J. Szantyr – Wykład 10 - Wyznaczanie przepływów lepkich – metoda różnic skończonych

Punkt wyjścia:

równania mechaniki płynów w postaci zachowawczej

Równanie zachowania masy: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{u}) = 0$$

Równanie zachowania pędu:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u \overline{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + div(\mu grad u) + S_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v \overline{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + div(\mu grad v) + S_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div(\rho w \overline{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + div(\mu grad w) + S_z$$

Równanie energii wewnętrznej:

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + div(\rho i\overline{u}) = -p\,div\overline{u} + div(k\,grad T) + \Phi + S_i$$

Równania stanu:

$$p = p(\rho, T)$$

$$i = i(\rho, T)$$

Np. dla gazu doskonałego:

$$p = \rho RT$$

$$i = c_v T$$

Ogólne równanie transportu:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\overline{u}) = div(\Gamma\,grad\,\phi) + S_\phi$$

Równania różniczkowe mechaniki płynów muszą być przekształcone w równania algebraiczne. Możliwe są tu trzy sposoby postępowania:

1. **Metoda różnic skończonych**

2. **Metoda elementów skończonych**

3. **Metoda objętości skończonych**

Każda z ww. metod wymaga przeprowadzenia tzw. dyskretyzacji, czyli utworzenia sieci dzielącej domenę przepływu na dużą liczbę niewielkich elementów.

Do rozwiązania układu równań opisujących przepływ niezbędne są warunki brzegowe (w przepływach niestacjonarnych również początkowe).

Warunki początkowe wymagają określenia wartości gęstości, prędkości i temperatury w całym obszarze przepływu dla chwili t=0.

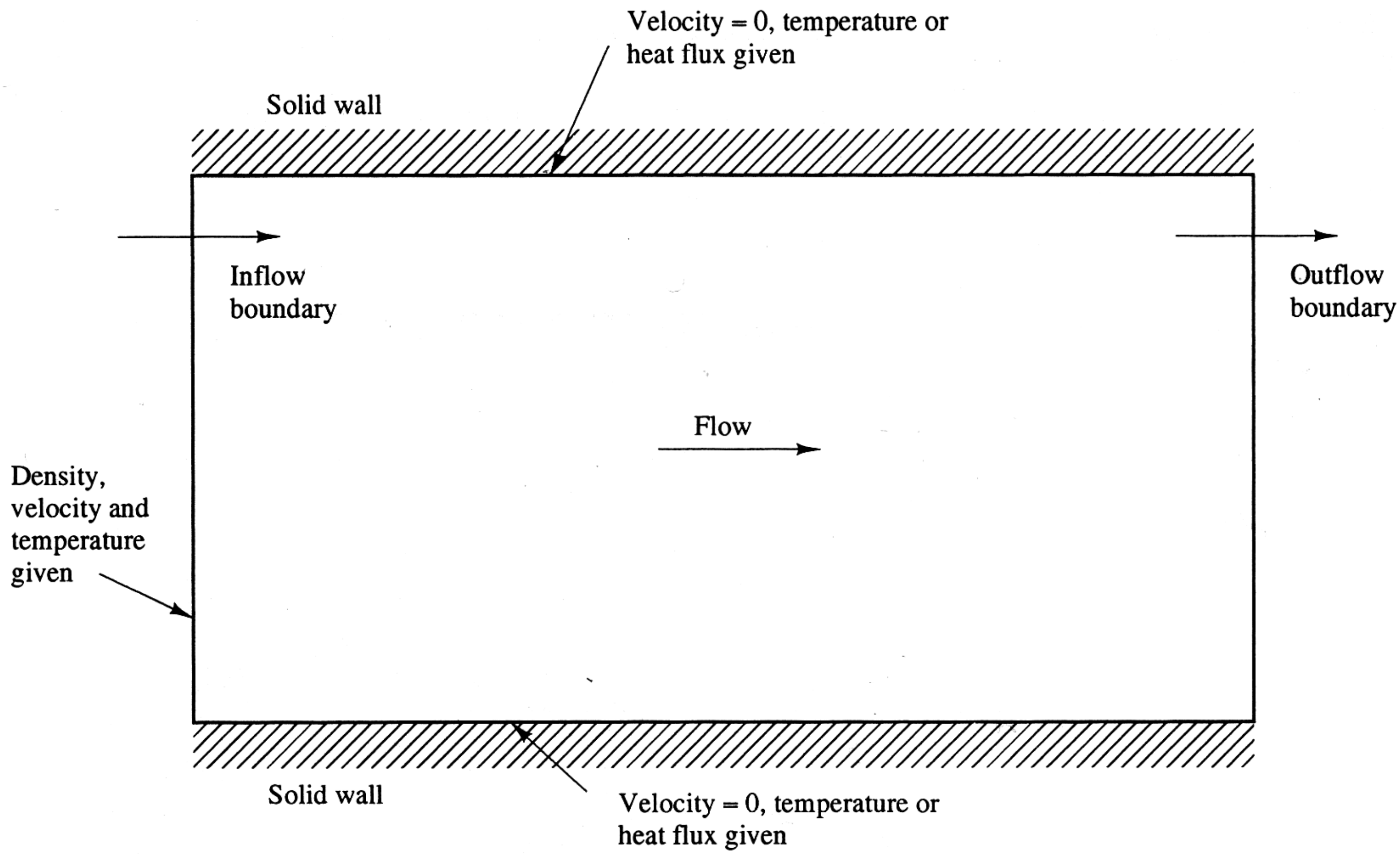
Warunki brzegowe wymagają określenia:

-na ścianach sztywnych – wartości prędkości i temperatury (lub strumienia ciepła)

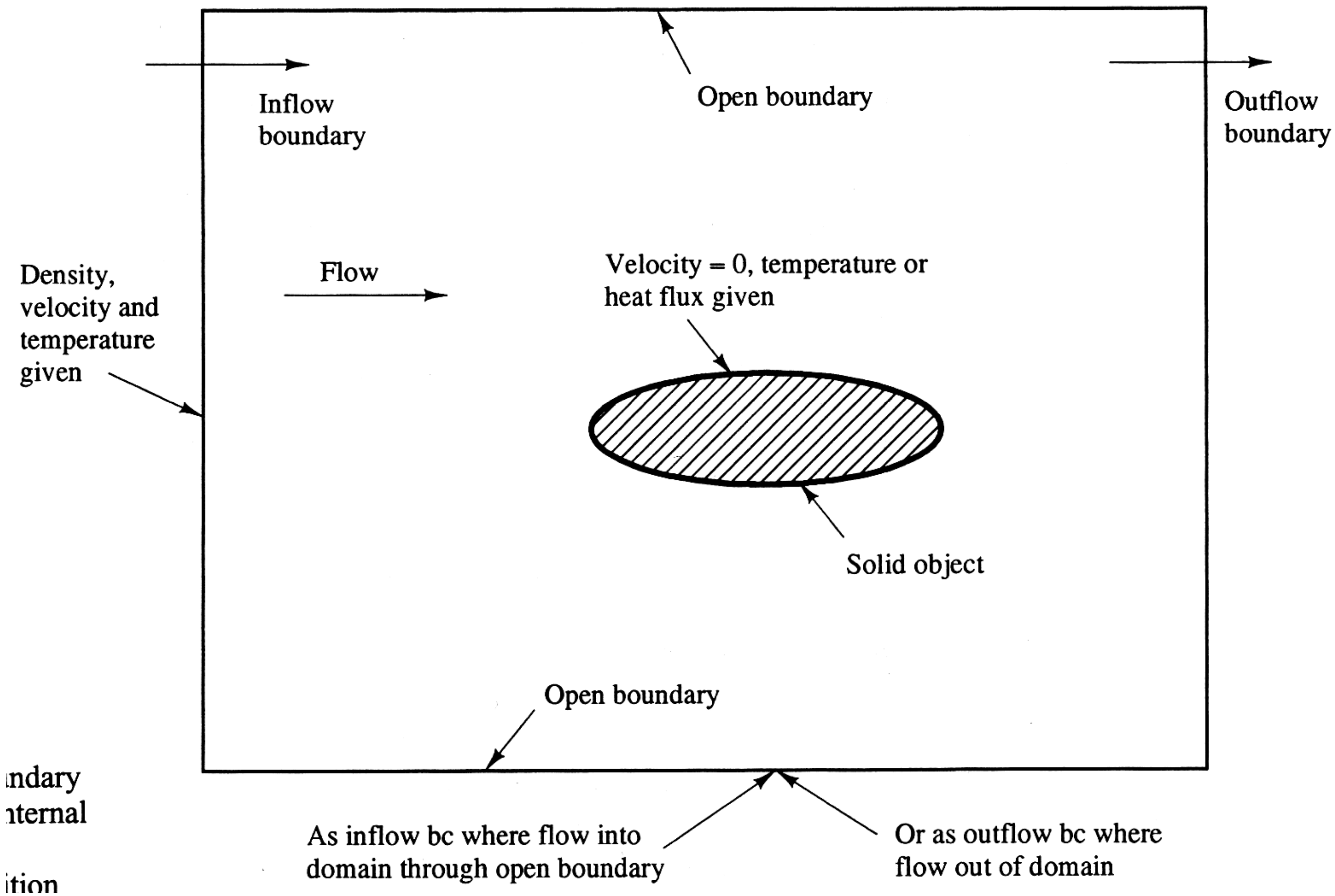
-na wlocie – wartości gęstości, prędkości i temperatury (lub strumienia ciepła)

