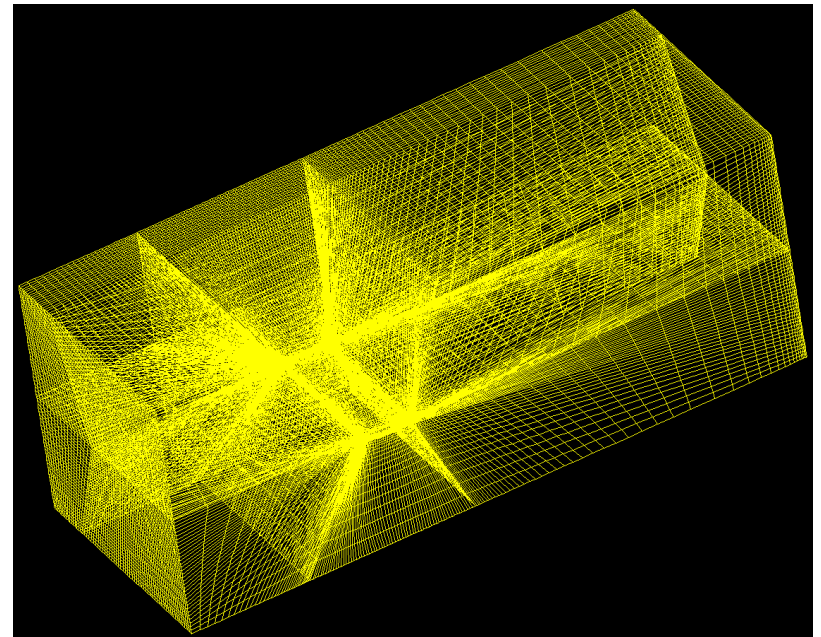


# Iteracyjna procedura rozwiązania układu równań algebraicznych dla przypadku trójwymiarowego.

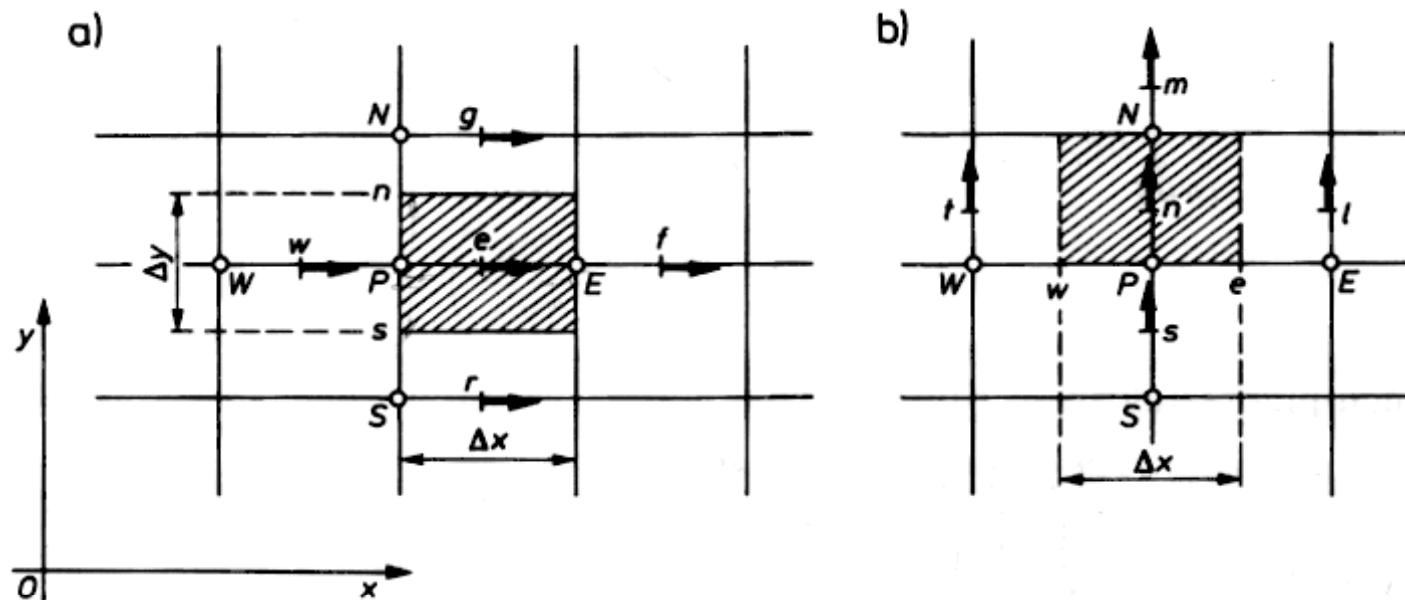


← Schemat iteracyjny

Przykład rzeczywistej sieci objętości skończonych →



## Przypadek dwuwymiarowy – równanie N-S



Sieć „objętości” skończonych, po lewej dla  $x$ , po prawej dla  $y$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Postać wyjściowa:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Całkowanie lewej strony daje: 
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_s^n \int_P^E \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dt = (u_e - u_e^0) \Delta x \Delta y$$

