

J. Szantyr – Wykład 4 – Podobieństwo przepływów I

Eksperymentalne badanie przepływów przez maszyny i urządzenia przepływowe odbywa się najczęściej na modelach tych maszyn zbudowanych w odpowiednio zmniejszonej skali. Aby wyniki uzyskane z badania modeli można było odnieść do obiektów w skali rzeczywistej konieczne jest spełnienie odpowiednich warunków podobieństwa. Warunki te można podzielić na podobieństwo geometryczne, podobieństwo kinematyczne i podobieństwo dynamiczne.

Podobieństwo geometryczne jest najbardziej oczywiste i najłatwiejsze do spełnienia – wymaga ono aby obiekt rzeczywisty i obiekt modelowy były geometrycznie podobne.

Podobieństwo kinematyczne postuluje podobieństwo pól prędkości w przepływie wokół obiektu rzeczywistego i obiektu modelowego

Podobieństwo dynamiczne postuluje podobieństwo pól sił występujących na obiekcie rzeczywistym i na obiekcie modelowym

Uzyskanie pełnego podobieństwa pozwala na bardzo proste przeliczenia odpowiadających sobie wielkości ze skali modelowej na skalę rzeczywistą – bezwymiarowe współczynniki sił czy prędkości są po prostu sobie równe, na przykład:

$$\frac{F_{\text{mod}}}{\frac{1}{2} \rho_{\text{mod}} V_{\text{mod}}^2 S_{\text{mod}}} = C_{F_{\text{mod}}} = C_{F_{\text{rzecz}}} = \frac{F_{\text{rzecz}}}{\frac{1}{2} \rho_{\text{rzecz}} V_{\text{rzecz}}^2 S_{\text{rzecz}}}$$

W wielu przypadkach uzyskanie pełnego podobieństwa jest niemożliwe. Wtedy prowadzi się eksperymentalne badania modelowe przy podobieństwie częściowym. Wymaga to wprowadzenia do przeliczania wyników na obiekt rzeczywisty specjalnych poprawek uwzględniających tzw. efekt skali.



Laboratoryjne
modele
wirników
turbin wodnych

Wirnik turbiny Peltona



Wirnik turbiny Kaplana

Wirnik turbiny Francisa



Uzyskanie pełnego podobieństwa pomiędzy przepływem modelowym a przepływem rzeczywistym wymaga jednoczesnego spełnienia szeregu warunków, zwanych kryteriami podobieństwa hydrodynamicznego. Kryteria te można wyprowadzić z odpowiednich równań mechaniki płynów, co jest przedmiotem dalszej części wykładu.

System wymiarowania wielkości fizycznych

Jednostki podstawowe

Długość [m]

Masa [kg]

Czas [s]

Temperatura [K]

Jednostki pochodne

Siła $[N] = \left[kg \frac{m}{s^2} \right]$

Moc $[W] = \left[kg \frac{m^2}{s^3} \right]$

Formułowanie praw fizycznych nie zależy od wyboru jednostek

Twierdzenie Buckingham'a (twierdzenie II)

1. Każdą funkcję n parametrów wymiarowych a_i , z których k ma wymiary podstawowe, można przedstawić w postaci funkcji $n-k$ parametrów bezwymiarowych typu:

$$\Pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}}$$

2. Jeżeli parametry bezwymiarowe Π będą identyczne dla dwóch różnych sytuacji (np. dwóch różnych skal), to zjawisko będzie przebiegało identycznie, pomimo różniących się parametrów typu a . Parametry typu Π można więc nazwać **parametrami podobieństwa** lub **kryteriami podobieństwa**.

Na podstawie ww. twierdzenia można przeprowadzić analizę wymiarową równań mechaniki płynów i wyprowadzić odpowiednie kryteria podobieństwa.

