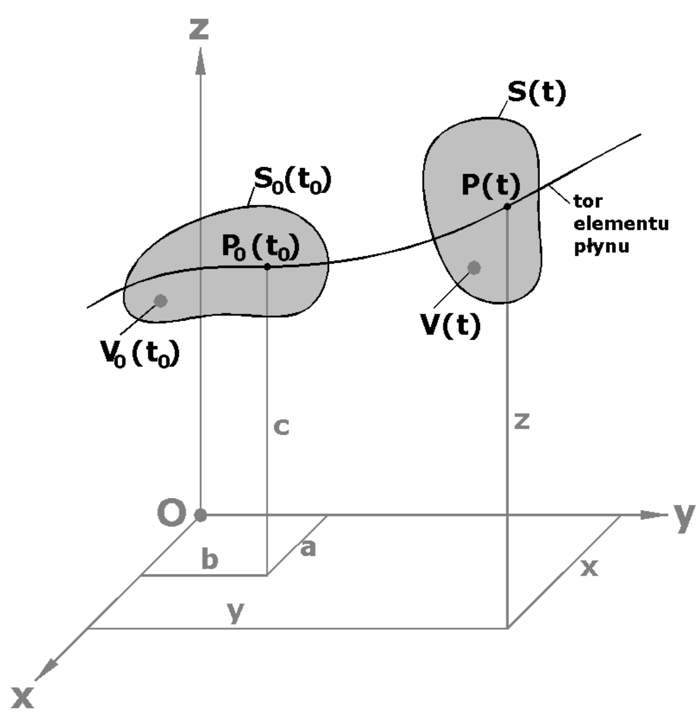
J. Szantyr - Wykład 1: Repetytorium z kinematyki i dynamiki przepływów

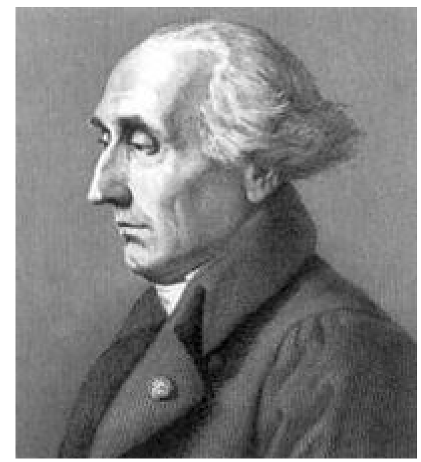
Metody opisu ruchu plynu

Podejście Lagrange'a (inaczej metoda wędrowna) polega na opisywaniu ruchu w przestrzeni pewnej wydzielonej masy płynu składającej się zawsze z tych samych molekuł.



V - objętość pewnej masy płynu (objętość płynna) otoczona powierzchnią S, która jest nieprzenikliwa dla elementów płynu

Masa płynu przemieszcza się od położenia V_0 w chwili t_0 do położenia V w chwili t.



Joseph Lagrange
1736 - 1813

Element płynu *P* stanowiący część objętości *V* przemieszcza zakreślając w przestrzeni tor elementu, który może być opisany równaniami parametrycznymi z czasem *t* jako parametrem:

$$x = x(a, b, c, t)$$

$$y = y(a, b, c, t)$$

$$z = z(a, b, c, t)$$

Zmieniając w równaniach wielkości *a, b* i *c* opisujemy coraz to inne elementy płynu

Wielkości opisujące ruch płynu są w taki sam sposób zależne od *a, b, c, t*:

$$\bar{u} = \bar{u}(a, b, c, t)$$

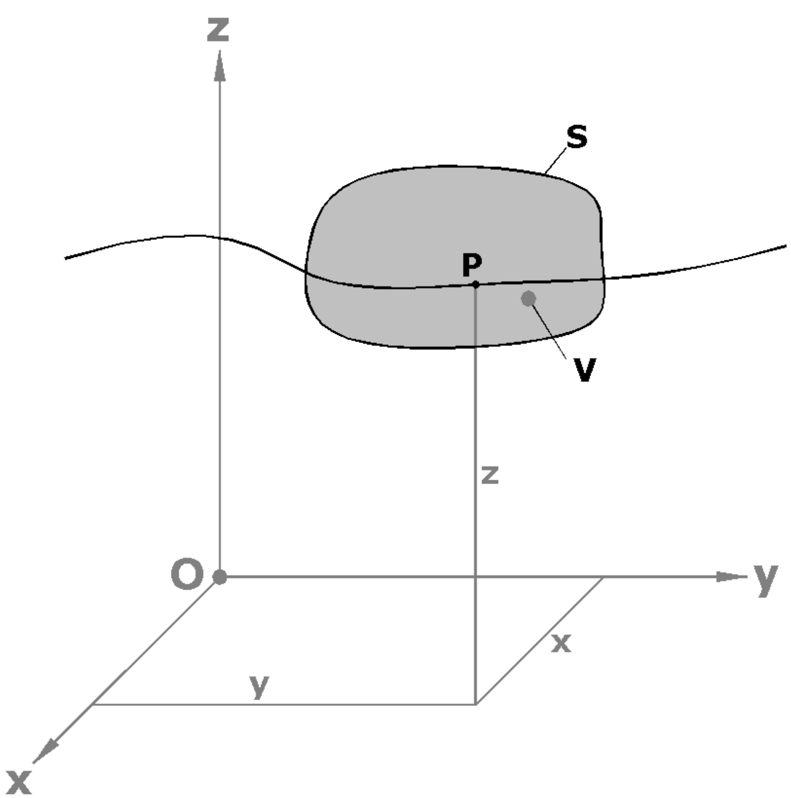
gdzie: $\bar{u} = \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w$

$$p = p(a, b, c, t)$$

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

$$\rho = \rho(a, b, c, t)$$

Metoda Euler'a (metoda lokalna) polega na wybraniu w przestrzeni nieruchomej objętości kontrolnej *V* ograniczonej powierzchnią kontrolną *S*. Przez tę objętość przepływają kolejno <u>różne elementy płynu</u> z różnymi wartościami takich wielkości jak prędkość, ciśnienie, gęstość itd. Przedmiotem opisu są wartości tych wielkości w wybranych punktach objętości kontrolnej.



$$\bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

gdzie:

$$\bar{u} = \bar{i}\,u_x(x, y, z, t) + \bar{j}u_y(x, y, z, t) + \bar{k}u_z(x, y, z, t)$$

Leonhard Euler
1707 - 1783

Pochodna materialna (substancjalna)

