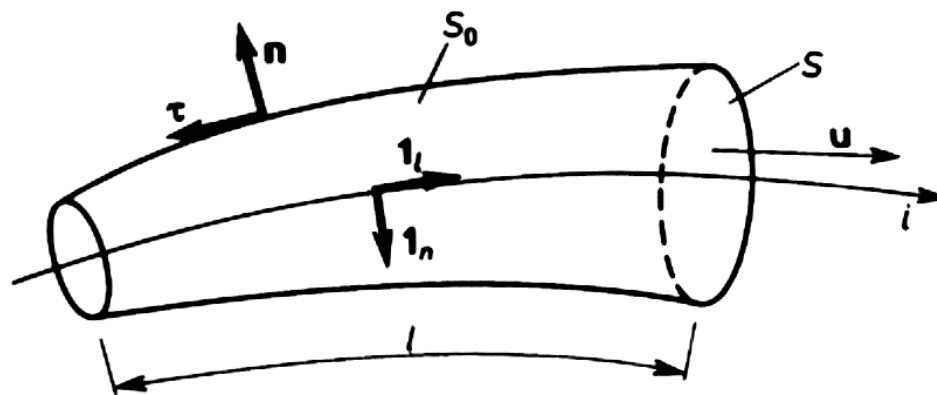


J. Szantyr – Wykład nr 16 – Przepływy w przewodach zamkniętych

Przewód zamknięty – kanał o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, ograniczonym linią zamkniętą, całkowicie wypełniony płynem (bez swobodnej powierzchni)



Do opisu ruchu płynu w kanałach zamkniętych stosuje się uproszczony model przepływu jednowymiarowego. Zakłada się, że oś kanału jest „prawie” prosta, a przepływ przez przekrój S odbywa się z prędkością „reprezentatywną”, czyli jakąś prędkością średnią $\tilde{u}$

Najprostszy przypadek: przewód o stałym przekroju kołowym
ułożony poziomo. Przepływ stacjonarny płynu nieściśliwego.

Równanie zachowania masy (m -masowe natężenie przepływu):

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho \tilde{u} S) = 0 \rightarrow \rho \tilde{u} S = m = const \rightarrow \tilde{u} = \frac{m}{\rho S} = const$$

Równanie zachowania pędu: $\frac{D}{Dt}(\tilde{\rho} \tilde{u} S) = \tilde{\rho} \tilde{f} S - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial l} S - p_{\tau} C$

gdzie C – obwód przekroju S

p_{τ} - lepkościowe naprężenia styczne

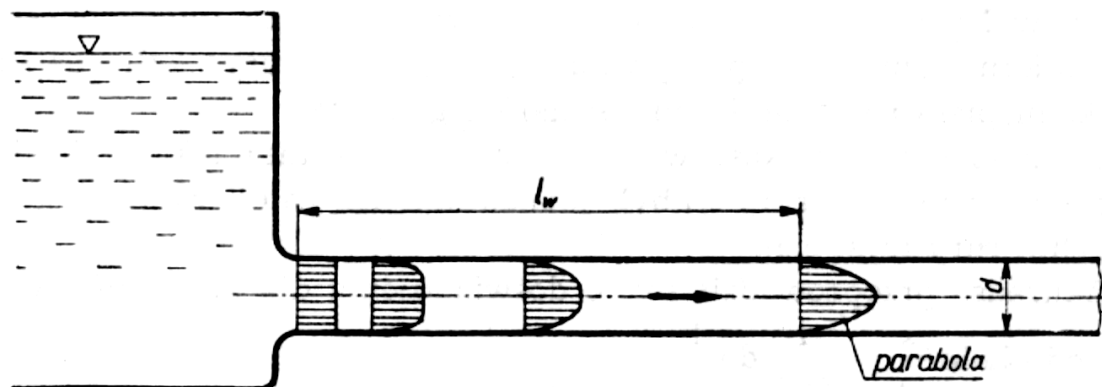
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial l} S - p_{\tau} C \rightarrow \frac{\partial p}{\partial l} = -p_{\tau} \frac{C}{S} \rightarrow \int_1^2 dp = -\int_1^2 p_{\tau} \frac{C}{S} dl$$

Przy stałych naprężeniach wzdłuż kanału o przekroju kołowym mamy:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_{\tau} \frac{4l}{d}$$

Na skutek działania sił lepkości wzdłuż kanału występuje spadek ciśnienia wprost proporcjonalny do l i p_τ oraz odwrotnie proporcjonalny do d .