Edgar Buckingham
1867 - 1940



Analiza wymiarowa równania zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{dla skali 1}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial(\rho' u'_x)}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' u'_y)}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho' u'_z)}{\partial z'} = 0 \quad \text{dla skali 2}$$

Wprowadzamy przeliczniki skal: $\rho' = \alpha_\rho \rho$ $t' = \alpha_t t$

$$x' = \alpha_x x \quad y' = \alpha_y y \quad z' = \alpha_z z \quad u'_x = \alpha_{ux} u_x \quad u'_y = \alpha_{uy} u_y \quad u'_z = \alpha_{uz} u_z$$

Postulujemy podobieństwo geometryczne pomiędzy przepływami w obu skalach, czyli:

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha_l = \frac{l'}{l}$$

Ponadto postulujemy podobieństwo kinematyczne, czyli podobieństwo pól prędkości pomiędzy przepływami w obu skalach, czyli:

$$\alpha_{ux} = \alpha_{uy} = \alpha_{uz} = \alpha_u = \frac{\bar{u}'}{\bar{u}}$$

Teraz równanie dla skali 2 można zapisać w postaci:

$$\frac{\alpha_\rho}{\alpha_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_l} \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] = 0$$

Warunek identyczności równań w skali 1 i 2 ma postać:

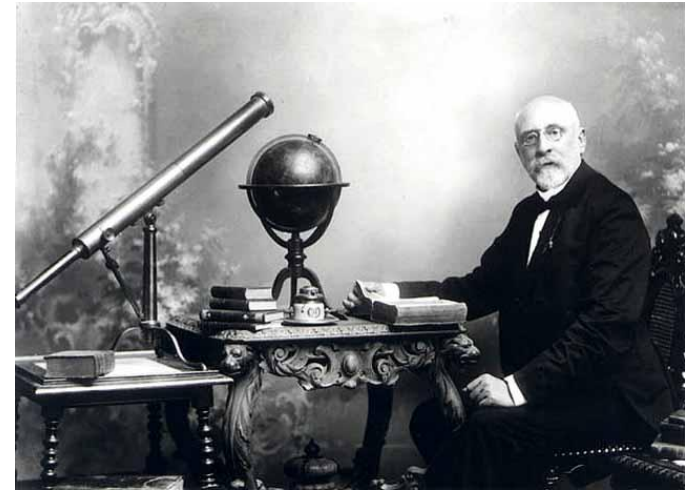
$$\frac{\alpha_\rho}{\alpha_t} = \frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_l} \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha_l}{\alpha_t \alpha_u} = 1$$

Wobec tego z zapisu skal wynika równość:

Sh – liczba Strouhala

$$\frac{l}{tu} = \frac{l'}{t'u'} = \frac{t_c}{t} = Sh$$

Vincent Strouhal
1850 - 1922



t_c - czas charakterystyczny przepływu (czyli czas pokonania przez płyn charakterystycznego wymiaru liniowego l – np. długości rurociągu, z prędkością charakterystyczną u)

t - czas zmienności niestacjonarnych warunków przepływu, np. długość cyklu pracy pompy tłokowej

Wykorzystując liczbę Strouhala można napisać równanie zachowania masy w postaci bezwymiarowej:

$$Sh \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{\rho} \hat{u}_x)}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(\hat{\rho} \hat{u}_y)}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial(\hat{\rho} \hat{u}_z)}{\partial \hat{z}} = 0$$

gdzie wszystkie wielkości są odniesione do odpowiednich wielkości charakterystycznych, co czyni je bezwymiarowymi, np.:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \hat{t} = \frac{t}{t_0} \quad \hat{u}_x = \frac{u_x}{u_0} \quad \hat{x} = \frac{x}{x_0} \quad \text{itd.}$$

Mała wartość liczby Strouhala w danym przepływie oznacza, że niestacjonarne zjawiska w tym przepływie są mało istotne i mogą być pominięte.

Analiza wymiarowa równania Naviera - Stokesa

Dodatkowo należy wprowadzić przeliczniki skal:

$$\bar{f}' = \alpha_f \bar{f} \quad \mu' = \alpha_\mu \mu \quad p' = \alpha_p p$$

Po podstawieniu do równania N-S otrzymujemy:

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_t} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\alpha_\rho \alpha_u^2}{\alpha_l} \rho \left[u_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] = \alpha_\rho \alpha_f \rho \bar{f} - \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \text{grad} p +$$
$$- \frac{\alpha_\mu \alpha_u}{\alpha_l^2} \text{grad} \left(\frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{u} \right) + \frac{\alpha_\mu \alpha_u}{\alpha_l^2} \text{div} (2\mu [D])$$

Równanie to jest identyczne w dwóch różnych skalach 1 i 2 przy spełnieniu następującego warunku:

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_t} = \frac{\alpha_\rho \alpha_u^2}{\alpha_l} = \alpha_\rho \alpha_f = \frac{\alpha_p}{\alpha_l} = \frac{\alpha_\mu \alpha_u}{\alpha_l^2}$$

Po podzieleniu stronami przez drugi wyraz i po wykorzystaniu definicji skal otrzymujemy:

Liczba Strouhala: $Sh = \frac{l}{tu} = \frac{l'}{t'u'}$

Liczba Froude'a: $(Fr)^2 = \frac{u^2}{fl} = \frac{u'^2}{f'l'}$

Liczba Froude'a wyraża stosunek sił bezwładności do sił masowych

Liczba Eulera: $Eu = \frac{p}{\rho u^2} = \frac{p'}{\rho' u'^2}$

Liczba Eulera wyraża stosunek sił ciśnienia do sił bezwładności

Liczba Reynoldsa: $Re = \frac{\rho u l}{\mu} = \frac{\rho' u' l'}{\mu'}$

Liczba Reynoldsa wyraża stosunek sił bezwładności do sił lepkości

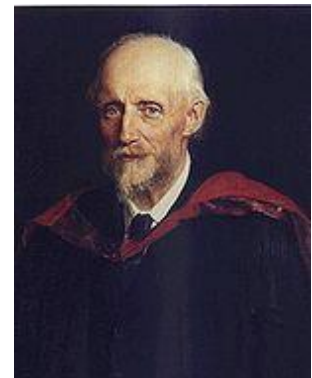
William Froude
1810 - 1879



Leonhard Euler
1707 - 1783



Osborne Reynolds
1842 - 1912



Wykorzystując liczby Strouhala, Froude'a, Eulera i Reynoldsa można napisać równanie Naviera Stokesa w postaci bezwymiarowej:

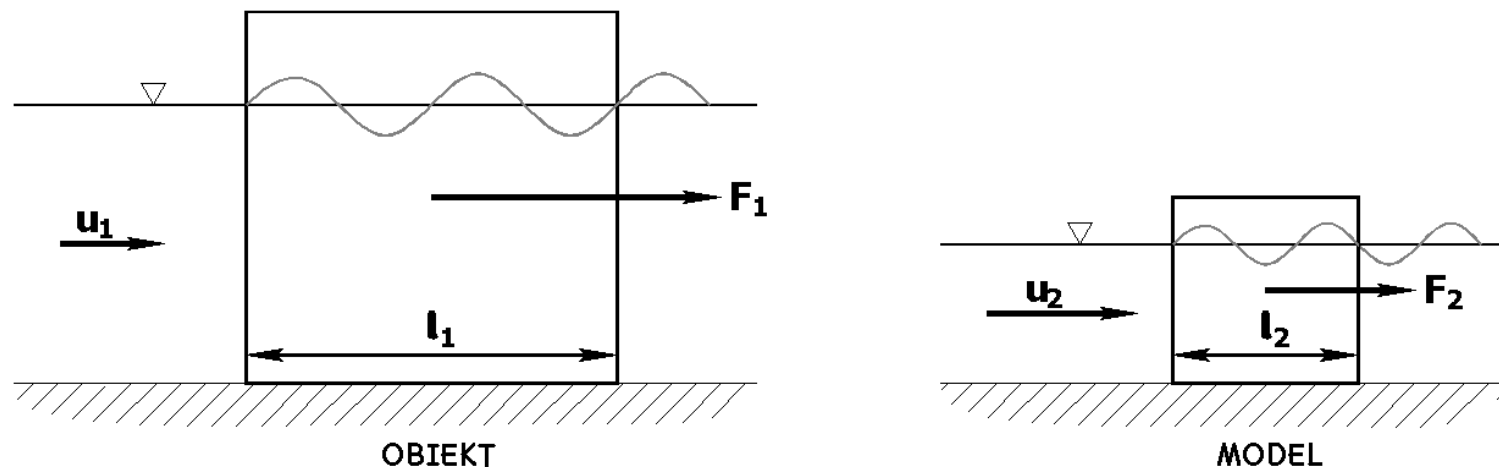
$$Sh\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho(\bar{u} \text{grad})\bar{u} = \frac{\rho}{(Fr)} \bar{f} - Eu \cdot \text{grad}p +$$

$$- \frac{1}{Re} \left[\text{grad} \left(\frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{u} \right) - \text{div}(2\mu[D]) \right]$$

W równaniu powyższym wszystkie parametry zostały odniesione do wielkości charakterystycznych, podobnie jak w równaniu zachowania masy.

