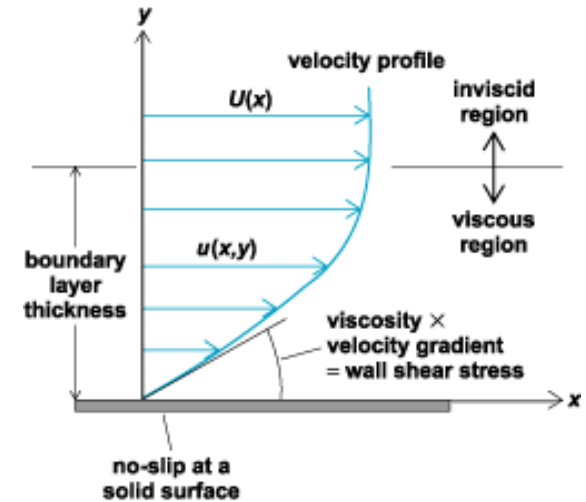
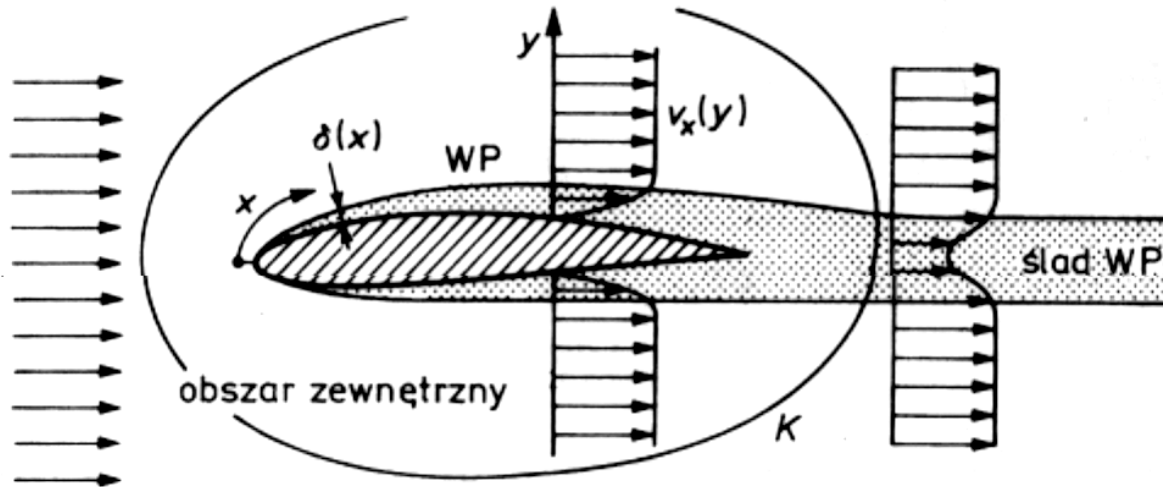


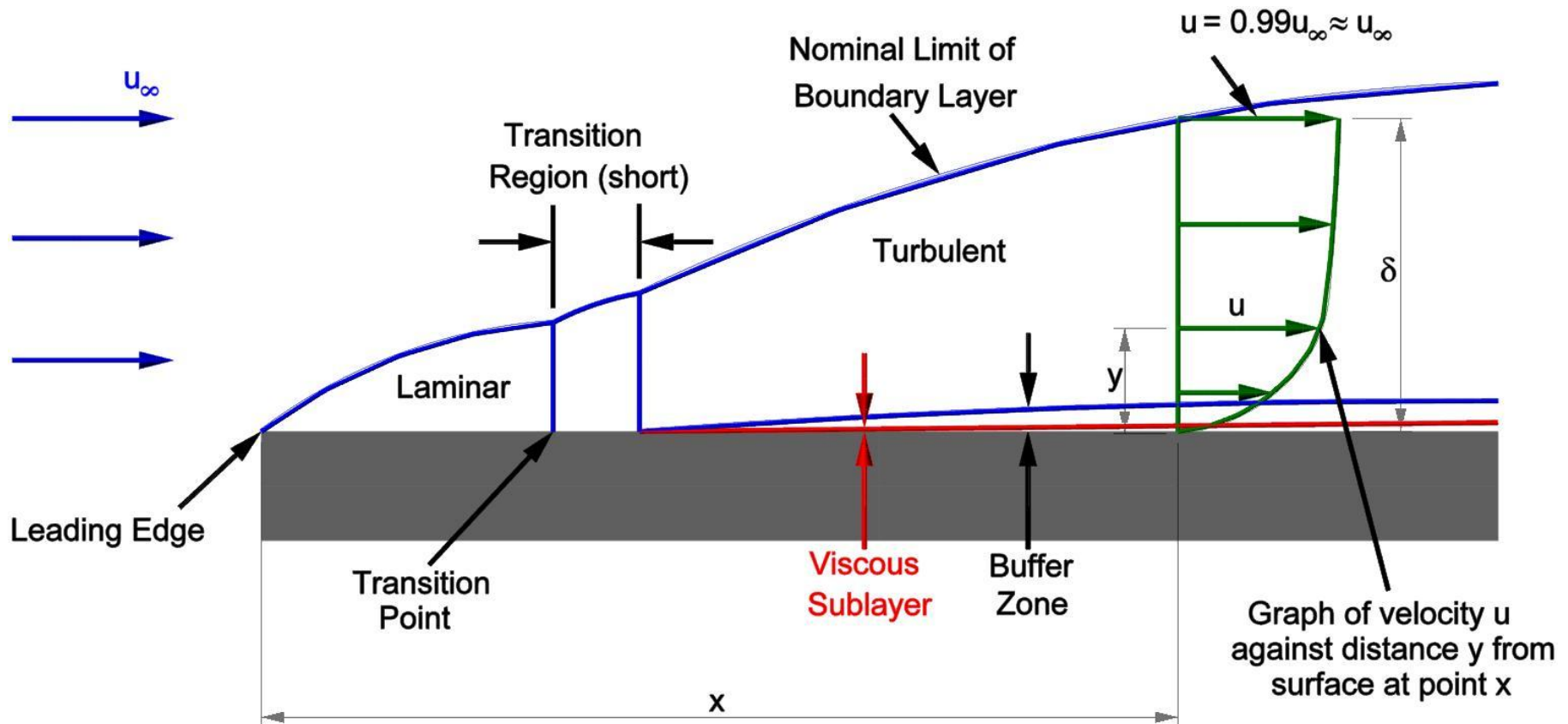
J. Szantyr – Wykład 8 – Warstwy przyścienne i ślady 1

