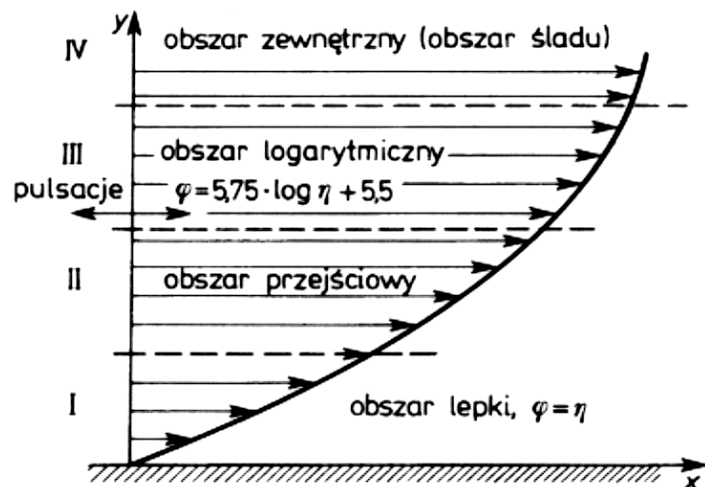


## J. Szantyr – Wykład 9 – Warstwy przyścienne i ślady 2



W turbulentnej warstwie przyściennej można wydzielić kilka stref różniących się dominującymi mechanizmami kształtującymi przepływ.

Ogólnie warstwę można podzielić na obszar wewnętrzny o grubości około  $0,2\delta$  oraz obszar zewnętrzny. W obszarze zewnętrznym dominują siły bezwładności. Obszar wewnętrzny dzieli się na podwarstwę lepką o grubości około  $0,02\delta$ , gdzie siły lepkości i bezwładności są podobnego rzędu i funkcjonuje przede wszystkim lepkościowy mechanizm wymiany pędu i energii, oraz obszar przejściowy i „logarytmiczny”, gdzie dominują naprężenia turbulentne i turbulentny mechanizm wymiany masy, pędu i energii.

Theodore von Karman (1881 – 1963) wprowadził do opisu przepływu w warstwie przyściennej bezwymiarową prędkość przepływu i bezwymiarową odległość od ściany:

$$y^+ = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu} \quad \text{bezwymiarowa odległość od ściany}$$

gdzie:  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad \text{bezwymiarowa prędkość przepływu}$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość płynu

$\nu$  - kinematyczny współczynnik lepkości płynu

$\tau_w$  - naprężenia lepkościowe na ścianie

W podwarstwie lepkiej mamy wtedy:  $u^+ = \varphi = y^+ = \eta$

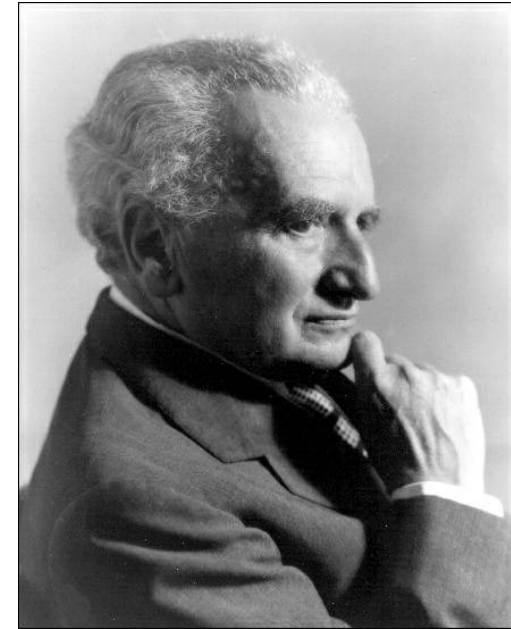
W obszarze „logarytmicznym” mamy wtedy:  $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$

