

J .Szantyr – Wykład nr 5 – Podobieństwo przepływów II

Analiza wymiarowa równania zachowania energii

Postać wyjściowa równania zachowania energii:

$$\rho' \left[\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{u'^2}{2} + c'T' \right) + (\bar{u}' \bullet \text{grad}) \left(\frac{u'^2}{2} + c'T' \right) \right] = \rho' \bar{f}' \bullet \bar{u}' - \text{div}(p'[E]\bar{u}') + \\ - \text{div} \left(\frac{2}{3} \mu' \text{div} \bar{u}' [E] \bar{u}' - 2\mu' [D]' \bar{u}' \right) + \text{div}(\lambda' \text{grad} T')$$

Konieczne jest wprowadzenie dodatkowych współczynników skal:

$$c' = \alpha_c c \quad T' = \alpha_T T \quad \lambda' = \alpha_\lambda \lambda$$

Warunek równoważności równania zachowania energii w obu skalach prowadzi do warunku:

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_u^2}{\alpha_l} = \frac{\alpha_\rho \alpha_c \alpha_T}{\alpha_t} = \frac{\alpha_\rho \alpha_u^3}{\alpha_l} = \frac{\alpha_\rho \alpha_u \alpha_c \alpha_T}{\alpha_l} = \alpha_\rho \alpha_f \alpha_u = \frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_l} = \frac{\alpha_\mu \alpha_u^2}{\alpha_l^2} = \frac{\alpha_\lambda \alpha_T}{\alpha_l^2}$$

Z powyższego równania wynikają znane już wcześniej liczby Strouhala, Froude'a, Eulera i Reynoldsa oraz dwa nowe kryteria podobieństwa:

Liczba Eckerta:
$$Ec = \frac{u^2}{cT} = \frac{u'^2}{c'T'}$$

Liczba Eckerta wyraża stosunek energii kinetycznej makroskopowego ruchu płynu do energii ruchu molekularnego (energii wewnętrznej) płynu.



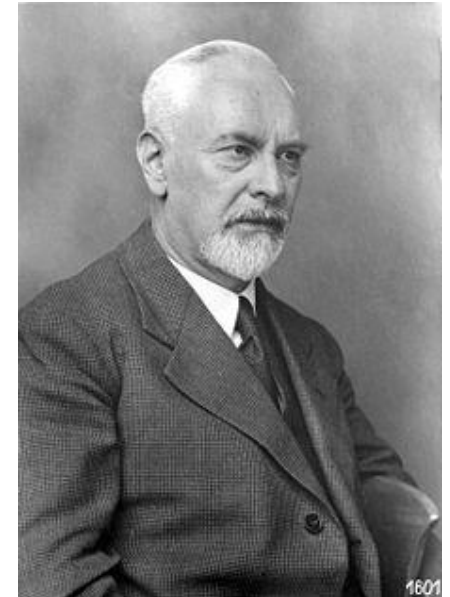
Ernst Eckert 1904 - 2004

Liczba Prandtla:
$$Pr = \frac{c\mu}{\lambda} = \frac{c'\mu'}{\lambda'}$$

**Ludwig Prandtl
1875 - 1953**

Liczba Prandtla wyraża stosunek intensywności transportu pędu płynu do intensywności transportu energii płynu

Liczba Prandtla jest jedyną liczbą kryterialną składającą się tylko ze stałych materiałowych.



Przy wykorzystaniu liczb kryterialnych równanie zachowania energii może być zapisane w postaci bezwymiarowej:

$$\begin{aligned}
 & Sh\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{Sh}{Ec} \rho \frac{\partial}{\partial t} (cT) + \rho(\bar{u} \cdot grad) \frac{u^2}{2} + \frac{1}{Ec} \rho(\bar{u} \cdot grad)(cT) = \\
 & = \frac{1}{Fr} \rho \bar{f} \cdot \bar{u} - Eu \cdot div(\rho[E]\bar{u}) - \frac{1}{Re} div \left(\frac{2}{3} \mu div \bar{u} [E] \bar{u} - 2\mu [D] \bar{u} + \right) \\
 & + \frac{1}{Pr \cdot Re \cdot Ec} div(\lambda grad T)
 \end{aligned}$$

Wszystkie parametry przepływu występujące w powyższym równaniu są odniesione do wartości charakterystycznych tych parametrów.