Pierwszy wyraz z prawej strony: 
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_s^n \int_P^E \frac{\partial u^2}{\partial x} dx dy dt = u_e^2 \Delta y \Delta t$$

Drugi wyraz z prawej strony: 
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_s^n \int_P^E \frac{\partial(uv)}{\partial y} dx dy dt = \left[ \frac{1}{2} (u_g - u_e) v_n - \frac{1}{2} (u_e + u_r) v_s \right] \Delta x \Delta t$$

Laplasjan całkuje się przy założeniu liniowej zmiany  $u(x,y)$  między węzłami:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_s^n \int_P^E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dt = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_E - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_P \right] \Delta y \Delta t = \left( \frac{u_f - u_e}{\Delta x} - \frac{u_e - u_w}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta t$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_s^n \int_P^E \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dt = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta t = \left( \frac{u_g - u_e}{\Delta y} - \frac{u_e - u_r}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta t$$

Całkowanie członu ciśnieniowego daje:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_s \int_P^E \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dt = (p_E - p_P) \Delta y \Delta t$$

W rezultacie analog różnicowy dla kierunku  $x$  ma postać:

$$a_e u_e = a_f u_f + a_g u_g + a_w u_w + a_r u_r + b u_e^0 + (p_P - p_E) \Delta y$$

gdzie:  $a_e = a_f + a_g + a_w + a_r + a_u + b$

$$a_f = a_w = v \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad a_g = v \frac{\Delta x}{\Delta y} - \frac{1}{2} v_n \Delta x$$

$$a_u = u_e \Delta y \quad a_r = v \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{1}{2} v_s \Delta x$$

$$b = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

Podobne przekształcenie dla kierunku  $y$  daje analog różnicowy następującej postaci:

$$a_n v_n = a_l v_l + a_m v_m + a_t v_t + a_s v_s + b v_n^0 + (p_P - p_N) \Delta x$$

gdzie:  $a_n = a_l + a_m + a_t + a_s + a_v + b$

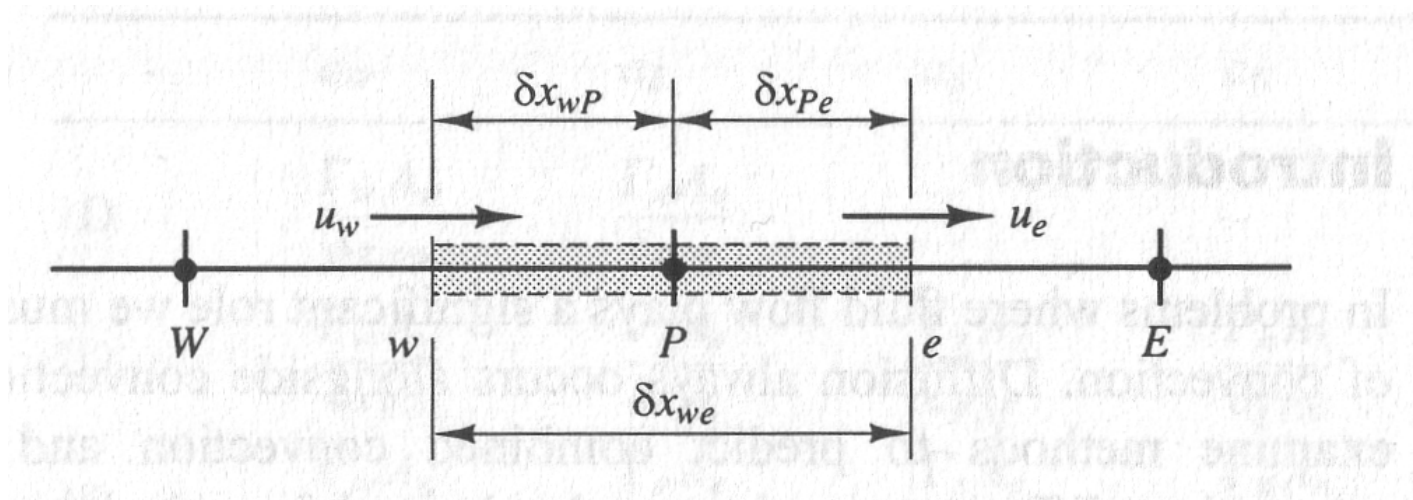
$$a_m = a_s = v \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$a_l = v \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{1}{2} u_e \Delta y$$

$$a_v = v_n \Delta x$$

$$a_t = v \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{1}{2} u_w \Delta y$$