Von Karman pierwotnie ustalił eksperymentalnie wartości stałych:

$$\kappa = 0,41$$

$$C \approx 5,0 \quad (\text{dla ścian gładkich})$$

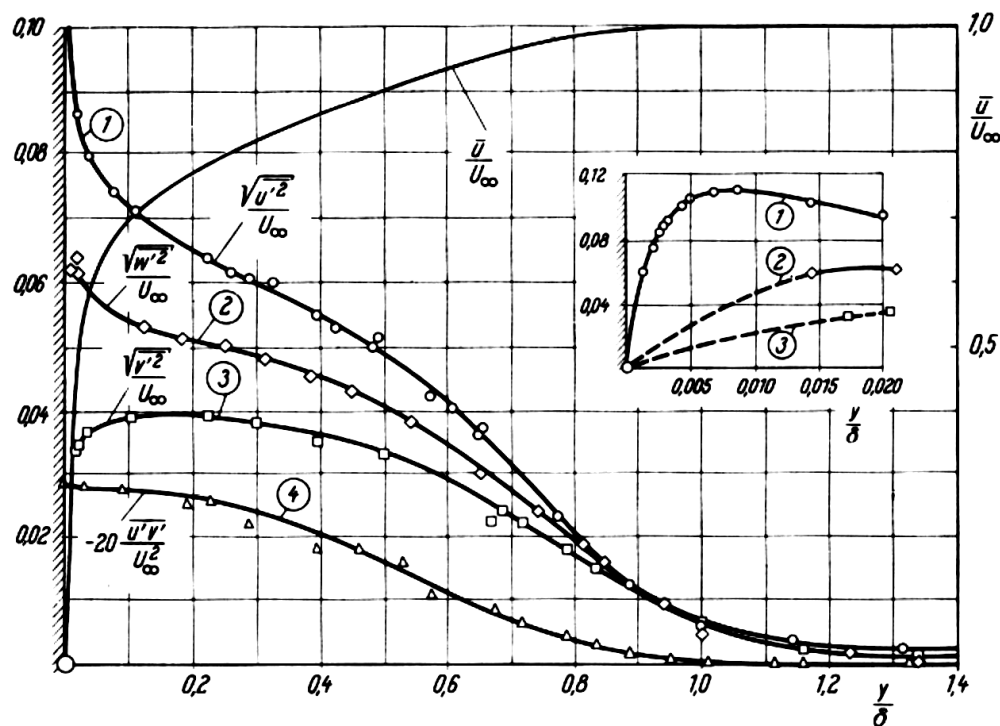
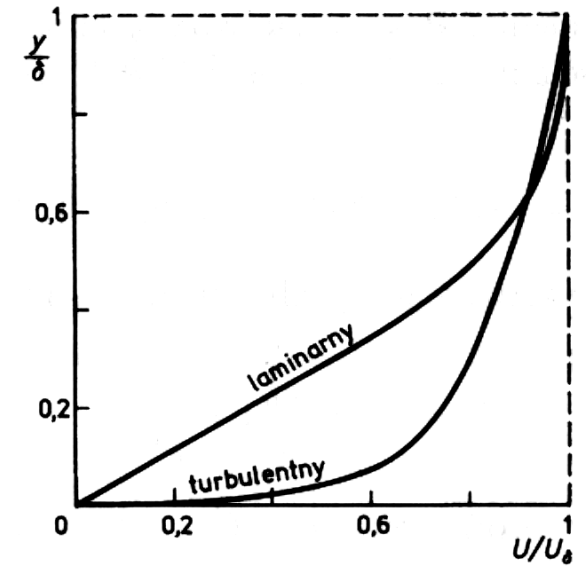
W obszarze przejściowym żadna z powyższych relacji nie zgadza się z rzeczywistością. Graniczną wartością bezwymiarowej odległości od ściany jest:  $y^+ = 11,0$



**Theodore von Karman**  
1881 - 1963

Poniżej tej wartości lepiej oddaje rzeczywistość wzór dla podwarstwy lepkiej, powyżej tej wartości – wzór logarytmiczny. Powyższe zależności są podstawą tzw. prawa ściany, używanego do korygowania stosowanych w obliczeniach numerycznych modeli turbulencji w obszarze bezpośrednio przylegającym do opływanych obiektów.