Analiza wymiarowa równania bilansu entropii

Postać wyjściowa równania bilansu entropii:

$$\rho' \left[\frac{\partial e'}{\partial t'} + \bar{u}' \bullet \text{grade}' \right] = T' \dot{s}'_m + \frac{p'}{\rho'} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \bar{u}' \bullet \text{grad} \rho' \right) + \lambda' \Delta T$$

Równanie bilansu entropii nie wymaga wprowadzenia dodatkowych skal. Wykorzystanie skal już wprowadzonych daje następujący warunek identyczności równań zapisanych w dwóch różnych skalach:

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_c \alpha_T}{\alpha_t} = \frac{\alpha_\rho \alpha_u \alpha_c \alpha_T}{\alpha_l} = \frac{\alpha_\mu \alpha_u^2}{\alpha_l^2} = \frac{\alpha_p}{\alpha_t} = \frac{\alpha_p \alpha_u}{\alpha_l} = \frac{\alpha_\lambda \alpha_T}{\alpha_l^2}$$

Z warunku tego nie wynikają żadne nowe liczby kryterialne.

Równanie bilansu entropii może być przedstawione w postaci bezwymiarowej przy użyciu dotąd wyprowadzonych liczb kryterialnych.

Bezwymiarowa postać równania bilansu entropii:

$$Sh \cdot \rho \frac{\partial}{\partial t} (cT) + \rho (\bar{u} \bullet grad)(cT) = \frac{Ec}{Re} T \dot{s}_m + Eu \cdot Sh \cdot Ec \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} +$$
$$+ Eu \cdot Ec \frac{p}{\rho} (\bar{u} \bullet grad) \rho + \frac{1}{Pr \cdot Re} \lambda \Delta T$$

Podsumowanie

Bezwymiarowa postać równań mechaniki płynów pozwala na łatwą ocenę względnej ważności poszczególnych członów równania w opisie konkretnego przepływu. Mała wartość współczynnika złożonego z liczb kryterialnych może być podstawą do wprowadzenia uproszczenia polegającego na usunięciu danego członu równania. Należy jednak uważać, aby przez takie uproszczenie nie zmieniać rzędu równania. Np. odrzucenie członów lepkościowych w równaniu zachowania energii obniża rząd równania, co uniemożliwi spełnienie warunków brzegowych.