-na wylocie – wartości ciśnienia oraz zerowanie się gradientów normalnych prędkości i temperatury

Schemat warunków brzegowych dla przepływu wewnętrznego.



Schemat warunków brzegowych dla przepływu zewnętrznego.



Metoda różnic skończonych

Brook Taylor
1685 - 1731

Metoda różnic skończonych polega na przekształceniu równań różniczkowych w ich równoważniki różnicowe. Autorstwo metody jest przypisywane B. Taylorowi. W praktyce spotyka się trzy schematy różnicowe. Jeżeli pochodna funkcji jest określona jako:

$$\frac{df}{dh} = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

To można ją aproksymować jako:

Różnicę „w przód”

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Różnicę „wstecz”

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

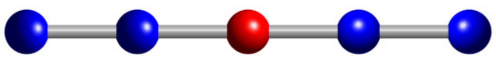
Różnicę centralną

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right)}{h}$$

O błędach względnych aproksymacji równych odpowiednio:

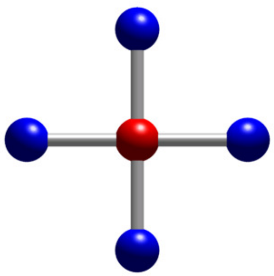
$$\frac{\Delta f}{h} - \frac{df}{dx} = O(h)$$

$$\frac{\Delta f}{h} - \frac{df}{dx} = O\left(h^2\right)$$



Schemat różnicowy jednowymiarowy oparty na 5 punktach ma postać:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{-f(x+2h)+8(x+h)-8(x-h)+f(x-2h)}{12h}$$



Schemat różnicowy dwuwymiarowy można przedstawić np. dla funkcji prądu ψ:

Z definicji funkcji prądu mamy: $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \upsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

Pierwszą pochodną ψ w kierunku x można aproksymować jako:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(x+\Delta x, y)-\psi(x, y)}{\Delta x}$$

Drugą pochodną w kierunku x można aproksymować jako:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\psi(x+\Delta x, y)-\psi(x, y)}{\Delta x} - \frac{\psi(x, y)-\psi(x-\Delta x, y)}{\Delta x}\right]$$

W zapisie wskaźnikowym otrzymamy:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}\right) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}\right)$$