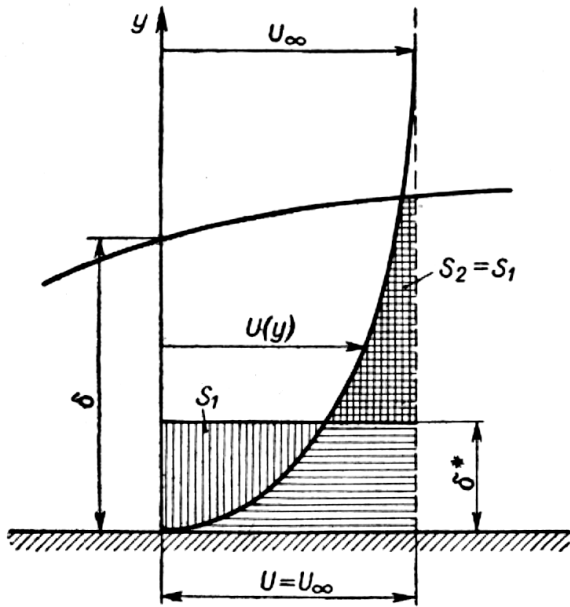


Warstwa przyścienna jest to część obszaru przepływu bezpośrednio sąsiadująca z powierzchnią opływanego ciała. W warstwie przyściennej znaczącą rolę odgrywają siły lepkości i występują tam znaczne poprzeczne gradienty prędkości przepływu. Poza warstwą przyścienną przepływ może być praktycznie uważany za nielepki. Za opływanym ciałem warstwa przechodzi w tzw. ślad.

Przepływ w warstwie może być laminarny lub turbulentny. Umowną grubość warstwy δ określa osiągnięcie prędkości $u_\delta = 0,99u_\infty$

Typowa warstwa przyścienna na ścianie opływanego obiektu składa się ze strefy przepływu laminarnego przy krawędzi natarcia, z rejonu przejściowego i ze strefy turbulentnej. W strefie turbulentnej występuje bardzo cienka podwarstwa lepka przy samej ścianie, dalej od ścianki - rejon przejściowy i dominujący rejon w pełni turbulentny.





Oprócz umownej grubości warstwy przyściennej δ wprowadzono 3 tzw. grubości całkowite. Pierwsza z nich jest miarą straty strumienia masy spowodowanej obecnością warstwy przyściennej:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \right) dy$$

Gdyby przesunąć wszystkie punkty opływanego konturu o δ^* w głąb przepływu, to w przepływie idealnym wokół takiego konturu strumień masy byłby taki sam jak w przepływie rzeczywistym wokół konturu pierwotnego (czyli przy obecności warstwy przyściennej).

Druga grubość całkowita jest miarą straty pędu spowodowanej obecnością warstwy przyściennej i wyraża się wzorem:

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \right) dy$$

Gdyby wszystkie punkty opływanego konturu przesunąć w głąb przepływu o grubość δ^{**} to pęd płynu w przepływie idealnym wokół takiego konturu byłby taki sam jak w przepływie rzeczywistym wokół konturu pierwotnego (czyli przy obecności warstwy przyściennej)

Trzecia grubość całkowita jest miarą straty energii spowodowanej obecnością warstwy przyściennej i wyraża się wzorem:

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \left[1 - \left(\frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \right)^2 \right]$$

Gdyby wszystkie punkty opływanego konturu przesunąć w głąb przepływu o grubość δ^{***} to energia płynu w przepływie idealnym wokół takiego konturu byłaby równa energii płynu w przepływie rzeczywistym wokół konturu pierwotnego (czyli przy obecności warstwy przyściennej).