Pochodna materialna jest szczególną interpretacją pochodnej funkcji wielu zmiennych, związaną z eulerowskim sposobem opisu ruchu płynu. Pokazuje ona, w jaki sposób zmienia się w czasie dowolny parametr charakteryzujący element płynu poruszający się w polu tego parametru. Wyjaśnimy to na przykładzie dowolnego parametru skalarnego H, będącego jawną i złożoną funkcją czasu. Jeżeli H jest funkcja zmiennych Eulera to mamy:

$$H = H\left(t, x(t), y(t), z(t)\right)$$

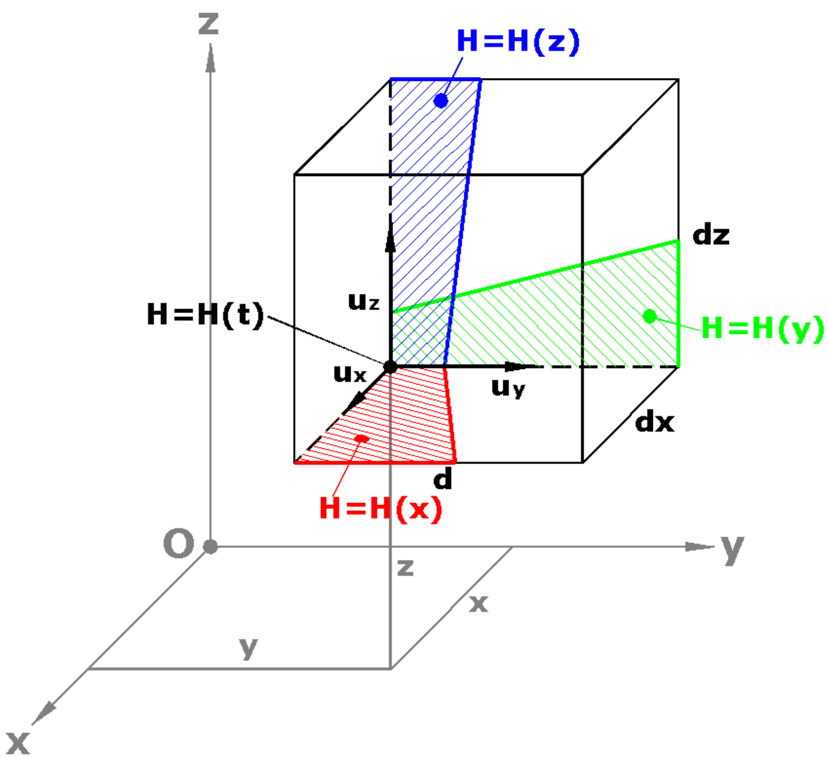
Zgodnie z definicją różniczki zupełnej funkcji wielu zmiennych mamy:

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Ale mamy: $\dfrac{dx}{dt} = u_x \quad \dfrac{dy}{dt} = u_y \quad \dfrac{dz}{dt} = u_z$ co prowadzi do:

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}u_x + \frac{\partial H}{\partial y}u_y + \frac{\partial H}{\partial z}u_z = \frac{\partial H}{\partial t} + \overline{u} \bullet \nabla H = \frac{\partial H}{\partial t} + \overline{u} \bullet gradH$$

Pochodna materialna=pochodna lokalna+pochodna unoszenia



Pochodna lokalna pokazuje zmianę parametru *H* w czasie w punkcie *(x, y, z)* wynikającą z niestacjonarności pola *H*.

Pochodna unoszenia pokazuje zmianę parametru *H* w czasie na skutek przemieszczenia się elementu płynu z prędkością $\overline{u}$ z punktu o jednej wartości *H* do punktu o innej wartości *H*.

Zastosowanie operatora pochodnej materialnej do składowych pola prędkości pozwala obliczyć przyspieszenie materialne, czyli przyspieszenie elementu płynu poruszającego się w niestacjonarnym i niejednorodnym polu prędkości.

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = a_x$$

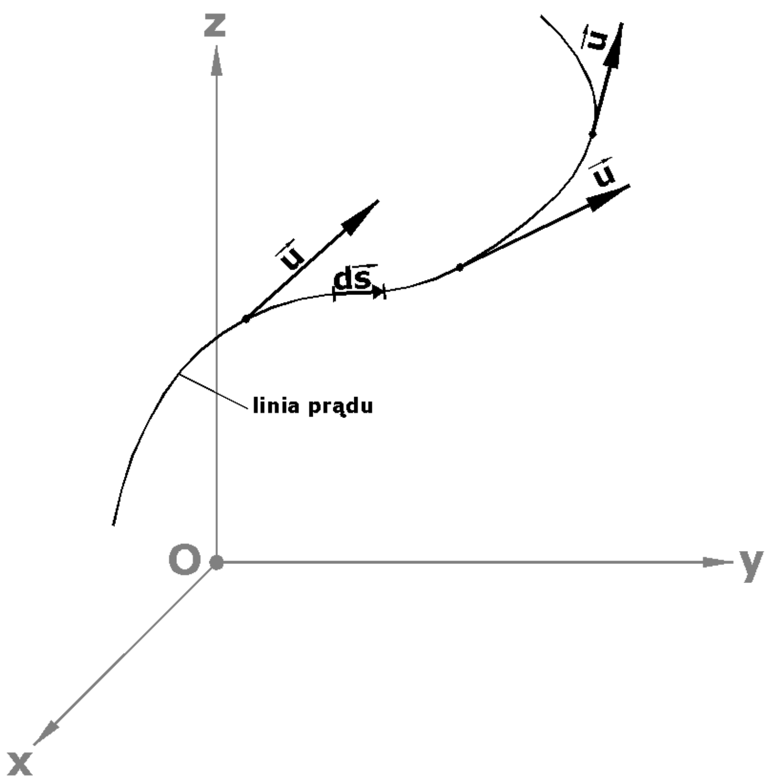
$$\frac{Du_y}{Dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = a_y$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = a_z$$

lub w zapisie wektorowym:

$$\frac{D\overline{u}}{Dt} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \bullet grad\overline{u} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \left(\overline{u}\nabla\right)\overline{u}$$

Linia prądu jest to linia pola wektorowego prędkości, czyli linia styczna do wektora prędkości w każdym punkcie pola w danej chwili czasu. Jeżeli *ds* jest elementem linii prądu, a *u* – wektorem prędkości, to mamy:



$$d\bar{s} \times \bar{u} = 0$$ warunek styczności

czyli:

$$u_z dy - u_y dz = 0$$

$$u_x dz - u_z dx = 0$$

$$u_y dx - u_x dy = 0$$

co prowadzi do równania linii prądu:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