**Przepływy niestacjonarne na przykładzie jednowymiarowej dyfuzji ciepła opisanego polem temperatury  $T$  w przecie ( $u_e = u_w = 0$ )**



Równanie wyjściowe:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Po scałkowaniu w granicach objętości:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt$$

Równanie można teraz zapisać w następującej postaci:

$$\int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right]$$

Jeżeli temperaturę w węźle P uznamy za reprezentatywną dla całej objętości to można napisać:

$$\rho c (T_P - T_P^0) \Delta V = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( k_e A \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} \right) - \left( k_w A \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}} \right) \right]$$

gdzie górny indeks 0 przy T oznacza wartość dla początku kroku czasowego, a T bez tego indeksu – wartość dla końca (poszukiwaną)

Dla dyskretyzacji prawej strony konieczne jest przyjęcie pewnego założenia o charakterze zmienności temperatury w czasie, np. w postaci funkcji wagowej.

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [\vartheta T_P + (1 - \vartheta) T_P^0]$$

Pozwala to napisać równanie dyfuzji w postaci algebraicznego wzoru interpolacyjnego:

$$\left[ \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} + \vartheta \left( \frac{k_e}{\delta x_{PE}} + \frac{k_w}{\delta x_{WP}} \right) \right] T_P = \frac{k_e}{\delta x_{PE}} [\vartheta T_E + (1 - \vartheta) T_E^0]$$

$$+ \frac{k_w}{\delta x_{WP}} [\vartheta T_W + (1 - \vartheta) T_W^0] + \left[ \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - \vartheta) \frac{k_e}{\delta x_{PE}} - (1 - \vartheta) \frac{k_w}{\delta x_{WP}} \right] T_P^0$$



W zależności od wartości parametru wagowego mamy różne schematy obliczeniowe, wymagające różnych relacji pomiędzy krokiem czasowym a krokiem przestrzennym dla zapewnienia stabilności rozwiązania:

$\vartheta = 0$  Schemat jawny, warunek stabilności:

$$\Delta t \leq \rho c \frac{(\Delta x)^2}{2k}$$

$\vartheta = 0,5$  Schemat Cranka-Nicholsona, warunek stabilności:

$$\Delta t \leq \rho c \frac{(\Delta x)^2}{k}$$

$\vartheta = 1$  Schemat ukryty, stabilny bezwarunkowo

Równanie zachowania pędu (równanie Naviera-Stokesa) w postaci różniczkowej opisuje zarówno przepływy laminarne jak i turbulentne. Zachowanie takiej uniwersalności przez równoważniki algebraiczne równania NS możliwe jest na trzy sposoby:

- poprzez bezpośrednią numeryczną symulację zjawiska turbulencji od dużych struktur wirowych aż do najmniejszych skal, tzn. do skali Kołmogorova (podejście DNS –Direct Numerical Simulation),
- poprzez podział skal turbulencji na część symulowaną numerycznie (duże wiry) i część modelowaną specjalnymi równaniami (podejście LES – Large Eddy Simulation lub DES – Detached Eddy Simulation),
- poprzez modelowanie całego zakresu skal turbulencji przy pomocy specjalnych równań (podejście RANS czyli Reynolds Averaged Navier Stokes).**

## Równania Reynoldsa mają postać:

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \bar{U}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad} U) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + S_x$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \text{div}(\rho V \bar{U}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad} V) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + S_y$$

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \text{div}(\rho W \bar{U}) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad} W) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + S_z$$

Zamknięcie równania Reynoldsa wymaga zastosowania modelu turbulencji. Najczęściej używany jest model dwu-równaniowy k-ε, gdzie k jest energią kinetyczną turbulencji a ε – prędkością rozpraszania tej energii. Model ten jest oparty na następujących zależnościach:

$$k = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \tau_{ij} = -\rho u'_i u'_j = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \bar{U}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad} k \right] + 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \bar{U}) = \text{div} \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad} \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad C_\mu = 0,09 \quad \sigma_\varepsilon = 1,30$$

$$\sigma_k = 1,0 \quad C_{1\varepsilon} = 1,44 \quad C_{2\varepsilon} = 1,92$$

Zamknięcie równania Reynoldsa przy pomocy modelu turbulencji wymaga wprowadzenia dodatkowych warunków brzegowych. W przypadku modelu k-e są to następujące warunki:

- na wlocie – zadane rozkłady k i e
- na wylocie  $\partial k / \partial n = 0$  oraz  $\partial \varepsilon / \partial n = 0$
- na swobodnej granicy k=0 oraz e=0
- na sztywnej ścianie podejście zależy od liczby Reynoldsa – dla wysokich liczb stosuje się tzw. prawo ściany, unikając całkowania równań do samego brzegu, - dla niskich liczb stosuje się inną postać równań modelowych opartą na założeniu że przepływ jest zdominowany przez naprężenia lepkościowe.