Jeżeli równanie N-S w powyższej postaci zastosujemy do przepływów w dwóch różnych skalach, to uzyskamy pełne podobieństwo zjawisk przy zachowaniu równości wszystkich kryteriów podobieństwa. Nie zawsze jest to możliwe. Przy zachowaniu tylko niektórych kryteriów uzyskujemy tzw. podobieństwo częściowe, a wyniki pomiarów lub obliczeń są obciążone tzw. efektem skali (patrz przykład poniżej).

Przykład 1 – wyznaczenie sił na podporze mostu



Rozpatrujemy przypadek podpory mostu (1), która jest badana w laboratorium na modelu (2) w skali zmniejszonej (1:10), w celu określenia wypadkowej siły hydrodynamicznej działającej na podporę. Siła ta składa się z części lepkościowej, zależnej przede wszystkim od liczby Reynoldsa, oraz z części falowej zależnej przede wszystkim od liczby Froude'a. Postulujemy:

$$F = F_w(Fr) + F_v(Re) \quad \text{przy np.:} \quad U_1 = 5,0 \left[\frac{m}{s} \right]$$

W przypadku pełnego podobieństwa $Re_1 = Re_2$ $Fr_1 = Fr_2$ można napisać:

$$F_1 = C_{F1} \frac{\rho_1}{2} U_1^2 S_1 \quad \text{gdzie:} \quad C_{F1} = C_{F2} = \frac{F_2}{\frac{\rho}{2} U_2^2 S_2}$$

Zachowanie równości liczb Froude'a prowadzi do:

$$\frac{U_1}{\sqrt{gL_1}} = \frac{U_2}{\sqrt{gL_2}} \rightarrow U_2 = U_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 0,3162 \cdot U_1 \rightarrow U_2 = 1,581 \left[\frac{m}{s} \right]$$

Z kolei zachowanie równości liczb Reynoldsa prowadzi do:

$$\frac{U_1 L_1}{\nu} = \frac{U_2 L_2}{\nu} \rightarrow U_1 L_1 = U_2 L_2 \rightarrow U_2 = U_1 \frac{L_1}{L_2} \rightarrow U_2 = 50,0 \left[\frac{m}{s} \right]$$

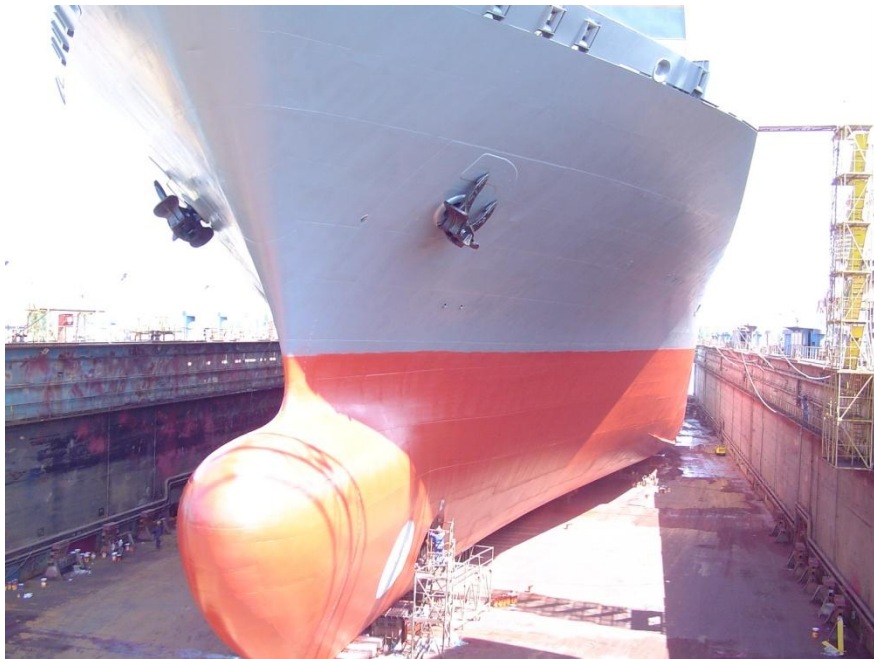
Widać wyraźnie, że jednoczesne spełnienie obu kryteriów podobieństwa jest niemożliwe. Łatwiejsze jest spełnienie kryterium Froude'a, gdyż spełnienie kryterium Reynoldsa wymaga zastosowania w laboratorium bardzo wysokiej prędkości. Powoduje to powstanie efektu skali, który powinien być wzięty po uwagę przy przeliczaniu wyników.