Na ogół przez każdy punkt pola prędkości przechodzi jedna linia prądu dająca się wyznaczyć w sposób jednoznaczny. Jeżeli w jakimś punkcie pola zbiega się więcej linii prądu, to jest to **punkt osobliwy**. Jeżeli przez krzywą nie będącą linią prądu poprowadzimy linie prądu, to uzyskamy **powierzchnię prądu**. Jeżeli jest to krzywa zamknięta, to uzyskamy **rurkę prądu**. Jeżeli przekrój tej rurki jest infinitezymalny, to uzyskamy **włókno prądu**. Rurka prądu jest dobrym modelem rurociągu, dla którego można wyznaczyć:

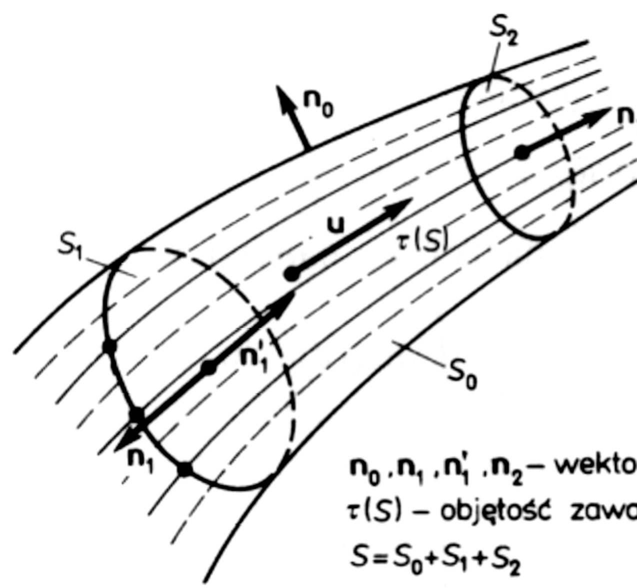
objętościowe natężenie przepływu: $$Q = \int_S u_n dS$$

objętościową prędkość średnią: $$\tilde{u} = \frac{1}{S}\int_S u_n dS$$

masowe natężenie przepływu: $$M = \int_S \rho u_n dS$$

masową prędkość średnią: $$\tilde{u} = \frac{\int_S \rho u_n dS}{\int_S \rho dS}$$

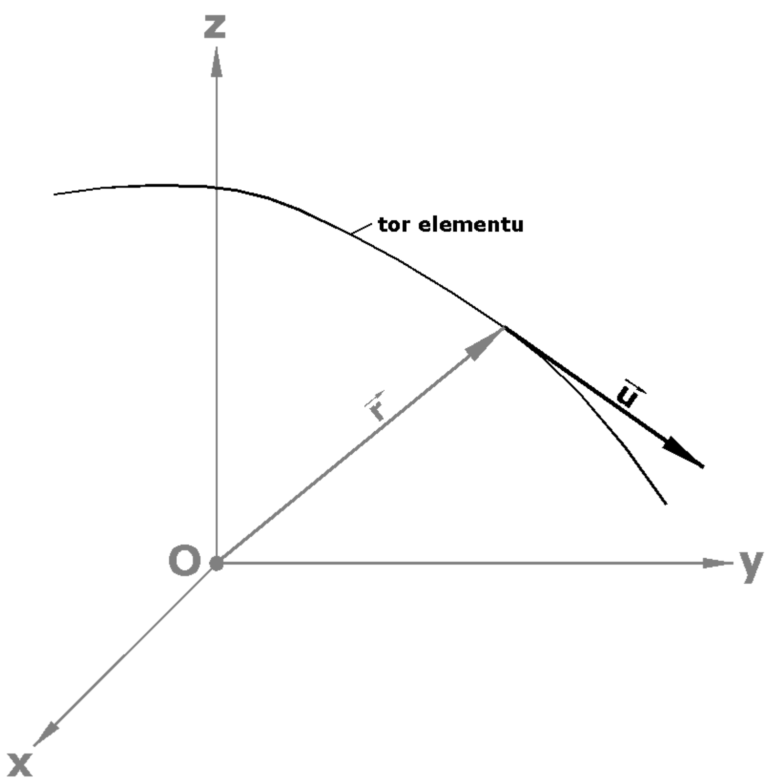
rurka prądu



$\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1', \mathbf{n}_2$ – wektory jednostkowe,
$\tau(S)$ – objętość zawarta między S_0, S_1, S_2
$S = S_0 + S_1 + S_2$

gdzie: u_n jest składowa prędkości normalną do przekroju rurki S

Tor elementu płynu lub **trajektoria** jest to miejsce geometryczne punktów w polu przepływu przez które przechodzi element w kolejnych chwilach czasu.



Wektorowe równanie toru:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{u}(\bar{r}, t)$$

W postaci skalarnej:

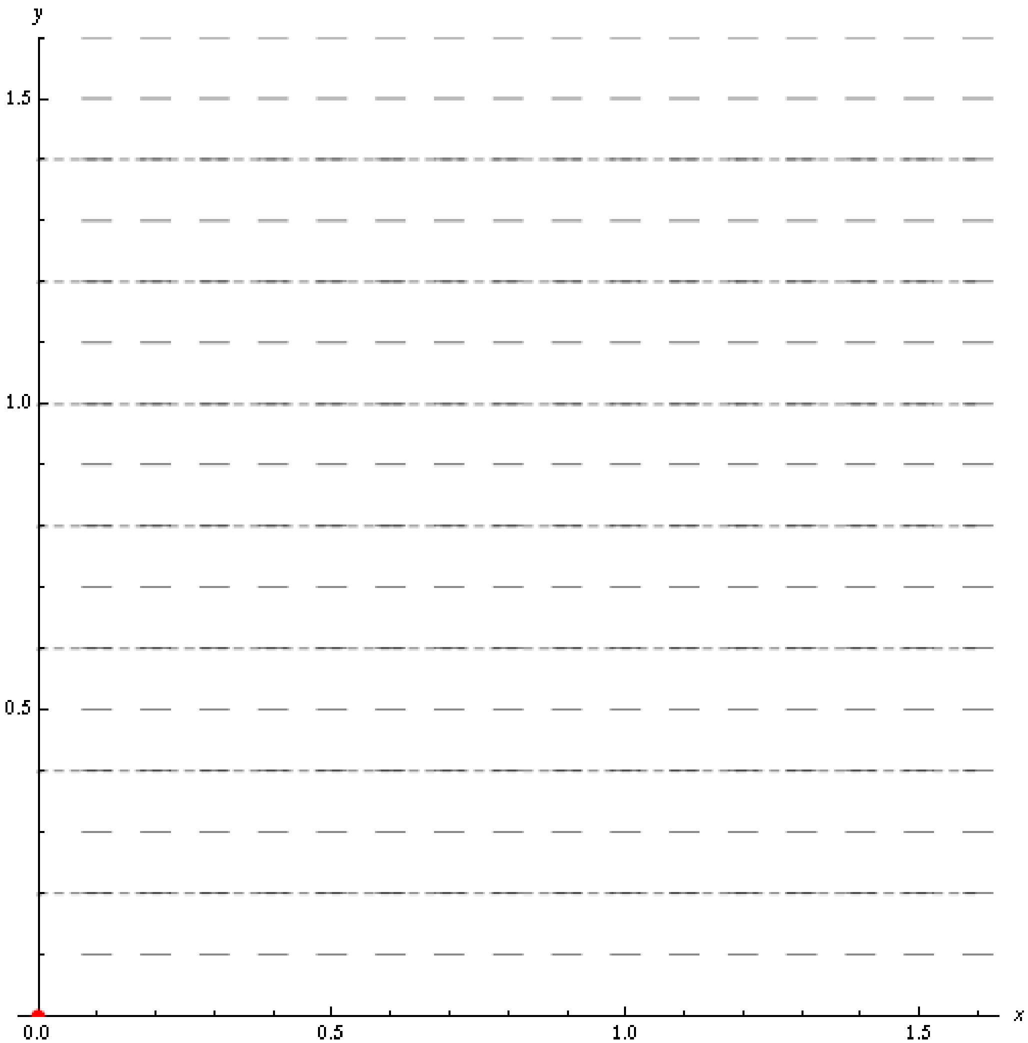
$$\frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t) \qquad \frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t)$$