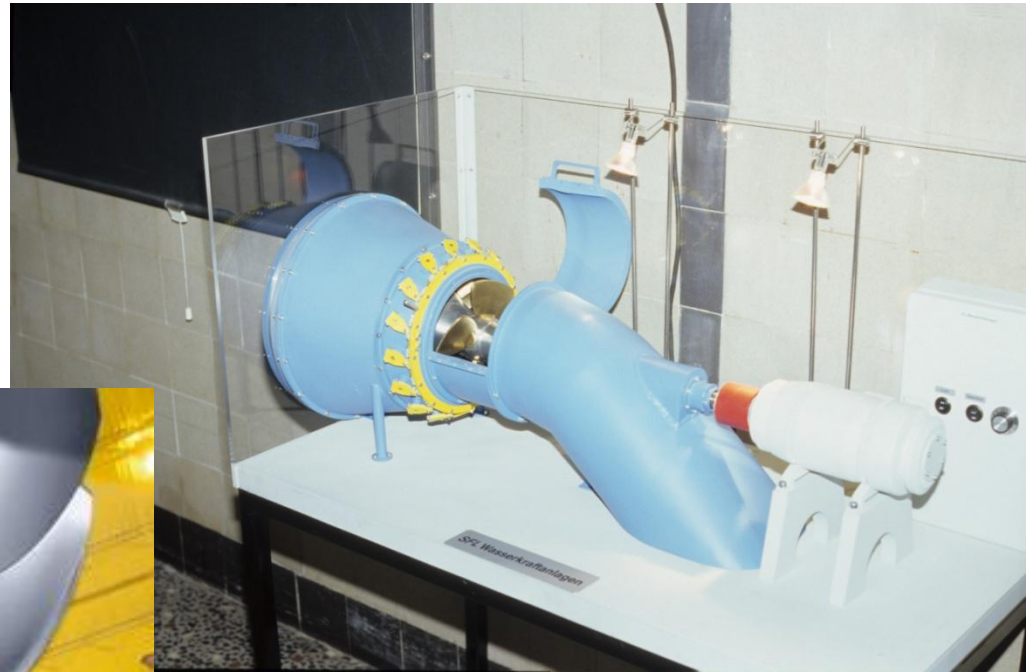
Rozwiązanie układu równań mechaniki płynów w postaci bezwymiarowej ma ogólną postać:

$$F(Sh, Fr, Eu, Re, Ec, Pr) = 0$$

Jeżeli wszystkie liczby kryterialne zawarte w powyższym wzorze mają te same wartości w przepływach o różnych skalach, to znaczy że między tymi przepływami istnieje pełne podobieństwo.

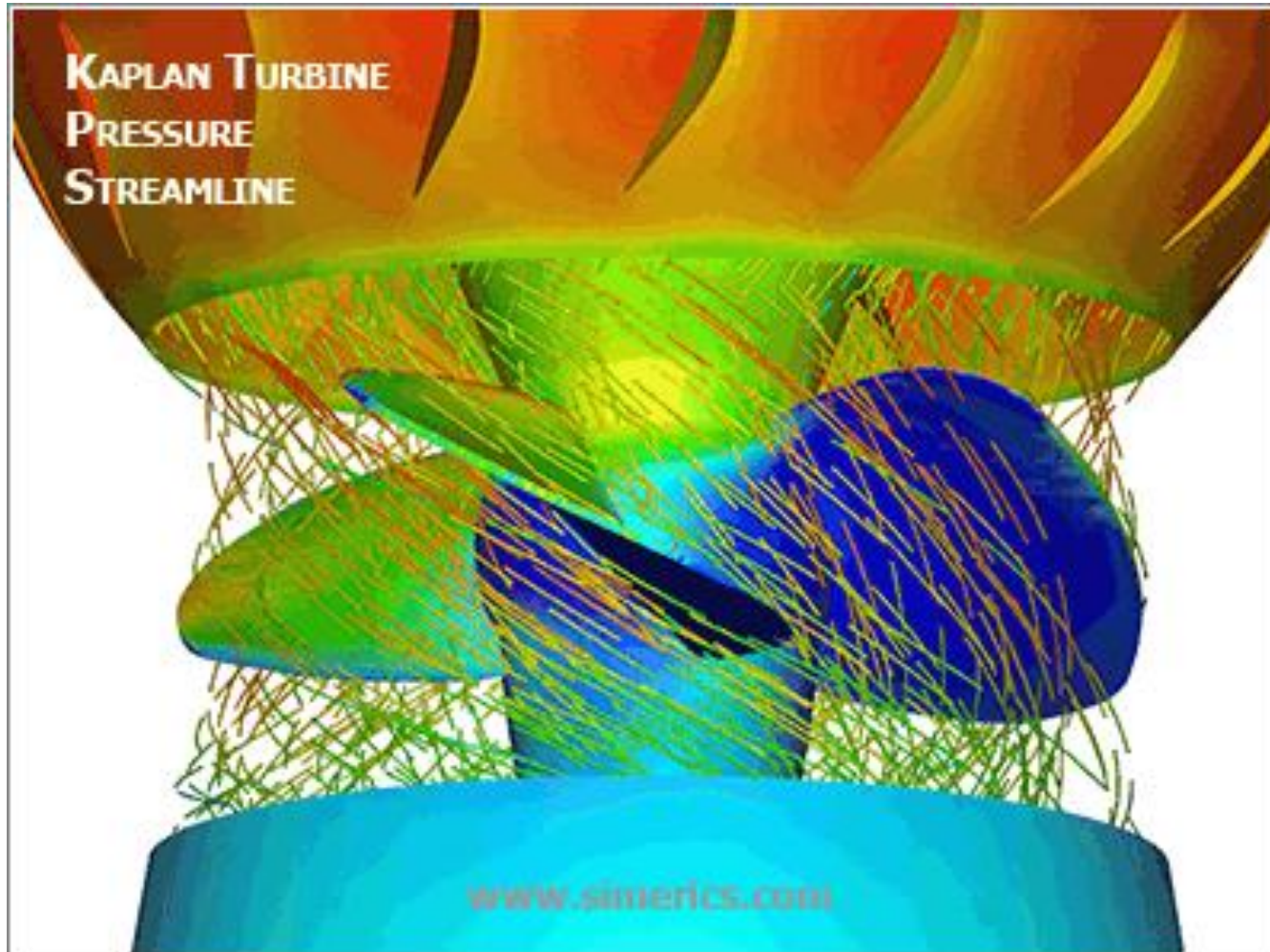
Przykład 3: podobieństwo hydromechaniczne w badaniach modelowych turbiny wodnej Kaplana