Laminarna warstwa przyścienna

Ustalony przepływ płynu nieściśliwego w dwuwymiarowej laminarnej warstwie przyściennej opisują **równania Prandtla**, który uprościł równanie Naviera-Stokesa w oparciu o następujące założenia:

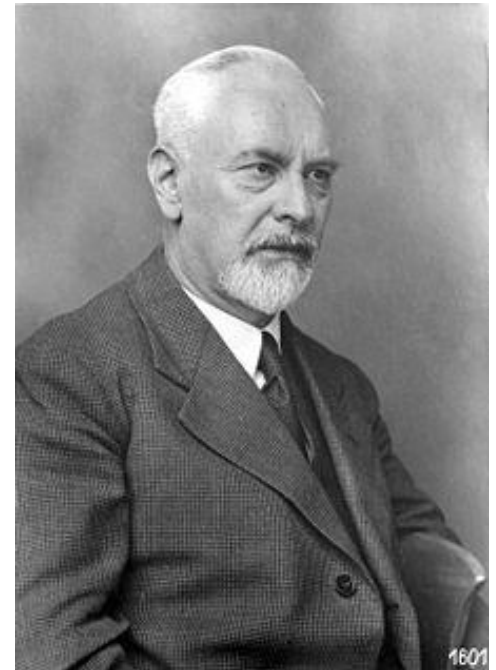
- grubość warstwy jest znacznie mniejsza od długości ściany,
- prędkość normalna do ściany jest znacznie mniejsza od prędkości wzdłużnej na zewnątrz warstwy.

Punktem wyjścia rozważań Prandtla (1875 – 1953) jest równanie zachowania masy i równanie Naviera - Stokesa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$



Ludwig Prandtl

Oszacowanie względnej wielkości poszczególnych wyrazów ww. równań, przeprowadzone w oparciu o przyjęte założenia pozwala uznać niektóre wyrazy za małe i wyeliminować je z dalszych rozważań.

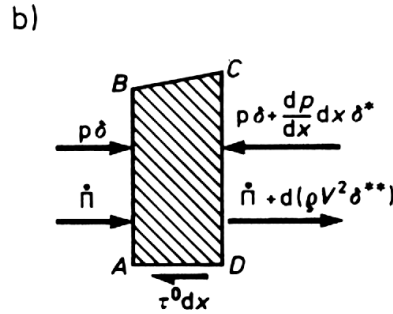
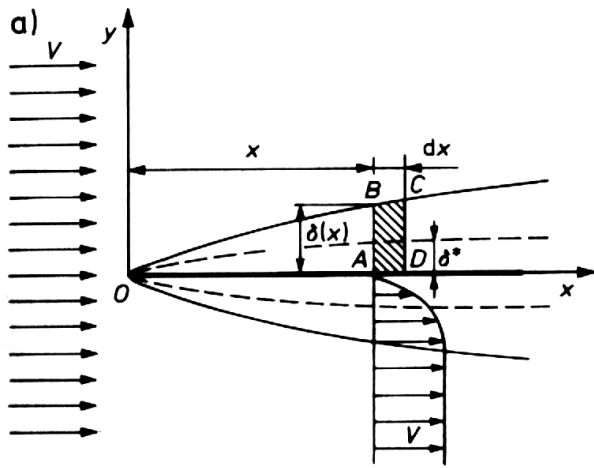
Uproszczenia te prowadzą do następujących równań:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{kierunek x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{kierunek y}$$

Wniosek 1: ciśnienie na powierzchni ściany jest równe ciśnieniu w odpowiadającym punkcie na zewnętrznej granicy warstwy przyściennej.

Wniosek 2: rozkład ciśnienia na zewnętrznej granicy warstwy może być obliczany z równania Bernoulliego (w przypadku przepływu ustalonego).



Równania Prandtla mogą być rozwiązane analitycznie dla ustalonego opływu płaskiej płyty (bez gradientu ciśnienia wzdłuż płyty) – por. rys. a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{równanie zachowania masy}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{równanie zachowania pędu}$$

Warunki brzegowe: $u \rightarrow u_{\infty}$ przy $y \rightarrow \infty$

$u = v = 0$ przy $y = 0$

Rozwiązanie prowadzi do praktycznie użytecznych zależności:

Grubość laminarnej warstwy przyściennej na płycie:

$$\delta(x) = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \rightarrow \frac{\delta(x)}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

gdzie: $\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$

Współczynnik oporu tarcia na powierzchni płyty:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}} \rightarrow R_f = C_f \cdot \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 S$$

gdzie: $\text{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}$

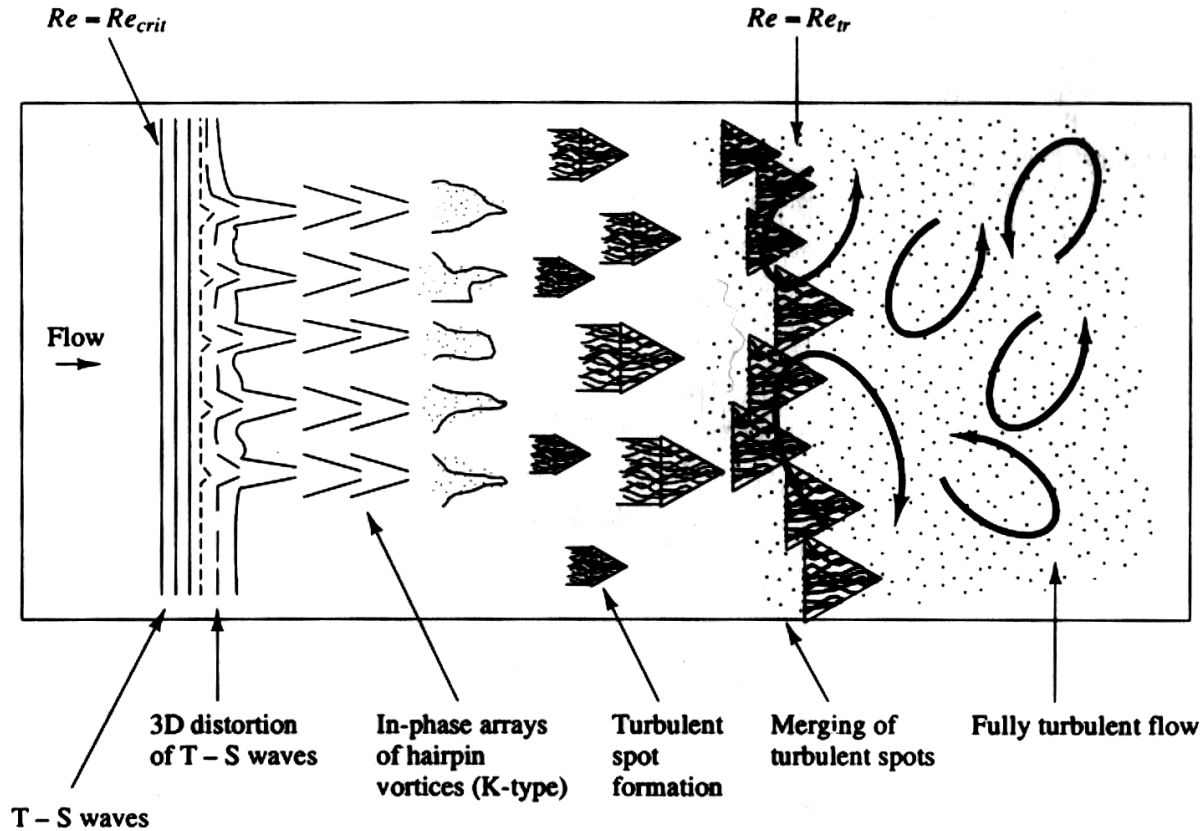
gdzie: R_f - opór tarcia płyty o powierzchni S (obie strony!)

Profil prędkości wewnątrz warstwy:

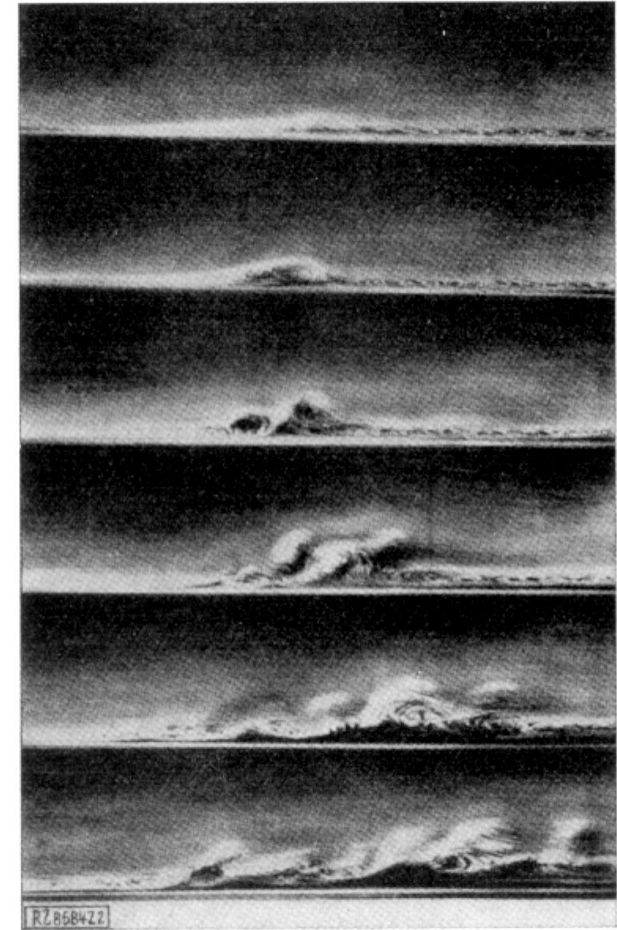
$$u(y) = u_\infty \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]$$