Rozwiązanie wymaga uwzględnienia warunków początkowych dla $t = t_0$

$$x(t) = x_0 \qquad y(t) = y_0 \qquad z(t) = z_0$$

W przepływie niestacjonarnym linie prądu, tory elementów płynu i linie wysnute **nie pokrywają się.**



Linie prądu – kolor szary

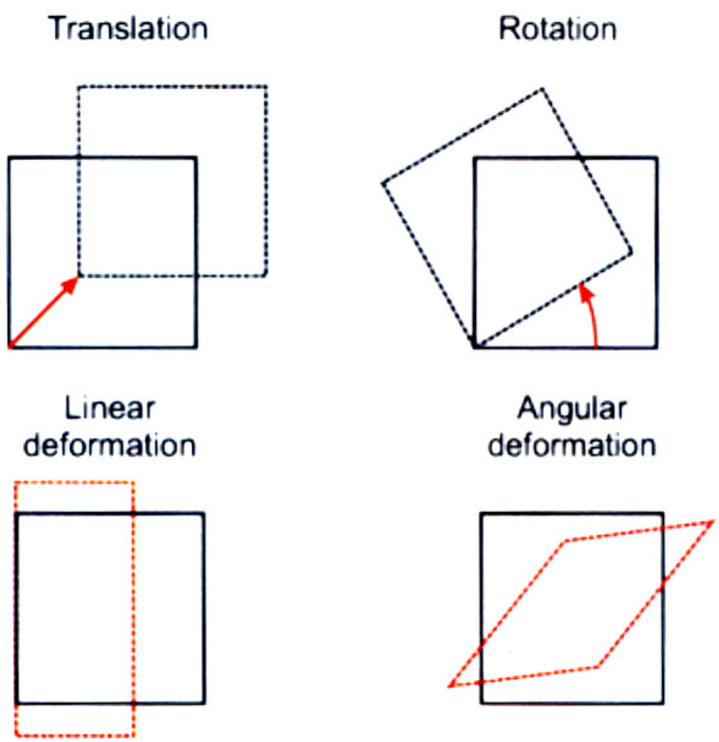
Tor elementu – kolor czerwony

Linia wysnuta – kolor niebieski

Linia wysnuta jest to ślad ruchu elementu płynu „znoszony" przez zmieniające się pole prędkości.

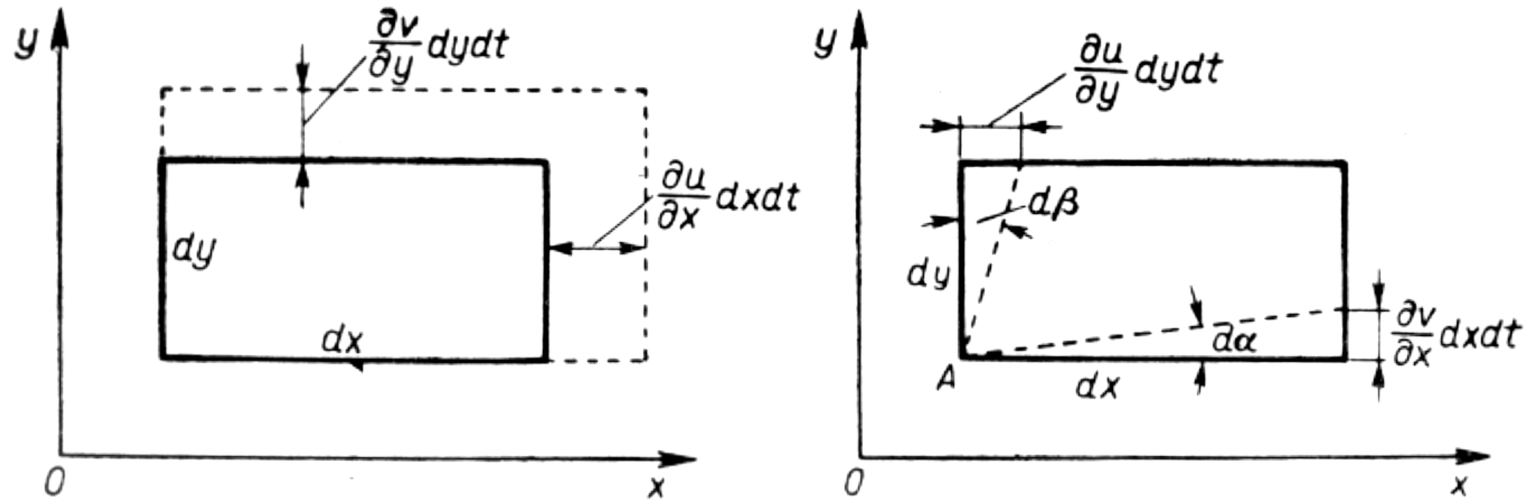
Ruch ogólny elementu płynu

Ruch ogólny ciała sztywnego można przedstawić jako sumę przemieszczenia liniowego i obrotu. Ponieważ płyny nie mają sztywności postaciowej, w ruchu płynu dochodzi dodatkowo do odkształcenia elementu płynu.