W przypadku w pełni rozwiniętego przepływu laminarnego, czyli po odcinku początkowym $l_w \approx 0,03 \cdot \text{Re} \cdot d$ można uzyskać analityczne rozwiązanie równania Naviera-Stokesa, które prowadzi do wzorów:



prędkość lokalna:

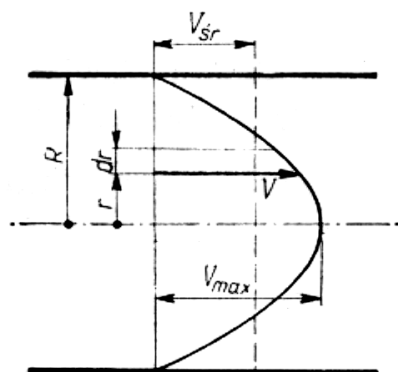
$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu l} (r_0^2 - r^2)$$

prędkość
średnia:

$$\tilde{u} = \frac{\Delta p \cdot r_0^2}{8\mu l}$$

Wzór na prędkość średnią można przekształcić do wzoru Darcy-Weisbacha:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho \tilde{u}^2}{2}$$



gdzie λ – współczynnik oporu, lub **współczynnik strat liniowych**

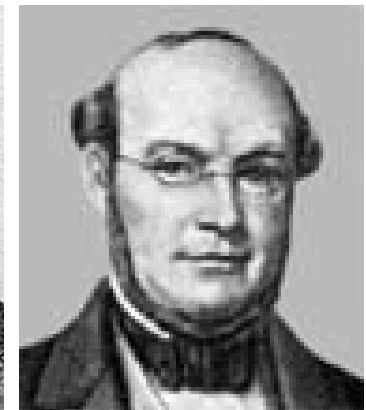
W przepływie laminarnym: $\lambda = \frac{64}{Re}$

W przepływie turbulentnym
przez rury hydrodynamicznie
gładkie:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$$



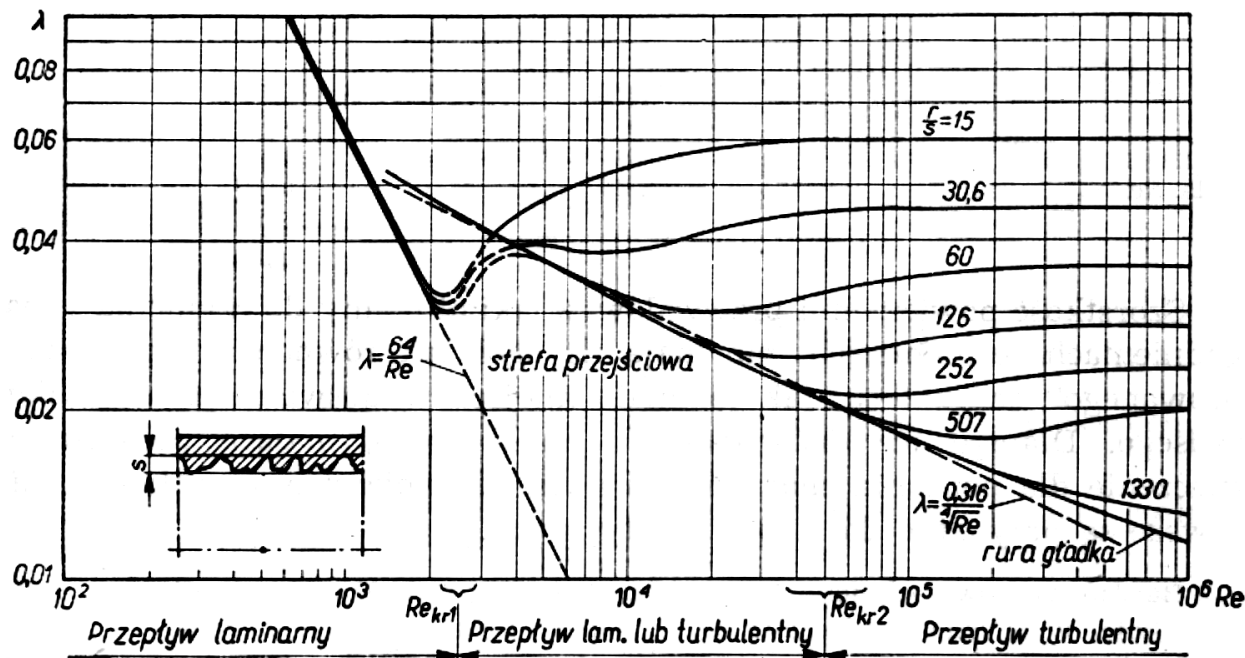
Henri Darcy
1803 - 1858



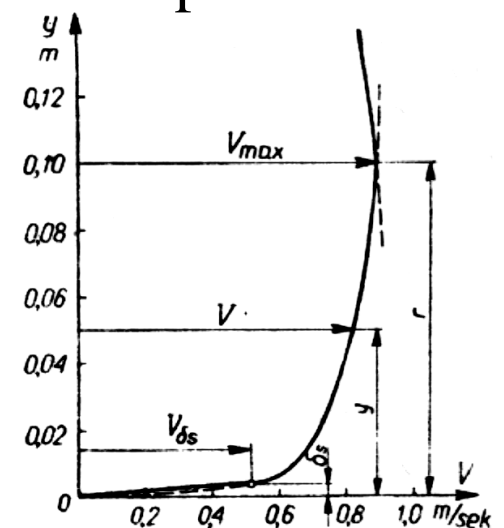
Julius Weisbach
1806 - 1871

W ogólnym przypadku należy
uwzględnić wpływ
chropowatości ścian:

$$\lambda = \lambda\left(Re, \frac{r_0}{k}\right)$$



Turbulentny profil
prędkości w przewodzie



Przypadek trudniejszy: przewód nachylony pod kątem α

Jeżeli założymy przepływ stacjonarny, to równanie zachowania pędu przyjmie postać:

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial l} = f_l - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{p_\tau}{\rho} \frac{C}{S} \rightarrow \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = - \frac{p_\tau}{\rho} \frac{C}{S}$$

gdzie podstawiono składową siły
masowej wzdłuż l:

$$f_l = g \sin \alpha = -g \frac{dz}{dl}$$

Po scałkowaniu pomiędzy dwoma przekrojami kanału otrzymujemy
równanie Bernoulliego dla rzeczywistego przepływu ze stratami:

$$\left(\frac{\tilde{u}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) - \left(\frac{\tilde{u}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) = \int_1^2 \frac{p_\tau}{\rho} \frac{C}{S} dl$$

albo:

$$\frac{\tilde{u}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\tilde{u}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_s = H = \text{const}$$

gdzie h_s - wysokość strat



Daniel Bernoulli
1707 - 1783

Wysokość strat możemy podzielić na dwa składniki:

-wysokość strat liniowych związanych z tarciem płynu o ścianki przewodu prostoliniowego o stałym przekroju,

-wysokość strat lokalnych związanych z obecnością zaworów, kolan, zwężeń, rozgałęzień i innych elementów.

Wysokość strat liniowych wyraża się wzorem:
$$h_s = \frac{\tilde{u}^2}{2g} \lambda \frac{l}{d}$$

Wysokość strat lokalnych wyraża się wzorem:
$$h_s = \zeta \frac{\tilde{u}_1^2}{2g} = \zeta' \frac{\tilde{u}_2^2}{2g}$$

Gdzie ζ jest współczynnikiem strat lokalnych, który może być określony w odniesieniu do prędkości przed elementem lub prędkości za elementem. Współczynniki ζ są określane eksperymentalnie i można je znaleźć w odpowiednich tablicach. Poniżej podano kilka przykładowych wartości współczynników strat lokalnych.

Współczynniki strat lokalnych

Rodzaj straty lokalnej	Współczynnik straty
Wlot ze zbiornika	$\zeta' = 0,5$
Załamanie przewodu o φ	$\zeta = 0,946 \sin^2 \varphi/2 + 2,05 \sin^4 \varphi/2$
Zwiększenie przekroju	$\zeta = (1 - A_1/A_2)^2$ $\zeta' = (A_2/A_1 - 1)^2$
Kurek otwarcie 5 stopni	$\zeta = 0,05$
Kurek otwarcie 45 stopni	$\zeta = 31,2$
Wlot ssania pompy	$\zeta = 10,0$

W przypadku gdy przepływ odbywa się w przewodach o znacznej średnicy, równanie Bernoulliego powinno być jeszcze uzupełnione o współczynnik Coriolisa (lub de Saint-Venanta) α

$$\frac{\alpha_1 \cdot \tilde{u}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 \cdot \tilde{u}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_s = H = \text{const}$$

Wynika to z faktu, że rzeczywista energia strumienia niejednorodnego różni się od energii obliczonej według średniej prędkości wydatkowej dla tego strumienia. Wobec tego mamy:

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{\tilde{u}^3 \cdot A}$$

Współczynnik α jest tym większy im bardziej niejednorodne jest pole prędkości przepływu.