Obiekt



Model

Celem obliczeń jest sprawdzenie, czy równość wyróżników szybkości dla modelu i dla obiektu rzeczywistego zapewnia pełne podobieństwo hydromechaniczne



Dane modelu i turbiny rzeczywistej

Model

Turbina rzeczywista

$$D_M = 0,250[m]$$

Średnica wirnika

$$D_T = 6,0[m]$$

$$C_M = 0,06[m]$$

Długość cięciwy
charakterystycznego
przekroju łopaty

$$C_T = 1,44[m]$$

$$H_M = 2,5[m]$$

Spad hydrauliczny

$$H_T = 15,0[m]$$

$$Q_M = 0,074[m^3/s] \quad \left. \vphantom{Q_M} \right\} \text{Przełyk}$$

?

$$n_M = 650,0[1/\text{min}] \quad \text{Prędkość obrotowa}$$

?

$$N_M = 1,5[kW]$$

Moc

?

Obliczenia

Sprawność turbiny modelowej

$$\eta_M = \frac{N_M}{\rho_M \cdot g \cdot Q_M \cdot H_M} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,074 \cdot 2,5} = 0,83$$

Wyróżnik szybkobieżności turbiny modelowej

$$n_{SM} = \frac{n_M \sqrt{N_M}}{H_M \sqrt{H_m}} = \frac{650 \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^3}{735,5}}}{2,5 \sqrt{2,5}} = 235 [1/\text{min}]$$

Sprawność turbiny rzeczywistej (wzór przybliżony Broszki)

$$\eta_T = \eta_M \frac{16 + \frac{1}{\sqrt{D_M}}}{16 + \frac{1}{\sqrt{D_T}}} = 0,83 \frac{16 + \frac{1}{\sqrt{0,25}}}{16 + \frac{1}{\sqrt{6,0}}} = 0,91$$

Moc turbiny rzeczywistej

$$N_T = N_M \cdot \left(\frac{D_T}{D_M} \right)^2 \cdot \frac{H_T \sqrt{H_T}}{H_M \sqrt{H_M}} = 1,5 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{6,0}{0,25} \right)^2 \cdot \frac{15,0 \sqrt{15,0}}{2,5 \sqrt{2,5}} =$$
$$= 12698,0 [kW]$$