Ruch ogólny elementu płynu można więc traktować jako superpozycję przemieszczenia liniowego (translacji), obrotu względem chwilowego bieguna oraz odkształcenia (deformacji), które z kolei można podzielić na liniowe (objętościowe) i kątowe (postaciowe).

Odkształcenia w przypadku dwuwymiarowym



Prędkość ruchu płynu zapisujemy jako: $\bar{u} = \bar{i}u + \bar{j}v$

Do odkształcenia liniowego elementu płynu dochodzi gdy składowa prędkości u zmienia się w kierunku x i/lub składowa prędkości v zmienia się w kierunku y (lewa strona rysunku). Prowadzi to do przyrostu objętości elementu w czasie dt o wartość:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdydt$$

gdzie wielkości w nawiasie są prędkościami odkształcenia liniowego

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Do odkształcenia postaciowego elementu płynu dochodzi gdy składowa prędkości u zmienia się w kierunku y i/lub składowa prędkości v zmienia się w kierunku x (prawa strona rysunku). Prowadzi to do obrotu ścianek elementu płynu o kąty:

$$d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} dt \qquad\qquad d\beta = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

Miarą prędkości łącznego odkształcenia postaciowego jest wyrażenie:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Sztywny obrót elementu płynu można traktować jako sumę dwóch odkształceń postaciowych tak dobranych, że kąty pomiędzy bokami elementu pozostają proste. Prędkość kątową takiego obrotu można zapisać jako:

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Tensor symetryczny opisujący deformację elementu płynu nosi nazwę tensora prędkości deformacji:

$$[D] = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

gdzie poszczególne składowe wyrażają się zależnościami:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Ostatecznie ogólny ruch elementu płynu można opisać następującą zależnością:

$$\overline{u}_A = \overline{u}_0 + \overline{\omega}_0 \times \partial \overline{r} + \left[D \right]_0 \cdot \partial \overline{r}$$

Pierwsze twierdzenie Helmholtza

Prędkość dowolnego punktu elementu płynu składa się z:

-prędkości postępowej punktu obranego za biegun

-prędkości obrotowej wokół osi przechodzącej przez biegun (wektor tej prędkości wyznacza oś obrotu)

-prędkości deformacji elementu płynu – [D] – tensor predkości deformacji.

Hermann von Helmholtz
1821 - 1894

W porównaniu z analogicznym ruchem ciała sztywnego można stwierdzić następujące różnice:

-wzór dla płynu jest ważny tylko w bliskim otoczeniu bieguna

-w płynie dodatkowo występuje prędkość deformacji

Zamknięty układ równań mechaniki płynów

Przedstawione poniżej równania tworzą zamknięty układ równań mechaniki płynów, który może być zastosowany do opisu konkretnych przepływów i uzyskania, w drodze rozwiązania tego układu, informacji o wartościach interesujących nas parametrów tego przepływu. Konkretna postać układu równań zależy od przyjętego modelu płynu.

Przypadek 1: płyn nieściśliwy o stałej lepkości

Zamknięty układ równań tworzą:

- równanie zachowania masy $div\bar{u} = 0$

- równanie zachowania pędu $\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - gradp + \mu\Delta\bar{u}$

Razem są to cztery równania skalarne z czterema niewiadomymi:

- ciśnienie p

- składowe prędkości u_x, u_y, u_z

W tym przypadku pole temperatury nie wpływa na przepływ, ale samo jest uzależnione od pola prędkości przepływu poprzez równanie bilansu entropii w postaci:

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_x\frac{\partial T}{\partial x}+u_y\frac{\partial T}{\partial y}+u_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=T\dot{s}_M+\lambda\Delta T$$

Tę postać równania można uzyskać podstawiając do oryginalnego równania zależność dla energii wewnętrznej:

$$e=cT+e_0$$

W przypadku gdy lepkość płynu zależy od temperatury, równanie bilansu entropii jest sprzężone z równaniami zachowania masy i zachowania pędu poprzez zależność:

$$\mu=\mu(T)$$

Mamy wtedy układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi:

- ciśnienie p
- składowe prędkości u_x, u_y, u_z
- temperatura T
- współczynnik lepkości μ

Przypadek 2: płyn ściśliwy

W tym przypadku zamknięty układ równań tworzą:

- równanie zachowania masy $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \overline{u}) = 0$

- równanie zachowania pędu $\rho \frac{D\overline{u}}{Dt} = \rho \bar{f} - gradp - grad\left(\frac{2}{3}\mu div\overline{u}\right) + div(2\mu[D])$

- równanie bilansu entropii $\rho \frac{De}{Dt} = T\dot{s}_M + \frac{p}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + \lambda \Delta T$

- równanie energii wewnętrznej $e = \int_{T_0}^{T} c_v(T)dT$

- równanie stanu $\frac{p}{\rho} = Z(p,T)RT$

Z – funkcja ściśliwości
R – stała gazowa

- dodatkowe zależności $\mu = \mu(T)$ $c_V = c_V(T)$

W tym przypadku mamy układ dziewięciu równań z dziewięcioma niewiadomymi:

- ciśnienie p
- gęstość ρ
- energia wewnętrzna e
- temperatura T
- współczynnik lepkości μ
- składowe prędkości u_x, u_y, u_z
- ciepło właściwe c_V

Założono, że współczynnik przewodnictwa cieplnego λ ma wartość stałą.

Warunki brzegowe i początkowe

Dla umożliwienia rozwiązania powyższych układów równań konieczne jest określenie odpowiednich warunków brzegowych oraz (dla przepływów niestacjonarnych) warunków początkowych. Warunki te są potrzebne do wyznaczenia dowolnych stałych i dowolnych funkcji wprowadzonych podczas całkowania równań.

Równanie zachowania masy

Prawo zachowania masy: w zamkniętym układzie fizycznym masa nie może powstać ani nie może ulec anihilacji.