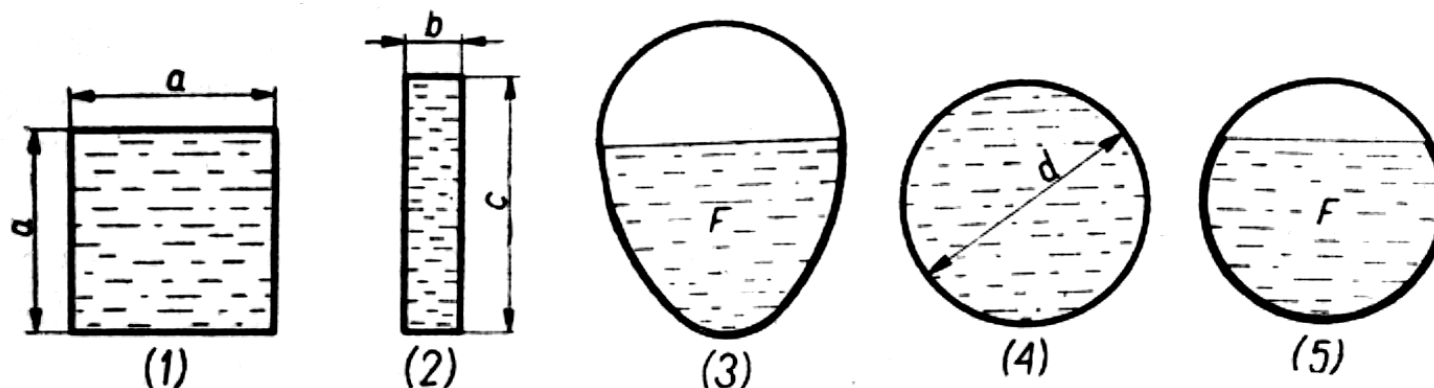


Gaspard Coriolis
1792 - 1843



Adhemar de Saint Venant
1797 - 1886

Przypadek przewodów o przekroju niekołowym lub częściowo wypełnionych



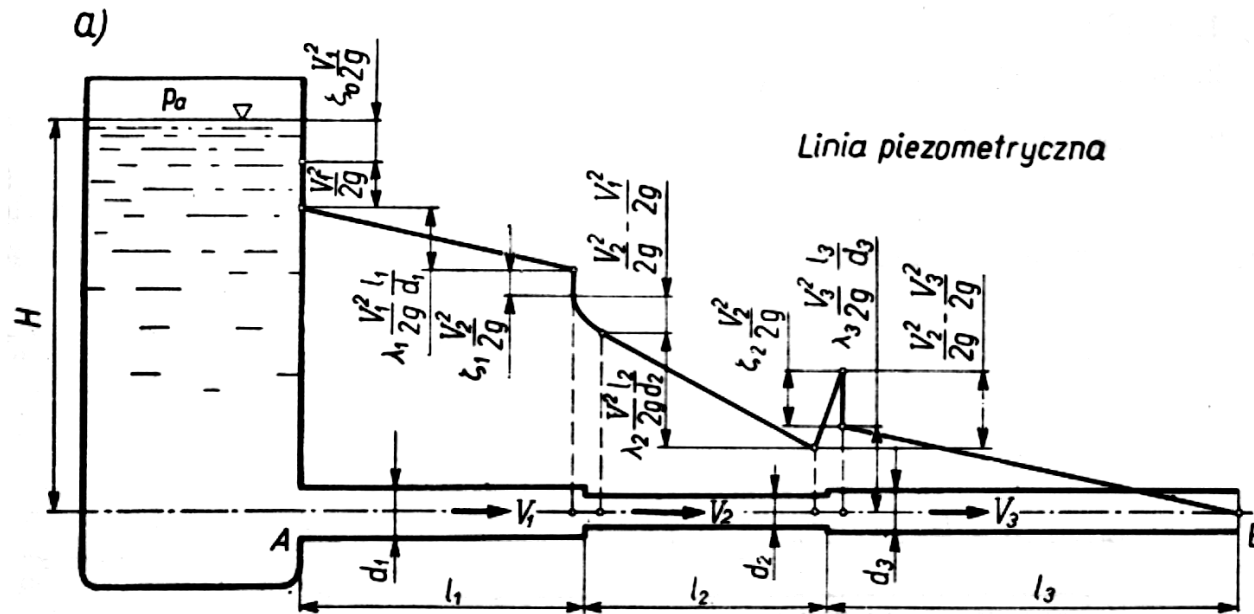
W przypadku przewodów o przekroju innym niż kołowy oraz w przypadku przewodów częściowo wypełnionych płynem istotnym parametrem jest promień hydrauliczny, czyli stosunek pola przekroju strumienia płynu do obwodu zwilżonego:

$$r_h = \frac{F}{L_z}$$

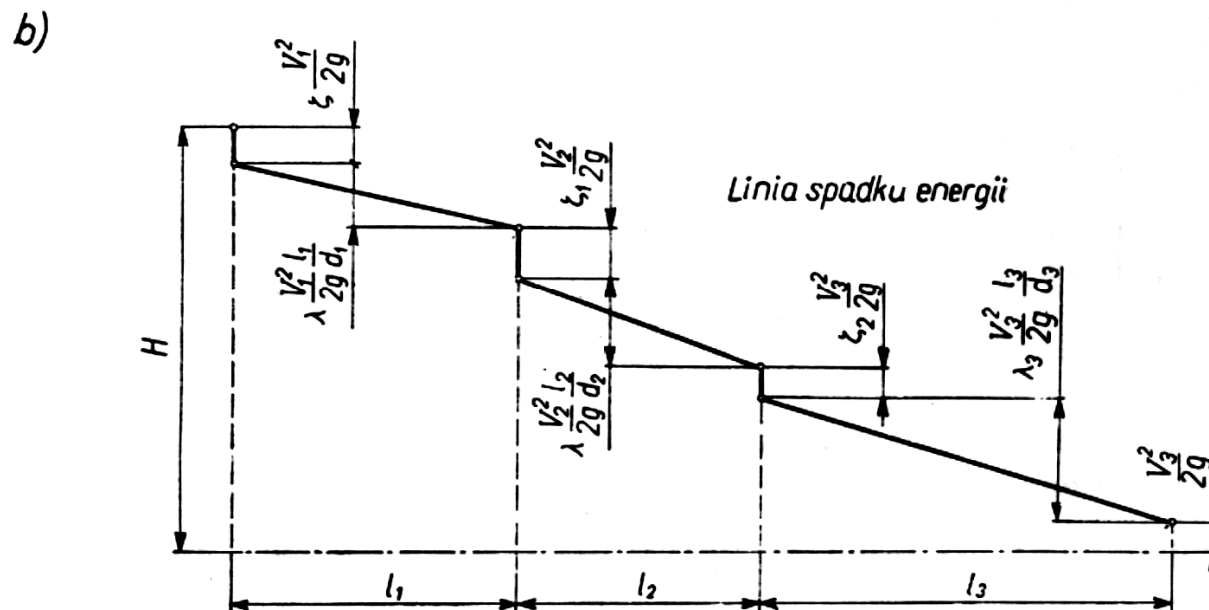
W takich przypadkach liczbę Reynoldsa obliczamy według wzoru:

$$\text{Re} = \frac{u \cdot 4r_h}{\nu}$$

Obliczenie rurociągu prostego



Linia piezometryczna pokazuje zmiany ciśnienia wzdłuż osi przewodu. Takie ciśnienie pokazałyby manometry w odpowiednich punktach rurociągu.



Linia spadku energii pokazuje liniowe i lokalne straty energii wzdłuż osi przewodu.

Komentarze do linii piezometrycznej

Przyjmujemy oś rurociągu jako poziom odniesienia wysokości ciśnienia $p_a / \rho g$ czyli na wlocie ciśnienie wynosi $p_a + \rho g H$

Tuż za wlotem do rurociągu wysokość ciśnienia jest jest mniejsza o:

stratę na wlocie $\zeta \frac{V_1^2}{2g}$

część zamienioną na energię kinetyczną płynącej cieczy $\frac{V_1^2}{2g}$

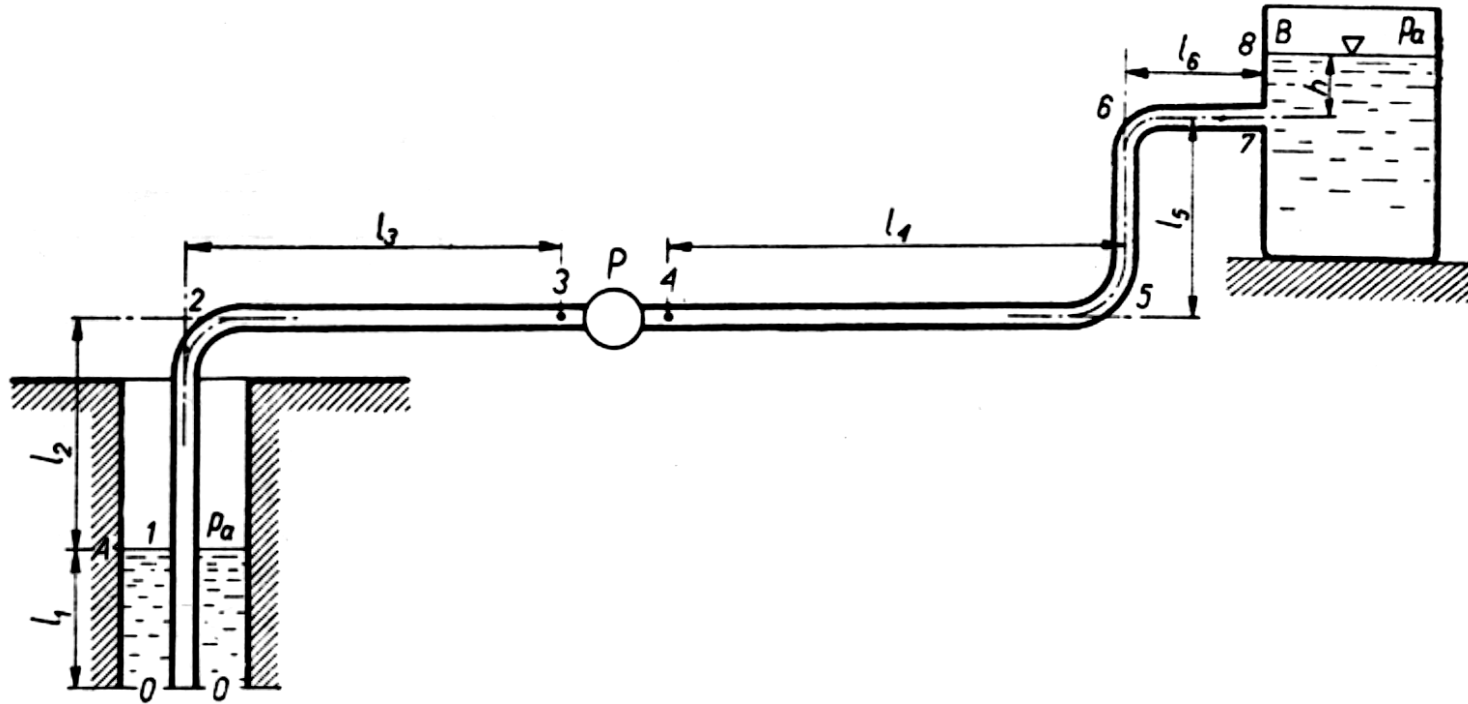
Na pierwszym odcinku rurociągu wysokość ciśnienia spada