Przełyk turbiny rzeczywistej

$$\eta_T = \frac{N_T}{\rho_T \cdot g \cdot Q_T \cdot H_T} \rightarrow Q_T = \frac{N_T}{\eta_T \cdot \rho_T \cdot g \cdot H_T} =$$
$$= \frac{12698,0 \cdot 10^3}{0,91 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 15,0} = 94,8 [m^3/s]$$

Prędkość obrotowa turbiny rzeczywistej w oparciu o założenie równości wyróżników szybkobieżności turbiny modelowej i rzeczywistej

$$n_T = n_M \cdot \sqrt{\frac{N_M}{N_T}} \cdot \frac{H_M \sqrt{H_M}}{H_T \sqrt{H_T}} = 650 \cdot \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^3}{12698,0 \cdot 10^3}} \cdot \frac{15 \sqrt{15}}{2,5 \sqrt{2,5}} = 104 [1/\text{min}]$$

Wyznaczenie parametrów opływu przekroju charakterystycznego turbiny modelowej (na promieniu równym 0,75 promienia wirnika)

Osiowa prędkość przepływu przez turbinę modelową

$$V_{XM} = \frac{4 \cdot Q_M}{\pi \cdot D_M^2} = \frac{4 \cdot 0,074}{3,1415 \cdot 0,25^2} = 1,508 [m/s]$$

Wypadkowa prędkość opływu przekroju łopaty modelu

$$\begin{aligned} V_{RM} &= \sqrt{V_{XM}^2 + \left(\pi \cdot 0,75 \cdot D_m \cdot \frac{n_M}{60} \right)^2} = \\ &= \sqrt{1,508^2 + \left(3,1415 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot \frac{650,0}{60} \right)^2} = 6,557 [m/s] \end{aligned}$$

Liczba Reynoldsa dla przekroju łopaty modelu

$$\text{Re}_M = \frac{V_{RM} \cdot C_M}{\nu} = \frac{6,557 \cdot 0,06}{1,18 \cdot 10^{-6}} = 0,333 \cdot 10^6$$

Współczynnik oporu tarcia dla łopaty modelu

$$C_{FM} = \frac{0,075}{(\log \text{Re}_M - 2)^2} = \frac{0,075}{(\log 333000 - 2)^2} = 0,006045$$

Wyznaczenie parametrów opływu przekroju charakterystycznego łopaty turbiny rzeczywistej

$$V_{XT} = \frac{4Q_T}{\pi \cdot D_T^2} = \frac{4 \cdot 94,8}{3,1415 \cdot 6,0^2} = 3,35 [m/s]$$

$$V_{RT} = \sqrt{V_{XT}^2 + \left(\pi \cdot D_T \cdot 0,75 \cdot \frac{n_T}{60} \right)^2} =$$
$$= \sqrt{3,35^2 + \left(3,1415 \cdot 6,0 \cdot 0,75 \cdot \frac{104,0}{60} \right)^2} = 24,73 [m/s]$$

$$Re_T = \frac{V_{RT} \cdot C_T}{\nu} = \frac{24,73 \cdot 1,44}{1,18 \cdot 10^{-6}} = 30,18 \cdot 10^6$$

$$C_{FT} = \frac{0,075}{(\log Re_T - 2)^2} = \frac{0,075}{(\log 30180000 - 2)^2} = 0,0025$$

Wniosek: w przypadku turbiny wodnej równość współczynników szybkobieżności nie zapewnia pełnego podobieństwa hydrodynamicznego. Występuje efekt skali wynikający z różnicy wartości liczb Reynoldsa dla turbiny modelowej i turbiny rzeczywistej. Konsekwencją tego efektu są niższe współczynniki oporu tarcia na powierzchni łopat turbiny rzeczywistej.