Założenia:

-rozpatrujemy nieustalony trójwymiarowy przepływ płynu ściśliwego,

-płyn w całości wypełnia przestrzeń (brak nieciągłości, pęcherzy itp.),

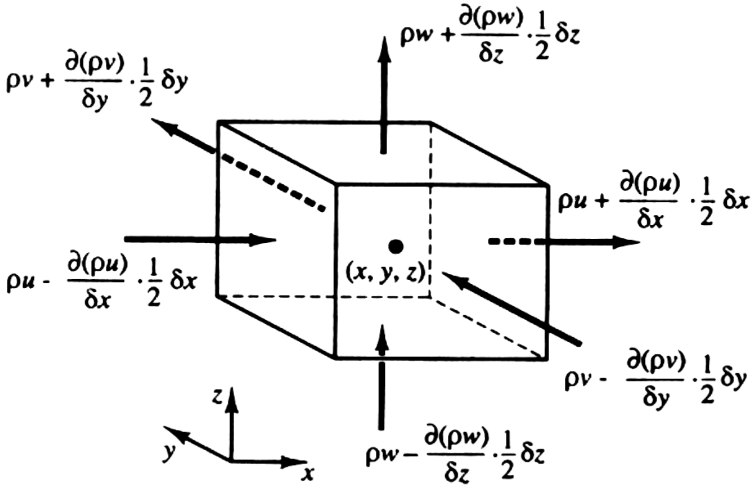
-stosujemy opis Eulera – nieruchoma objętość kontrolna ograniczona powierzchnią kontrolną.

Przy tych założeniach prawo zachowania masy brzmi:

przyrost masy w objętości = przepływ masy przez powierzchnię

Przyrost masy w objętości kontrolnej wynosi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \delta x \delta y \delta z\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$



Z kolei przepływ przez powierzchnię kontrolną wynosi:

$$\left(\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\,\delta z-\left(\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\,\delta z+$$

$$+\left(\rho v-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\,\delta z-\left(\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\,\delta z+$$

$$+\left(\rho w-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\,\delta y-\left(\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\,\delta y$$

Porównanie obu wyrażeń i podzielenie stronami przez objętość kontrolną prowadzi do wzoru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho \overline{u})=0$$

W przypadku <u>ustalonego </u>przepływu płynu <u>ściśliwego</u> równanie zachowania masy przybiera postać:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=div(\rho \overline{u})=0$$

W przypadku ustalonego przepływu płynu <u>nieściśliwego</u> równanie zachowania masy przybiera postać:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=div\overline{u}=0$$

W przypadku poruszającego się elementu płynu (opis Lagrange'a) równanie zachowania masy przybiera postać:

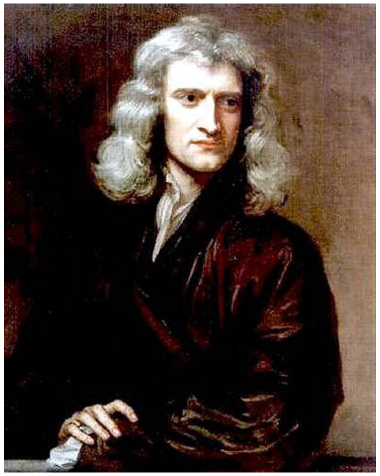
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho \overline{u})=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\overline{u}\cdot grad\rho+\rho div\overline{u}=\frac{D\rho}{Dt}+\rho div\overline{u}$$

Równanie zachowania pędu

Druga zasada dynamiki Newtona: prędkość przyrostu pędu elementu płynu jest równa sumie sił zewnętrznych działających na ten element

$$\frac{D(m\bar{u})}{Dt} = \sum \bar{F}$$

Isaac Newton
1643 - 1727



Prędkość przyrostu pędu elementu płynu (czyli lewa strona równania) jest określona poprzez pochodną materialną jego prędkości:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u\bar{u})$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v\bar{u})$$

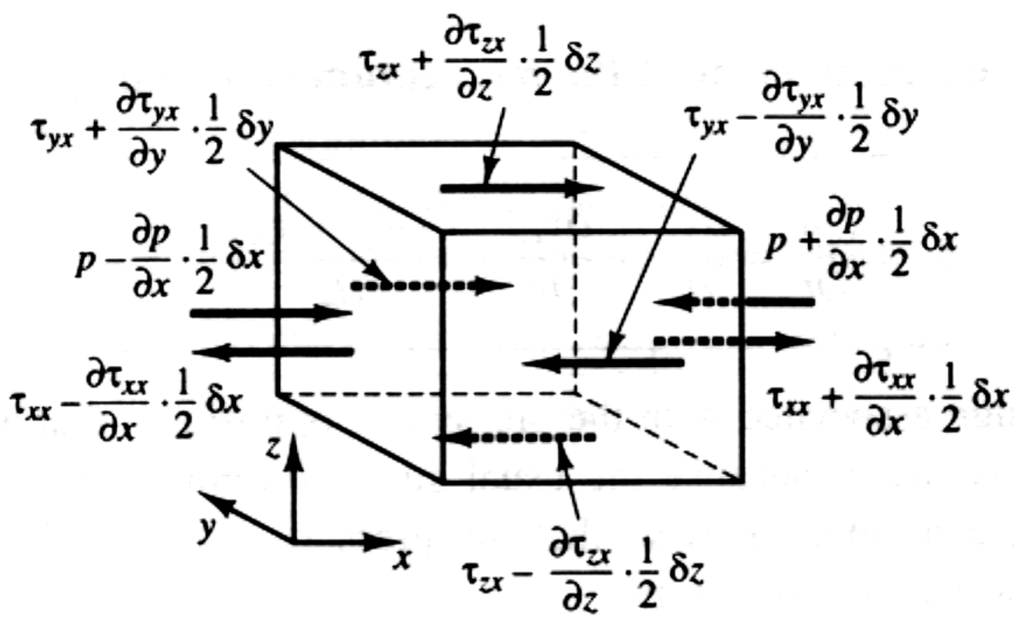
$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div(\rho w\bar{u})$$

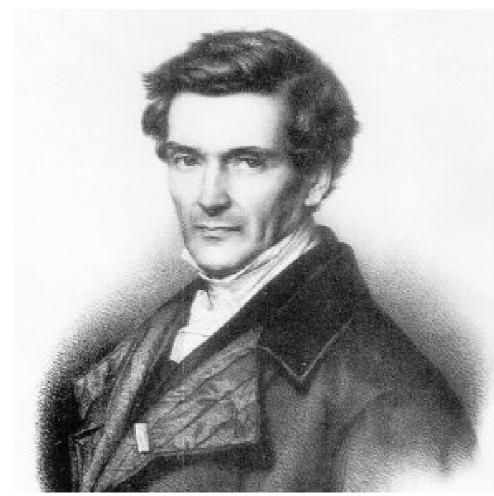
Prawą stronę równania tworzą dwie kategorie sił:

-siły powierzchniowe (siły ciśnienia i siły lepkości),

-siły masowe (siły ciężkości, siły Coriolisa, siły elektromagnetyczne)

Dla przykładu utworzymy kompletne równanie dla kierunku x, posługując się układem sił powierzchniowych jak na rysunku:





Gaspard Coriolis
1792 - 1843

Siły działające na ścianki elementu prostopadłe do kierunku x

$$\left[\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)-\left(\tau_{xx}-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z+\left[-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)+\left(\tau_{xx}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z=$$

$$=\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right)\delta x\delta y\partial z$$

Siły działające na ścianki elementu prostopadłe do kierunku y

$$-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z=\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$$

Siły działające na ścianki elementu prostopadłe do kierunku z

$$-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y=\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

Po dodaniu powyższych wyrażeń i podzieleniu stronami przez objętość elementu otrzymujemy siły powierzchniowe na kierunku x

$$\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Po uzupełnieniu o składową jednostkowej siły masowej f i podstawieniu do wyjściowej zależności otrzymujemy:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho f_x+\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

i analogicznie dla pozostałych kierunków:

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho f_y+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial(-p+\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\rho f_z+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial(-p+\tau_{zz})}{\partial z}$$

Tensor stanu naprężenia w płynie

$$[P]= \begin{array}{|c|c|c|} \hline -p+\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \hline \tau_{xy} & -p+\tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \hline \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p+\tau_{zz} \\ \hline \end{array}$$

Stan naprężenia w płynie

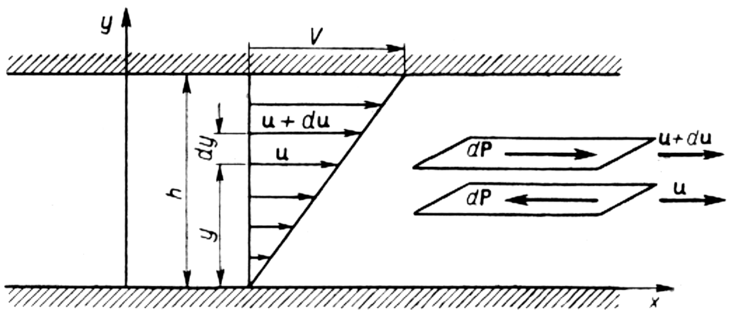
Można udowodnić, że tensor stanu naprężenia w płynie jest tensorem symetrycznym, czyli: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ itd.

Redukuje to liczbę niewiadomych naprężeń lepkościowych do 6, które muszą być wyznaczone w oparciu o wybrany model płynu. Najczęściej jest stosowany model płynu Newtona.

Model płynu Newtona oparty jest na następujących założeniach:

-płyn jest izotropowy, czyli ma jednakowe właściwości we wszystkich kierunkach,

-naprężenia w płynie są liniowymi funkcjami prędkości deformacji



$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$ gdzie:

μ - dynamiczny współczynnik lepkości

W przepływie trójwymiarowym płynu ściśliwego model płynu Newtona jest opisany następującymi zależnościami:

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda div\overline{u}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda div\overline{u}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda div\overline{u}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

gdzie:

$$div\overline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

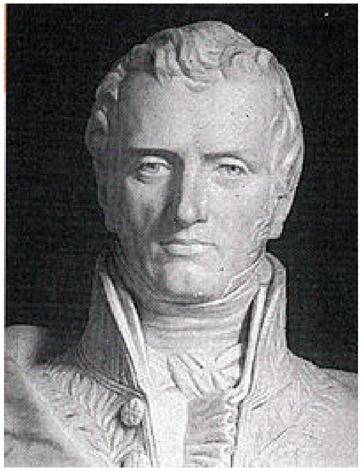
λ - objętościowy współczynnik lepkości

zgodnie z hipotezą Stokesa mamy:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

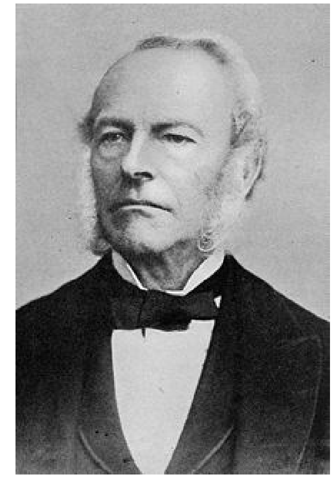
W płynie nieściśliwym jest $div\overline{u} = 0$ czyli drugie człony naprężeń normalnych się zerują.

Równanie Naviera-Stokesa



Claude Navier
1785 - 1836

Podstawienie zależności wynikających z modelu płynu Newtona do równania zachowania pędu daje równanie znane jako **równanie Naviera-Stokesa.**



George Stokes
1819 - 1903

W formie skalarnej ma ono postać trzech równań:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda div\bar{u}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda div\bar{u}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda div\bar{u}\right]$$

W formie wektorowej równanie Naviera Stokesa ma postać:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - grad p + grad(\lambda div \bar{u}) + div(2\mu[D])$$

$$A = B + C + D + E$$

A – prędkość zmiany pędu elementu płynu

B- siła masowa

C- siła powierzchniowa ciśnienia

D – siła powierzchniowa związana z lepkością płynu, wynikająca ze zmiany objętości elementu płynu <u>ściśliwego </u>(kompresji lub ekspansji)

E- siła powierzchniowa związana z lepkością płynu, wynikająca z deformacji liniowej i postaciowej elementu płynu

W płynie nieściśliwym równanie Naviera Stokesa upraszcza się do postaci:

$$\rho \frac{D\overline{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - grad p + div(2\mu[D])$$

Jeżeli dodatkowo założymy, że lepkość płynu jest stała,to mamy:

$$\rho \frac{D\overline{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - grad p + \mu\Delta\overline{u}$$

Dalszym możliwym uproszczeniem jest założenie o braku lepkości płynu, które prowadzi do **równania Eulera**, opisującego ruch płynu nielepkiego i nieściśliwego:

$$\rho \frac{D\overline{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - grad p$$

Równanie Naviera Stokesa może być rozwiązane analitycznie tylko dla niewielu uproszczonych przypadków. Wybrane przykłady opisano niżej.