Ponadto można stwierdzić, że: $\delta^* \approx 0,33\delta$

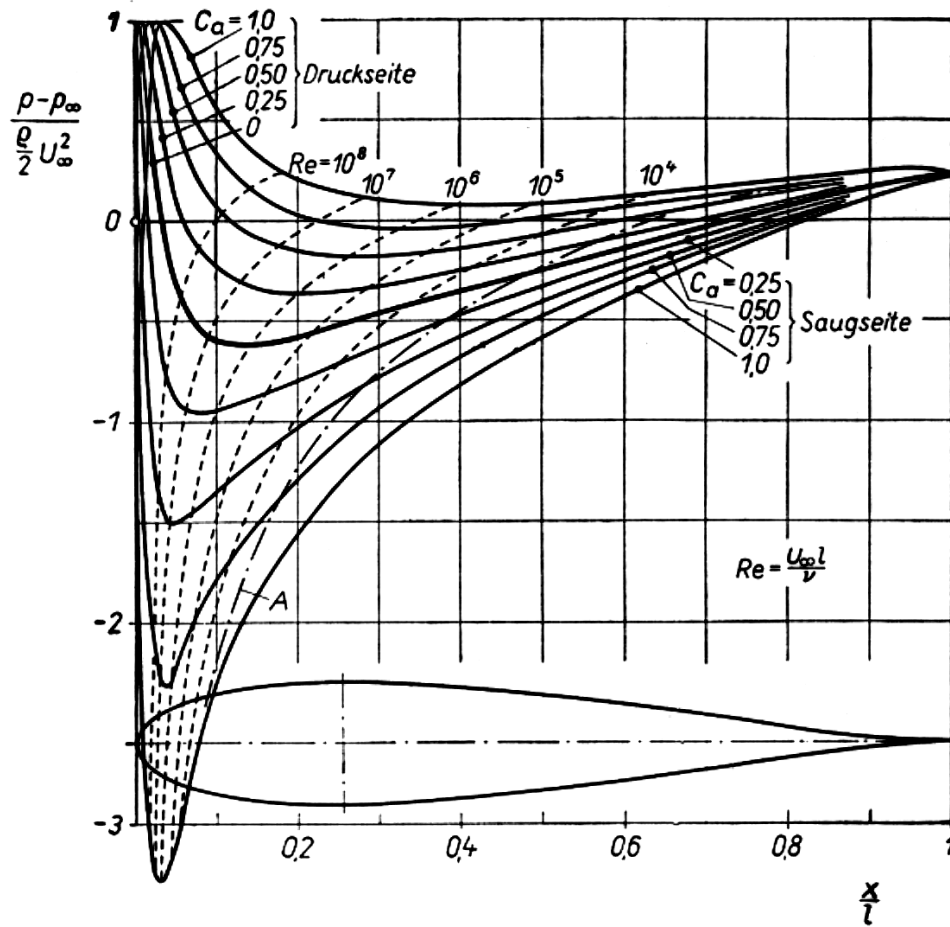
Powiększanie liczby Reynoldsa prowadzi do utraty stabilności laminarnej warstwy przyściennej i do stopniowego rozwoju turbulencji aż do wystąpienia w pełni rozwiniętej turbulentnej warstwy przyściennej



Schemat procesu turbulizacji warstwy przyściennej.



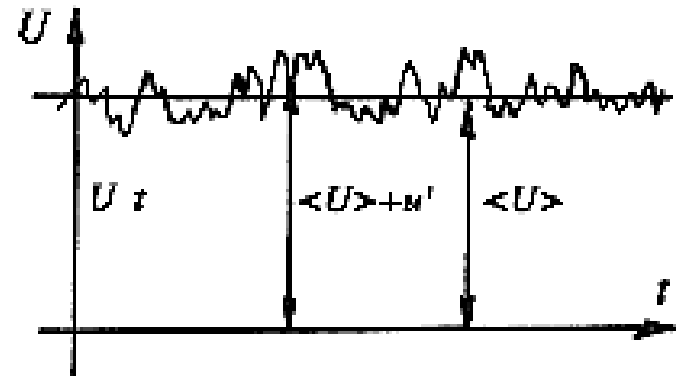
Wizualizacja procesu powstawania turbulencji



Położenie punktu przejścia laminarnej warstwy przyściennej w turbulentną zależy zarówno od liczby Reynoldsa jak i od gradientu ciśnienia wzdłuż warstwy. Rysunek pokazuje to zjawisko na symetrycznym profilu ustawianym pod różnymi kątami natarcia, co zmienia gradient ciśnienia. Linie przerywane pokazują położenie punktów przejścia laminarno-turbulentnego przy różnych wartościach liczby Reynoldsa

Turbulentna warstwa przyścienna

Równania analogiczne do równań Prandtla dla dwuwymiarowej turbulentnej warstwy przyściennej można wyprowadzić z równań Reynoldsa, traktując wszystkie parametry opisujące ruch płynu jako efekt superpozycji ich wartości średnich (wolnozmiennych) i fluktuacji turbulentnych.