Na skutek łącznego działania lepkościowego i turbulentnego mechanizmu wymiany pędu profil prędkości w warstwie turbulentnej jest „pełniejszy” niż w warstwie laminarnej.



W turbulentnej warstwie przyściennej występują silne trójwymiarowe fluktuacje prędkości, które osiągają maksimum w pobliżu ściany, czyli w obszarze maksymalnego gradientu prędkości średniej.

Na drodze teoretyczno-empirycznej wyprowadzono szereg praktycznie użytecznych wzorów:

$$\delta_{turb} = \frac{0,37 \cdot L}{\sqrt[5]{Re}}$$

$$C_{fturb} = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} \quad \text{dla liczb Reynoldsa} \quad 5 \cdot 10^5 < Re < 10^6$$

$$C_{fturb} = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} - \frac{A}{Re} \quad \text{dla} \quad 3 \cdot 10^5 < Re < 10^9$$

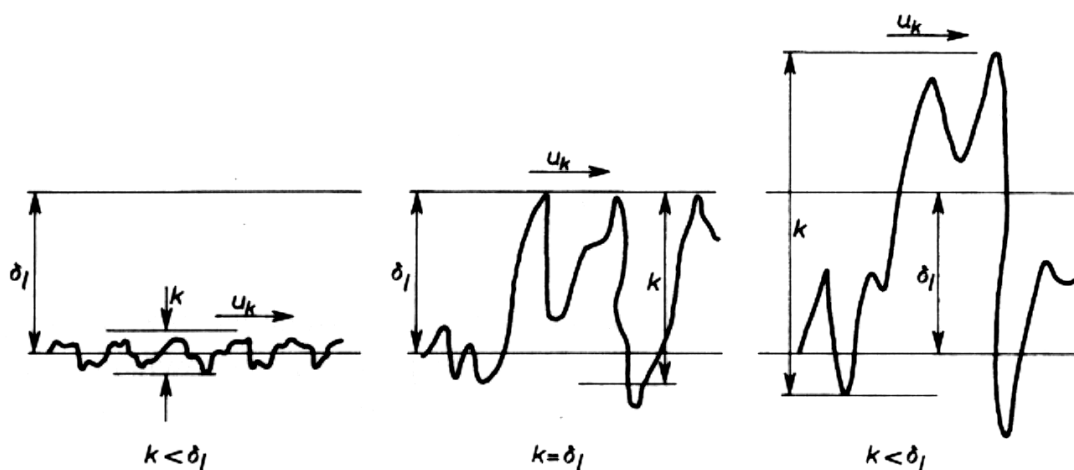
gdzie stałą A określa się na podstawie (górnej) wartości krytycznej liczby Reynoldsa według tabeli:

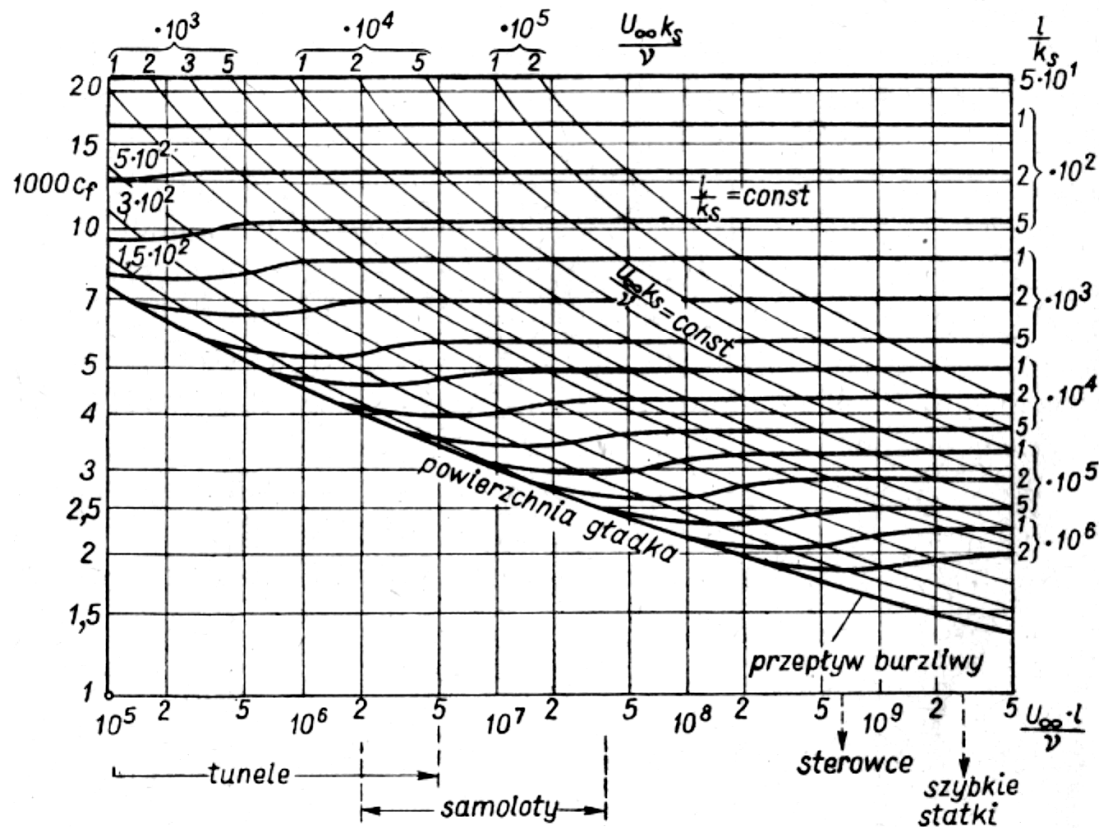
$Re_{kryt}$	A
$3 \cdot 10^5$	1050
$5 \cdot 10^5$	1700
$10^6$	3300
$5 \cdot 10^6$	5700

Podane wyżej wzory na współczynnik tarcia obowiązują dla ściany gładkiej. W przepływie turbulentnym współczynnik ten zależy również od chropowatości ściany

Miarą chropowatości powierzchni jest średnia wysokość chropowatości  $k_s$

Z punktu widzenia oporu tarcia istotna jest relacja średniej wysokości chropowatości do grubości podwarstwy lepkiej w turbulentnej warstwie przyściennej. Jeżeli chropowatość mieści się w tej podwarstwie, to chropowatość nie wywołuje zmiany profilu prędkości w warstwie i nie wpływa na opór tarcia - powierzchnię nazywamy hydrodynamicznie gładką. Natomiast jeżeli wysokość chropowatości wykracza poza tę podwarstwę, to jej obecność zmienia profil prędkości w warstwie i wpływa na wzrost oporu tarcia.





Wykres pokazuje zależność współczynnika oporu tarcia od odwrotności chropowatości względnej (czyli odniesionej do charakterystycznego wymiaru liniowego  $L$ ). Naniesiono również liczby Reynoldsa oparte na wysokości chropowatości.

Istnieją zależności empiryczne pozwalające wyznaczyć współczynnik oporu tarcia na powierzchni chropowatej w turbulentnej warstwie przyściennej, np.:

$$C_{fchrop} = C_{fturb} + \Delta C_f$$

gdzie:

$$\Delta C_f = \left( 1,89 + 1,62 \log \frac{l}{k_s} \right)^{-2,5} \quad \text{przy} \quad 10^2 < \frac{l}{k_s} < 10^6$$

## Przykład 1

Cienką płytę o wymiarach 1,0\*1,0 [m] umieszczono pod zerowym kątem natarcia w przepływie wody o prędkości 10 [m/s]. Wyznaczyć wielkość oporu tarcia w dwóch przypadkach: a) dla płyty gładkiej, b) dla płyty o chropowatości względnej 0,0001.