liniowo zgodnie z wielkością strat liniowych: $\lambda_1 \frac{V_1^2}{2g}$

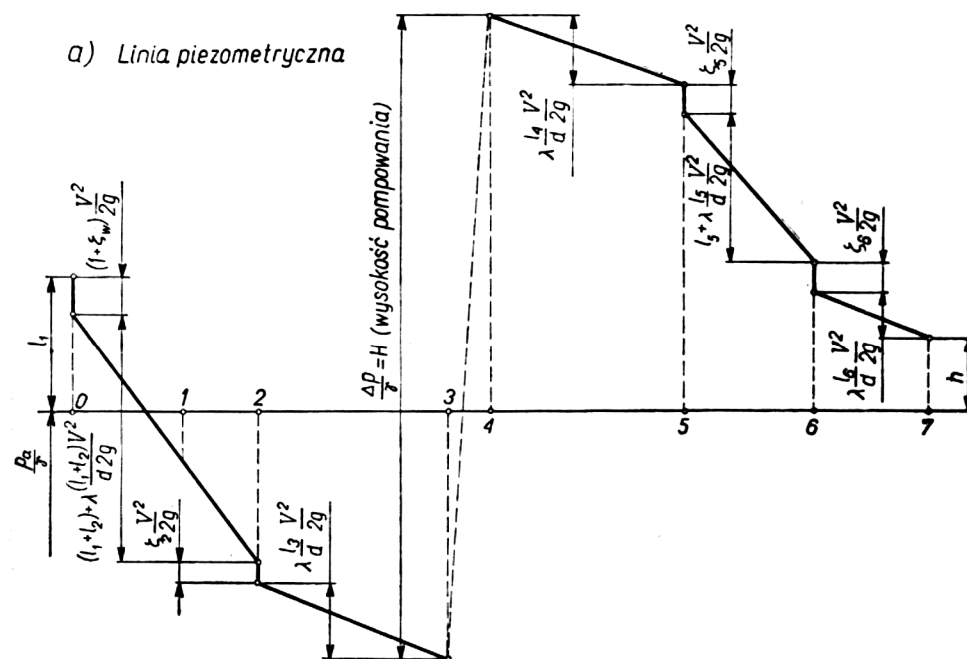
Komentarze do linii spadku energii

Linia ta pokazuje tylko wysokości liniowych i lokalnych strat energii, nie uwzględniając energii kinetycznej płynącej cieczy, czyli leży ona wyżej od linii piezometrycznej o wielkość: $\frac{V_i^2}{2g}$

Obliczenie rurociągu prostego z pompą



Rurociąg czerpie wodę ze studni A i tłoczy ją do zbiornika B. Energia dostarczona przez pompę w jednostce czasu jest zużywana na podniesienie wody od poziomu A do poziomu B oraz na pokonanie strat liniowych wzdłuż przewodu oraz strat lokalnych. Na odcinku 3-4 oznaczamy tylko przyrost ciśnienia wywołany pracą pompy bez uwzględniania strat na odcinkach rurociągu należących do pompy.

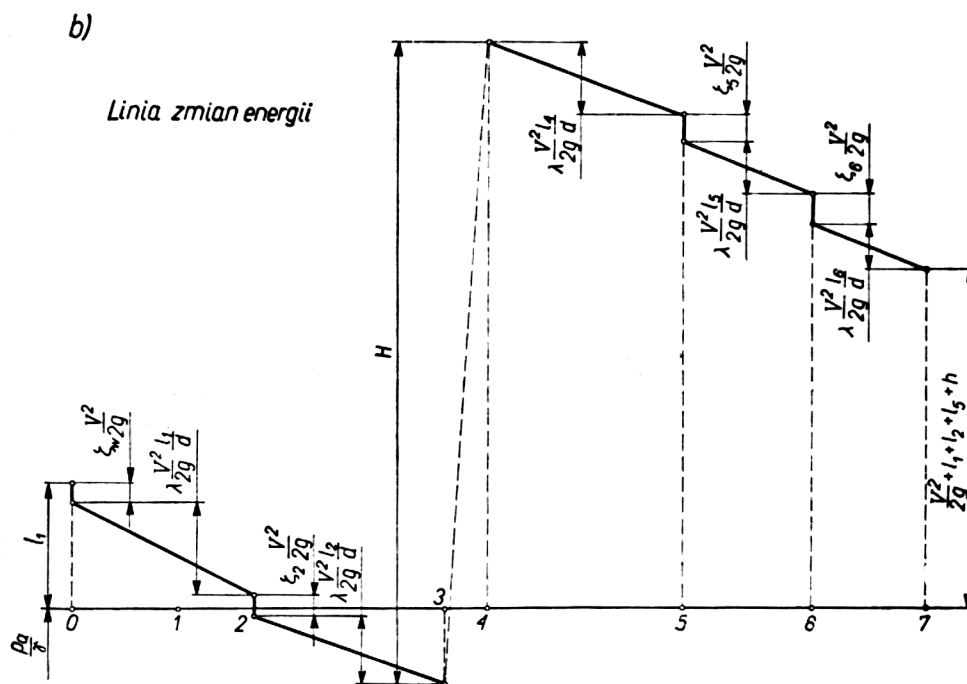


Wysokość podnoszenia pompy:

$$H = \frac{\Delta p}{\rho g}$$

Poziom odniesienia na wysokości wlotu do rurociągu.
Wysokość ciśnienia wynosi tam:

$$l_1 + \frac{p_a}{\rho g}$$



Rurociąg ma stały przekrój, wobec czego prędkość przepływu jest stała w całym rurociągu.