$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{równanie zachowania masy}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (u'v') - \frac{\partial}{\partial x} (u'^2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u'v') - \frac{\partial}{\partial y} (v'^2)$$

Przeprowadzenie podobnego oszacowania wielkości poszczególnych wyrazów powyższych równań pozwala na wprowadzenie uproszczeń (pominięcie wyrazów względnie małych), co ostatecznie daje równania opisujące przepływ w turbulentnej warstwie przyściennej:

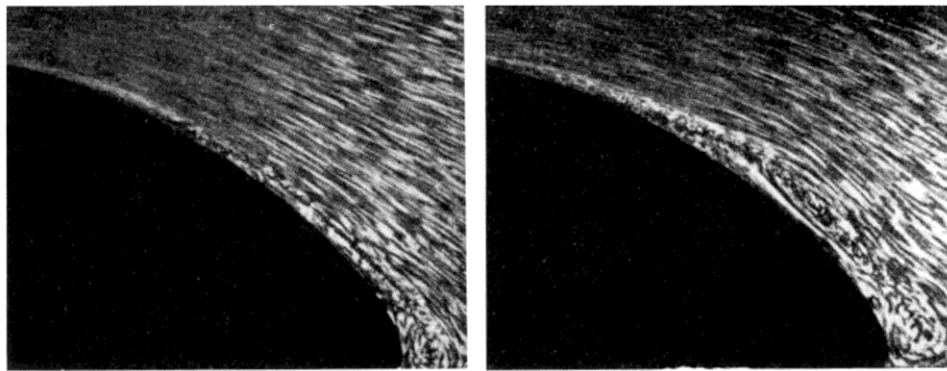
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (u'v')$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

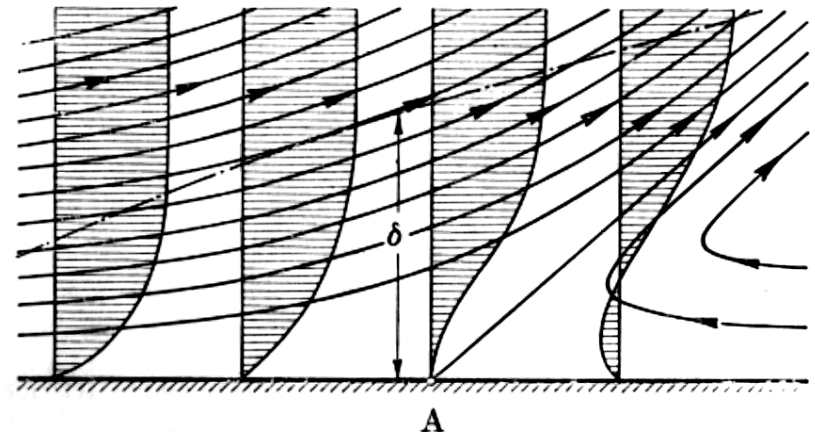
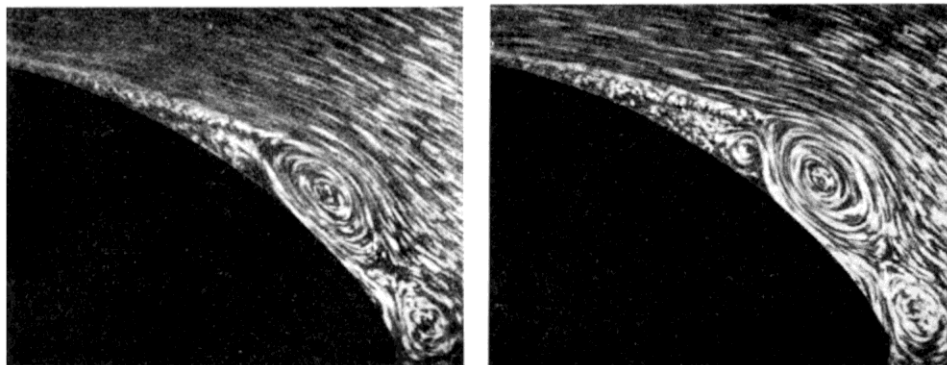
Podobnie jak w przypadku laminarnej warstwy przyściennej **średnie ciśnienie** pozostaje stałe w poprzek warstwy. Człon turbulentnych naprężeń Reynoldsa wymaga zastosowanie odpowiedniego **modelu turbulencji** dla zamknięcia powyższego układu równań.

Wystąpienie **dodatniego gradientu ciśnienia wzdłuż warstwy przyściennej** (czyli wzrostu ciśnienia w kierunku przepływu), może prowadzić do tzw. oderwania warstwy przyściennej. Mechanizm wyjaśnia rys b) na slajdzie 4. Element płynu przy samej ścianie jest hamowany siłami lepkości i siłami ciśnienia, co powoduje jego zatrzymanie, a następnie ruch w kierunku przeciwnym do przepływu.