Równanie zachowania energii

Energię kinetyczną płynu można traktować jako sumę energii ruchu makroskopowego oraz energii ruchu molekularnego, zwanej energią wewnętrzną: $\int_V \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV$ $\quad \overline{u}(u_x, u_y, u_z) \quad u = |\overline{u}|$

Zmiana w czasie (czyli pochodna substancjalna) całkowitej energii kinetycznej objętości płynnej *V* otoczonej powierzchnią *S* jest równa sumie mocy sił masowych, mocy sił powierzchniowych oraz strumieniowi energii doprowadzonej do objętości płynnej

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV = \int_V \rho \bar{f} \bullet \overline{u} dV + \int_{S(V)} \overline{\tau} \bullet \overline{u} dS - \int_{S(V)} \bar{j} \bullet \overline{n} dS$$

gdzie:

$\bar{f}$ jednostkowa siła masowa $\bar{f}(f_x, f_y, f_z)$

$\overline{\tau}$ jednostkowa siła powierzchniowa

$\bar{j}$ strumień ciepła doprowadzonego $\bar{j}(j_x, j_y, j_z)$

$\overline{n}$ wersor normalny zewnętrzny

Równanie bilansu entropii

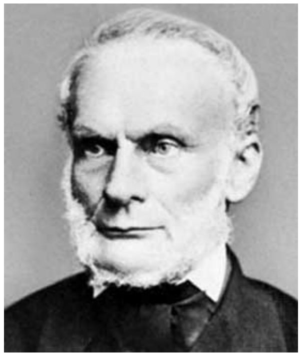
Entropia jest transportowana z ciepłem zgodnie z relacją Clausiusa:

$$j_s = \frac{1}{T} j$$

gdzie: j_s strumień entropii

j strumień ciepła

Rudolf Clausius
1822 - 1888

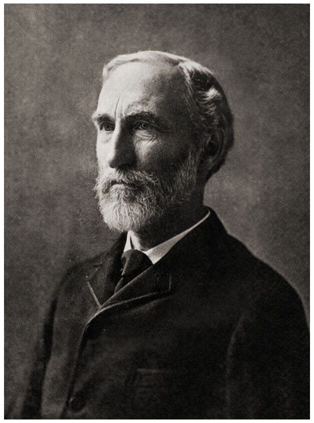


T temperatura przy której zachodzi transport

Entropia zmienia się wraz z parametrami stanu (relacja Gibbsa):

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Josiah Gibbs
1839 - 1903



gdzie: p - ciśnienie

e – energia wewnętrzna płynu

ρ - gęstość płynu

Druga zasada termodynamiki: w każdym procesie rzeczywistym suma zmian entropii wszystkich ciał biorących udział w procesie jest zawsze dodatnia.

Zmiana w czasie (czyli pochodna substancjalna) entropii w objętości płynnej *V(S)* jest równa produkcji entropii wewnątrz tej objętości oraz strumieniowi entropii przez powierzchnię płynną *S*.

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho s dV = \int_V \dot{s} dV - \int_{S(V)} \bar{j}_s \bullet \bar{n} dS$$

Gdzie: $\dot{s}$ objętościowe natężenie źródeł entropii

Powyższe równanie można przekształcić do postaci jednej całki po objętości płynnej:

$$\int_V \left(\rho \frac{Ds}{Dt} - \dot{s} + div \frac{\bar{j}}{T} \right) dV = 0$$

Ponieważ objętość płynną V wybrano dowolnie, zerować się musi również funkcja podcałkowa, co prowadzi do równania bilansu entropii w postaci różniczkowej (czyli dla elementu płynu):

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \dot{s} - div \frac{\bar{j}}{T}$$

Równanie Bernoulliego

Daniel Bernoulli
1700 - 1782

Równanie Bernoulliego wyraża zasady zachowania pędu i zachowania energii płynu przy spełnieniu odpowiednich założeń.

Założenia:

-przepływ jest stacjonarny $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

-plyn jest nielepki $\mu = 0$

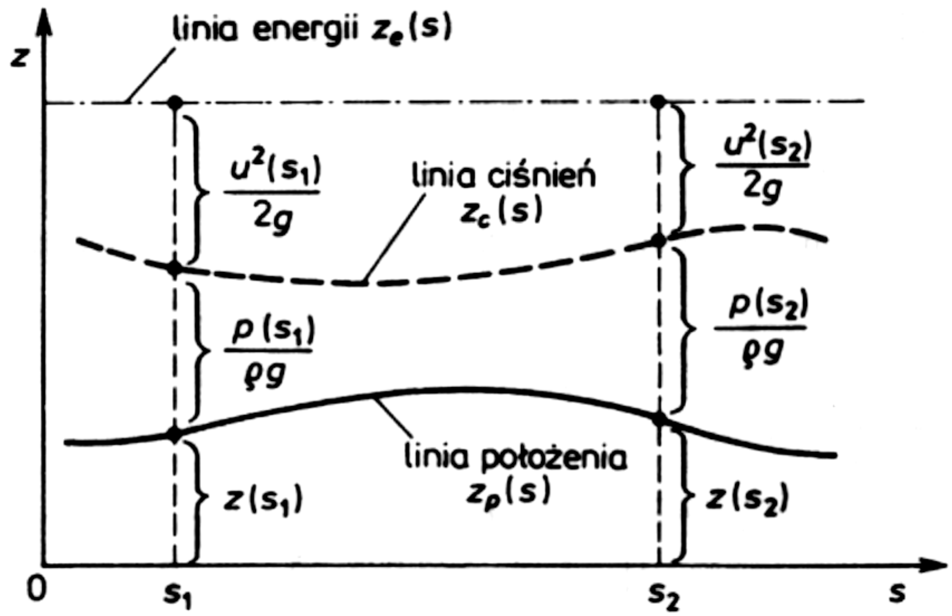
-płyn jest barotropowy $\rho = \rho(p)$

-pole sił masowych jest potencjalne $\bar{f} = -grad\Pi$

Przy takich założeniach można scałkować równanie Eulera:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - gradp$$

Równanie Bernoulliego (1738)



$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const$$

lub

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = const$$

Suma energii potencjalnej pola sił masowych, energii ciśnienia oraz energii kinetycznej płynu jest stała.

lub:

Suma wysokości geometrycznej, wysokości ciśnienia (czyli wysokości, na jaką wzniesie się słup cieczy pod ciśnieniem *p*) oraz wysokości prędkości (czyli wysokości, z której spadający element płynu uzyska prędkość *u*) jest stała.

Możliwe są inne postaci równania Bernoulliego, jeżeli przyjmie się szczególne formy warunku barotropowości płynu. Na przykład dla gazu podlegającego przemianie adiabatycznej warunek ten ma postać:

$\rho = \frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}} p^{1/\kappa}$ gdzie κ jest wykładnikiem adiabaty Poissona $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

Równanie Bernoulliego przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right] + gz = const$$

Simeon Poisson
1781 - 1840

Porównanie wyprowadzenia równania Bernoulliego z równaniem zachowania energii dla rurki prądu pozwala stwierdzić, że przy pominięciu energii wewnętrznej płynu *e* i przewodnictwa cieplnego płynu równanie Bernoulliego wyraża również zasadę zachowania energii.