Przepływy w sieciach rurociągów

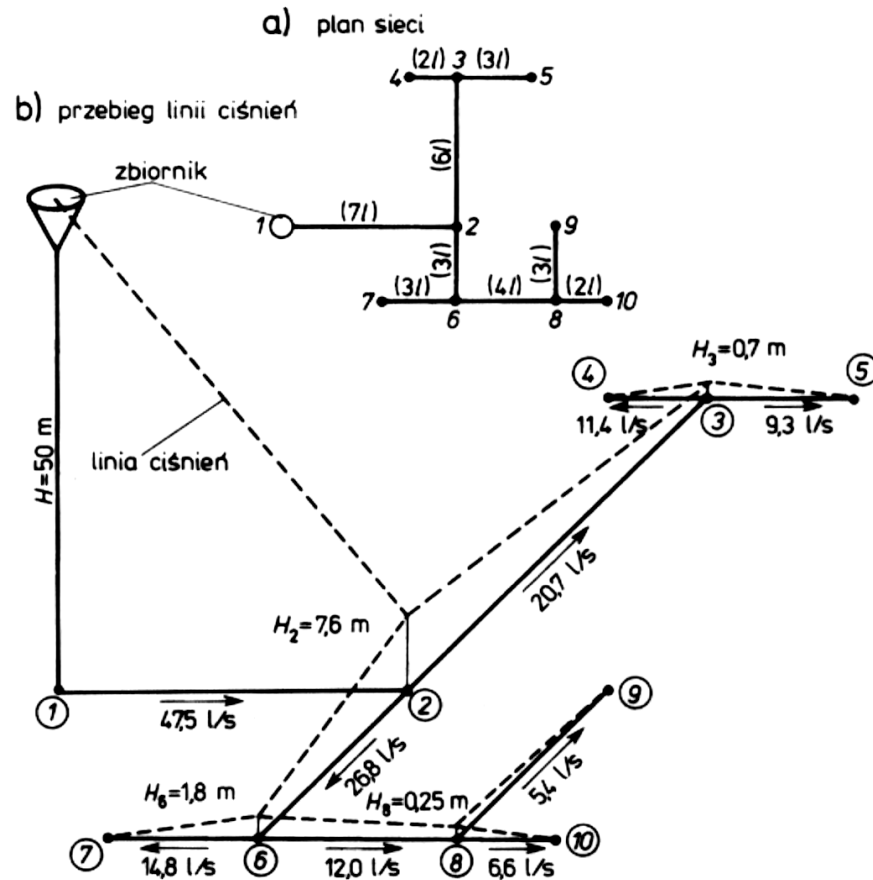
W praktyce mamy do czynienia z mniej lub bardziej złożonymi rurociągami. Jeżeli strumień płynu nie ulega rozgałęzieniu, mówimy o rurociągu prostym. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z siecią rurociągów. Sieci dzielimy na rozgałęzione (gdy sieć nie tworzy obwodów zamkniętych oraz na pierścieniowe (gdy występują obwody zamknięte). Obliczenie hydrauliczne sieci polega na wyznaczeniu parametrów we wszystkich elementach tworzących sieć. Obliczenia hydrauliczne są wykonywane dla sytuacji stacjonarnej jeżeli liczba Strouhala jest mniejsza od jedności:

$$Sh = \frac{t_{char}}{t_{zm}} < 1$$

t_{char} - czas przepływu przez odcinek rurociągu

t_{zm} - czas zmiany warunków na wlocie do odcinka

Obliczenie sieci rozgałęzionej



Dana jest sieć rozgałęziona zasilana ze zbiornika o stałym nadciśnieniu $H=50$ [m]. W punktach 4, 5, 7, 9, 10 następuje wypływ wody do atmosfery. Obliczyć natężenia przepływu w odcinkach sieci oraz wyznaczyć linie piezometryczne. Pominać straty lokalne.

Sieć składa się z 9 odcinków, 4 węzłów oraz 6 punktów końcowych (1 zasilający i 5 zasilanych). Niewiadome to 9 wydatków na odcinkach oraz 4 wartości nadciśnienia w węzłach. Mamy do dyspozycji 9 równań Bernoulliego i 4 równania ciągłości przepływu w węzłach.