Przykład 2 – wyznaczanie oporu statku

Statek

27,2:1

Model



$$L_S = 190,0[m]$$

długość

$$L_M = 6,94[m]$$

$$S_S = 7740[m^2]$$

powierzchnia zwilżona [m**2]

$$S_M = 10,46[m^2]$$

$$V_S = 10,70[m/s]$$

prędkość [m/s]

$$V_M = 1,973[m/s]$$

Celem obliczeń jest pokazanie jak wielkie mogą być błędy wynikające z niepełnego podobieństwa hydrodynamicznego.

Liczba Froude'a dla statku = liczba Froude'a dla modelu:

$$F_{RS} = \frac{V_S}{\sqrt{g \cdot L_S}} = \frac{10,70}{\sqrt{9,81 \cdot 190,0}} = 0,236 = F_{RM} = \frac{V_M}{\sqrt{g \cdot L_M}} \rightarrow V_M = 1,973[m/s]$$

Opór hydrodynamiczny zmierzony na modelu i współczynnik oporu całkowitego dla modelu:

$$R_{TM} = 79,041[N] \rightarrow C_{TM} = \frac{R_{TM}}{\frac{1}{2} \rho_M V_M^2 S_M} = \frac{79,041}{0,5 \cdot 999,3 \cdot 1,973^2 \cdot 10,46} = 3,8748 \cdot 10^{-3}$$

Liczba Reynoldsa dla modelu:

$$R_{NM} = \frac{V_M \cdot L_M}{\nu_M} = \frac{1,973 \cdot 6,94}{1,18859 \cdot 10^{-6}} = 11,5219 \cdot 10^6$$

Współczynnik oporu tarcia dla modelu:

$$C_{FOM} = \frac{0,075}{(\log R_{NM} - 2)^2} = 2,9275 \cdot 10^{-3}$$

Współczynnik oporu resztkowego dla modelu = współczynnik oporu resztkowego dla statku:

$$C_{RM} = C_{TM} - C_{F0M} = (3,8748 - 2,9275) \cdot 10^{-3} = 0,9473 \cdot 10^{-3} = C_{RS}$$

Liczba Reynoldsa dla statku:

$$R_{NS} = \frac{L_S \cdot V_S}{\nu_S} = \frac{190,0 \cdot 10,7}{1,18827 \cdot 10^{-6}} = 17,1089 \cdot 10^8$$

Współczynnik oporu tarcia dla statku:

$$C_{F0S} = \frac{0,075}{(\log R_{NS} - 2)^2} = 1,4369 \cdot 10^{-3}$$

Współczynnik oporu całkowitego dla statku i opór statku obliczony z uwzględnieniem efektu skali (czyli niepełnego podobieństwa hydrodynamicznego):

$$C_{TS} = C_{RS} + C_{F0S} = (0,9473 + 1,4369) \cdot 10^{-3} = 2,3842 \cdot 10^{-3}$$

$$R_{TS} = C_{TS} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_S \cdot V_S^2 \cdot S_S = 2,3842 \cdot 0,5 \cdot 1025,9 \cdot 10,7^2 \cdot 7740 \cdot 10^{-3} =$$
$$= 1083,74 [kN]$$

Opór całkowity statku obliczony przy założeniu pełnego podobieństwa hydrodynamicznego pomiędzy modelem i statkiem (czyli równości współczynników oporu całkowitego dla modelu i statku):

$$C_{TS} = C_{TM} = 3,8748 \cdot 10^{-3}$$

$$R_{TS} = C_{TS} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_S \cdot V_S^2 \cdot S_S = 3,8748 \cdot 0,5 \cdot 1025,9 \cdot 10,7^2 \cdot 7740 \cdot 10^{-3} = \\ = 1751,3 [kN]$$

Wniosek: rezygnacja z poprawki na efekt skali, wynikającej z niepełnego podobieństwa hydrodynamicznego, **powoduje zawyżenie przewidywania oporu statku o około 60%!**