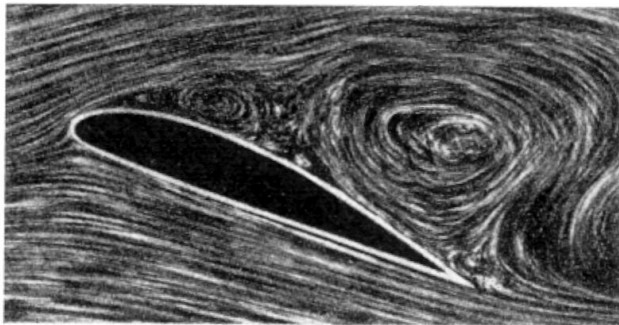
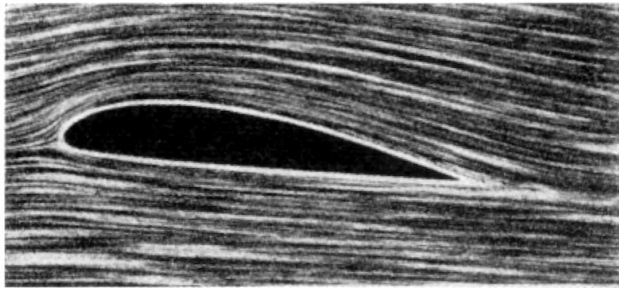
W punkcie oderwania A mamy: $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$

Ponadto zeruje się tam napężenie lepkościowe na ścianie $\tau_w = 0$

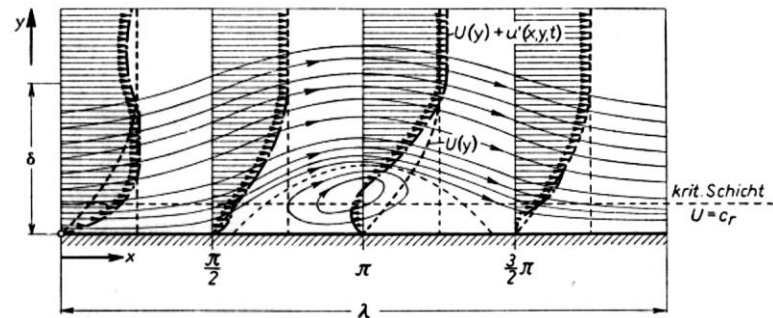


Rozwój oderwania w czasie

Oderwanie może wystąpić zarówno w laminarnej jak i w turbulentnej warstwie przyściennej (w turbulentnej występuje później, czyli przy wyższym dodatnim gradiencie ciśnienia). Oderwanie warstwy przyściennej jest zjawiskiem niekorzystnym, zakłóca pracę maszyn i urządzeń przepływowych oraz obniża ich sprawność. Maszyny i urządzenia przepływowe powinny być projektowane w taki sposób, aby unikać oderwania przepływu przynajmniej w ich projektowych warunkach pracy.



Pęcherz oderwaniowy



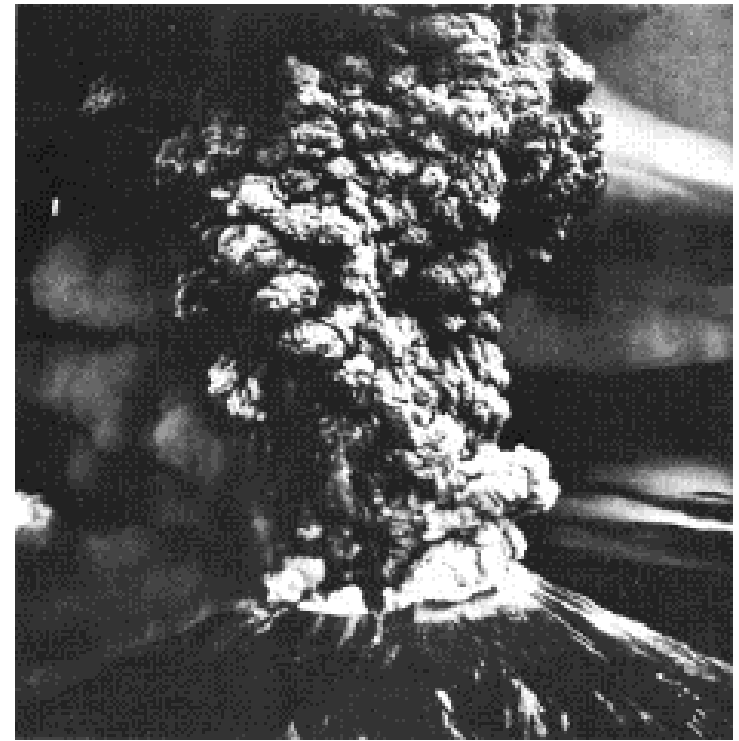
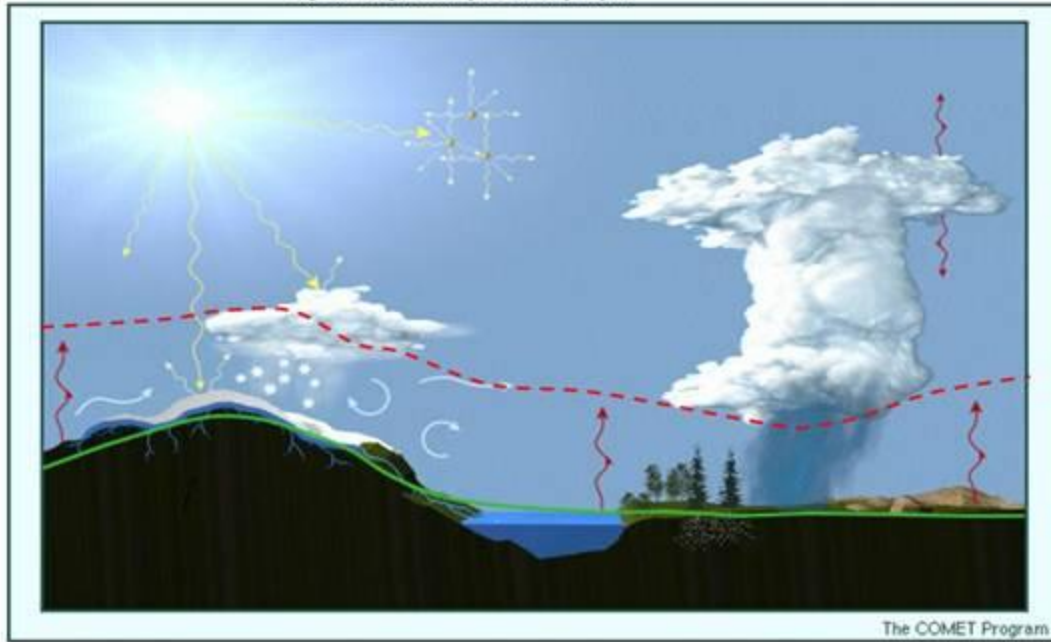
<Oderwanie warstwy przyściennej na profilu lotniczym przy dużym kącie natarcia (rysunek dolny)