Zastosujemy inną postać wzoru na straty liniowe w odcinkach sieci:

$$\Delta h_{li} = l_i \frac{Q_i^2}{K_i^2} \quad \text{gdzie: } K = 0,061 [m^3/s] \quad \text{charakterystyka przewodu}$$

Na podstawie równania Bernoulliego otrzymujemy następujące równania:

$$\frac{H_1 - H_2}{7 \cdot l} = \frac{Q_{12}^2}{K^2} \quad \frac{H_2 - H_3}{6 \cdot l} = \frac{Q_{23}^2}{K^2} \quad \frac{H_2 - H_6}{3 \cdot l} = \frac{Q_{26}^2}{K^2} \quad \frac{H_6 - H_8}{4 \cdot l} = \frac{Q_{68}^2}{K^2}$$

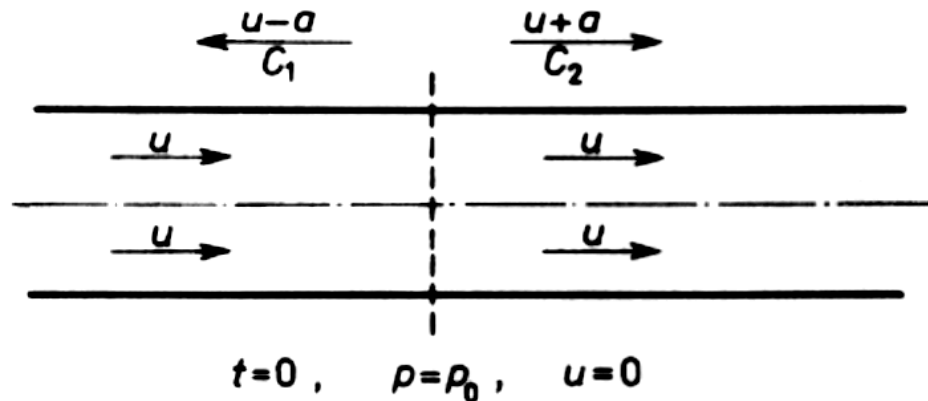
$$\frac{H_3}{2 \cdot l} = \frac{Q_{34}^2}{K^2} \quad \frac{H_3}{3 \cdot l} = \frac{Q_{35}^2}{K^2} \quad \frac{H_6}{3 \cdot l} = \frac{Q_{67}^2}{K^2} \quad \frac{H_8}{3 \cdot l} = \frac{Q_{89}^2}{K^2} \quad \frac{H_8}{2 \cdot l} = \frac{Q_{8,10}^2}{K^2}$$

Na podstawie równania ciągłości przepływu w węzłach otrzymujemy następujące równania:

$$Q_{68} = Q_{89} + Q_{8,10} \quad Q_{26} = Q_{67} + Q_{68} \quad Q_{23} = Q_{34} + Q_{35} \quad Q_{12} = Q_{23} + Q_{26}$$

Wyniki rozwiązywania tego układu równań pokazane są na rysunku.

Uderzenie hydrauliczne



Uderzenie hydrauliczne jest silnie dynamicznym zjawiskiem występującym np. przy nagłym zamknięciu przewodu w trakcie przepływu.

Obliczeniowa analiza uderzenia hydraulicznego wymaga wzięcia pod uwagę elastyczności ścianek przewodu oraz (zwykle pomijanej) ściśliwości cieczy. Nagłe zamknięcie przewodu powoduje powstanie fali obniżonego ciśnienia rozprzestrzeniającej się zgodnie z kierunkiem pierwotnego przepływu oraz fali podwyższonego ciśnienia, rozprzestrzeniającej się pod prąd przepływu pierwotnego.

Prędkość propagacji fali ciśnienia:

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \left(\frac{1}{E_c} + \frac{d}{\delta} \frac{1}{E_s} \right)}}$$

gdzie: δ – grubość ścianki rurociągu

d – średnica rurociągu

ρ_0 - początkowa gęstość cieczy

E_c - moduł sprężystości cieczy

E_s - moduł sprężystości materiału rurociągu

Podwyższone ciśnienie: $p = p_0 + \rho_0 u a$

Obniżone ciśnienie: $p = p_0 - \rho_0 u a$

Fala obniżonego ciśnienia może prowadzić do wystąpienia kawitacji i erozyjnego niszczenia ścianek rurociągu poniżej przegrody, a fala podwyższonego ciśnienia może rozsadzić rurociąg powyżej przegrody.

Przykład

Przewodem stalowym o średnicy $d=600$ [mm] i grubości ścianek $\delta=12$ [mm] przepływa woda z prędkością $u=3,0$ [m/s]. Wyznaczyć przyrost ciśnienia w chwili nagłego zamknięcia zaworu, jeżeli

$$E_s = 2,06 \cdot 10^5 [MPa] \quad \text{oraz} \quad E_c = 0,2 \cdot 10^4 [MPa]$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{1000,0 \left(\frac{1}{0,2 \cdot 10^{10}} + \frac{0,6}{0,012} \frac{1}{2,06 \cdot 10^{11}} \right)}} = 1160 [m/s]$$

$$\Delta p = \rho_0 u a = 1000,0 \cdot 3,0 \cdot 1160,0 = 3480000 [Pa] = 3,48 [MPa]$$