**Dane:** współczynnik lepkości kinematycznej  $\nu=0,000001 \left[ \frac{m^2}{s} \right]$   
gęstość wody  $\rho=1000,0 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$

### Przypadek a

$$Re = \frac{uL}{\nu} = \frac{10,0 \cdot 1,0}{0,000001} = 10000000$$

Wysoka wartość liczby Reynoldsa wymaga wykorzystania bardziej złożonego wzoru

$$C_{fturb} = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} - \frac{A}{Re} = \frac{0,455}{(\log 10^7)^{2,58}} - \frac{1050}{10^7} = 0,00263$$



$$R_{fturb} = C_{fturb} \frac{1}{2} \rho u^2 S = 0,00264 \cdot 0,5 \cdot 1000,0 \cdot 10,0^2 \cdot 2,0 = 264[N]$$

## Przypadek b

$$\Delta C_f = (1,89 + 1,62 \log 10000)^{-2,5} = 0,00494$$

$$C_{fchrop} = C_{fturb} + \Delta C_f = 0,00264 + 0,00494 = 0,00758$$

$$R_{fchrop} = C_{fchrop} \frac{1}{2} \rho u^2 S = 0,00758 \cdot 0,5 \cdot 1000,0 \cdot 10,0^2 \cdot 2,0 = 758[N]$$

**Wniosek:** chropowatość powierzchni ma poważny wpływ na wielkość oporu tarcia w turbulentnej warstwie przyściennej i może doprowadzić do nawet kilkukrotnego wzrostu oporu w stosunku do powierzchni gładkiej.

## Przykład 2

Na płycie o długości  $L=1$  [m] w przepływie przy  $Re=100000$  występuje alternatywnie laminarna i turbulentna warstwa przyścienna. Jakie są grubości obu typów warstwy na końcu płyty?

Warstwa laminarna: 
$$\delta_{lam} = \frac{5L}{\sqrt{Re}} = \frac{5 \cdot 1}{\sqrt{100000}} = 0,0158[m]$$

Warstwa turbulentna: 
$$\delta_{turb} = \frac{0,37L}{\sqrt[5]{Re}} = \frac{0,37 \cdot 1}{\sqrt[5]{10^5}} = 0,037[m]$$

**Wniosek:** przy porównywalnych warunkach przepływu turbulentna warstwa przyścienna jest ponad dwukrotnie grubsza od warstwy laminarnej. Jest to konsekwencją bardziej intensywnej wymiany pędu i energii płynu w warstwie turbulentnej.

## Temperaturowa warstwa przyścienna

W niektórych problemach (np. w wymiennikach ciepła) istotne jest wyznaczenie rozkładu temperatury w warstwie przyściennej. Przy założeniu, że przepływ jest stacjonarny i liczba Reynoldsa jest większa od 1000, można wyprowadzić zależność:

$$\theta = \frac{T_w - T(y)}{T_w - T_\infty} = \frac{u(y)}{u_\infty} \quad \text{przy} \quad \text{Pr} = \frac{c\mu}{\lambda} = 1,0 \quad (\text{liczba Prandtla})$$

gdzie:

- $\theta$  – bezwymiarowa temperatura
- $T_w$  - temperatura na ścianie
- $T_\infty$  - temperatura daleko od ściany

Jeżeli w przepływie stacjonarnym liczba Prandtla jest równa 1, to profil bezwymiarowej temperatury  $\theta$  w warstwie przyściennej jest identyczny z profilem bezwymiarowej prędkości. Przy  $\text{Pr} > 1$  gradient temperatury w wewnętrznym obszarze warstwy jest większy od gradientu prędkości, a przy  $\text{Pr} < 1$  – mniejszy.