Przykłady przepływów laminarnych i turbulentnych w warstwach przyściennych i śladach



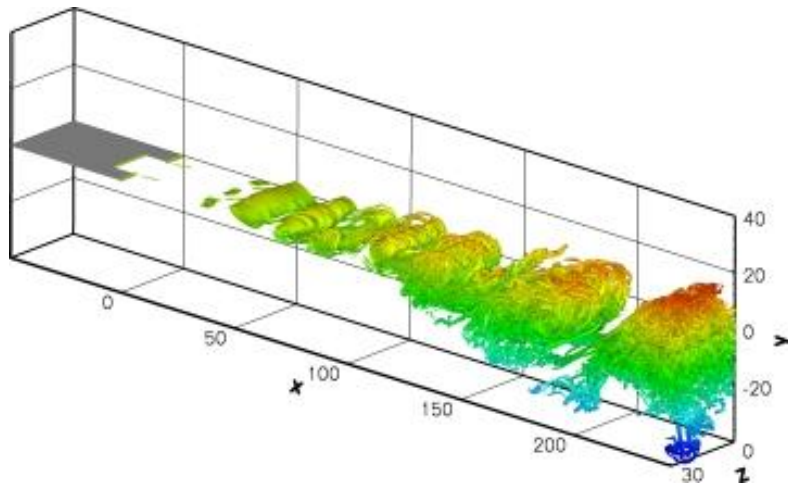
Depiction of various surfaces and PBL processes

--- Top of the planetary boundary layer



Warstwa przyścienna w atmosferze Ziemi

Wpływ turbulentny z
krateru wulkanu



<- Ślad turbulentny za płaską płytą
obliczony metodą LES (Large Eddy
Simulation)

Przykład

Cienka płaska płyta o wymiarach 0.1×0.5 [m] została umieszczona z zerowym kątem natarcia w przepływie wody o prędkości 0.1 [m/s]. Wyznaczyć opór tarcia płyty w dwóch przypadkach: a) gdy dłuższy bok jest prostopadły do kierunku prędkości, b) gdy krótszy bok jest prostopadły do prędkości.

Dane: kinematyczny współczynnik lepkości $\nu = 0,000001$ [m^2 / s]
gęstość wody $\rho = 1000$ [kg / m^3]

Przypadek a

$$Re = \frac{u \cdot L}{\nu} = \frac{0,1 \cdot 0,1}{0,000001} = 10000 \quad C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} = \frac{1,328}{\sqrt{10000}} = 0,01328$$

$$R_f = C_f \frac{1}{2} \rho u^2 S = 0,01328 \cdot 0,5 \cdot 1000,0 \cdot 0,1^2 \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 0,5 = 0,00664 [N]$$

Przypadek b

$$\text{Re} = \frac{u \cdot L}{\nu} = \frac{0,1 \cdot 0,5}{0,000001} = 50000$$

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}} = \frac{1,328}{\sqrt{50000}} = 0,00593$$

$$R_f = C_f \frac{1}{2} \rho u^2 S = 0,00593 \cdot 0,5 \cdot 1000,0 \cdot 0,1^2 \cdot 0,1 = 0,00297[N]$$

Wniosek: zmiana ustawienia płytki względem przepływu, przy zachowaniu pozostałych parametrów, może spowodować **ponad dwukrotną zmianę oporu tarcia**