Odpowiednio dla kierunku y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \approx \frac{1}{\Delta y}\left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}\right) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{(\Delta y)^2}\left(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}\right)$$

Jeżeli analizowany przepływ jest potencjalny (**czyli jest to przepływ bezwirowy płynu idealnego**), to funkcja prądu, podobnie jak potencjał, musi spełniać równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Odpowiednie podstawienie prowadzi do:

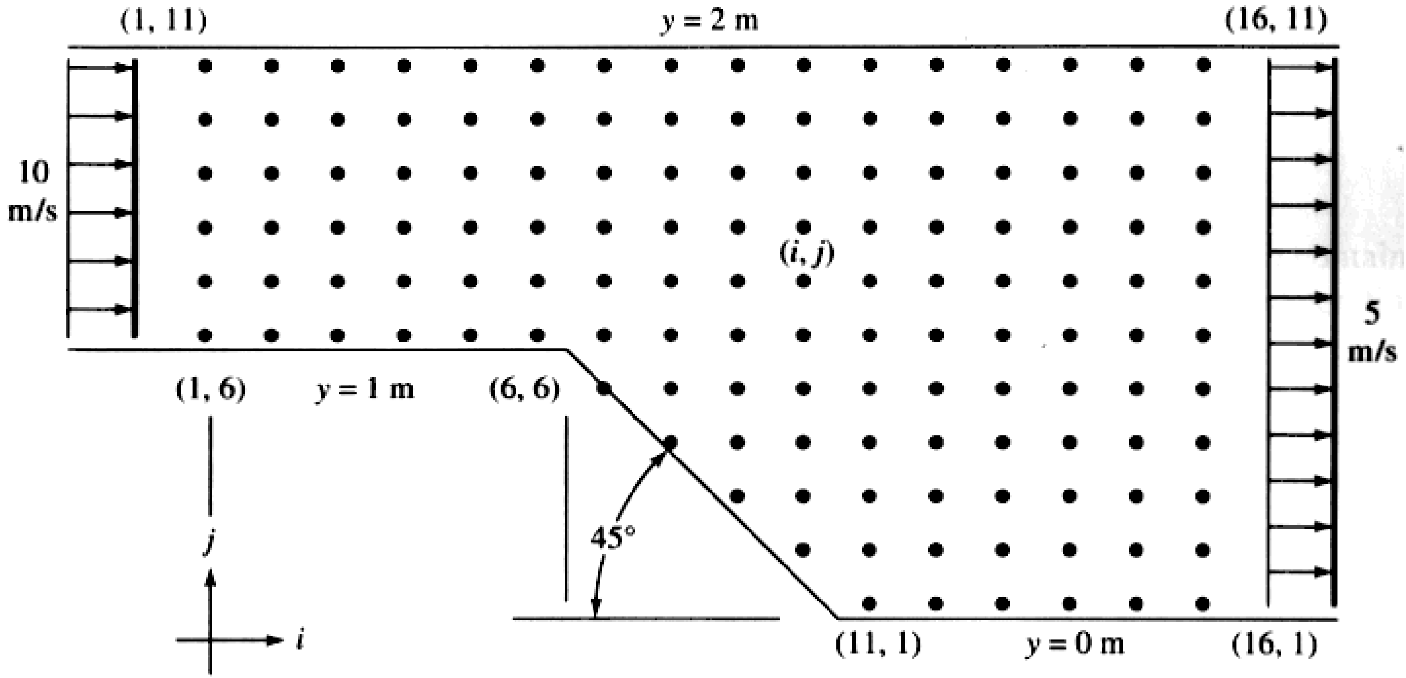
$$2(1+\beta)\psi_{i,j} = \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \beta\left(\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}\right)$$

gdzie:

$$\beta = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2$$

Przykład obliczeniowy

Wyznaczyć numerycznie dwuwymiarowy przepływ potencjalny przez dyszę rozbieżną jaka na rysunku, używając sieci punktów o kroku 0,2 [m] w kierunkach obu osi układu współrzędnych.



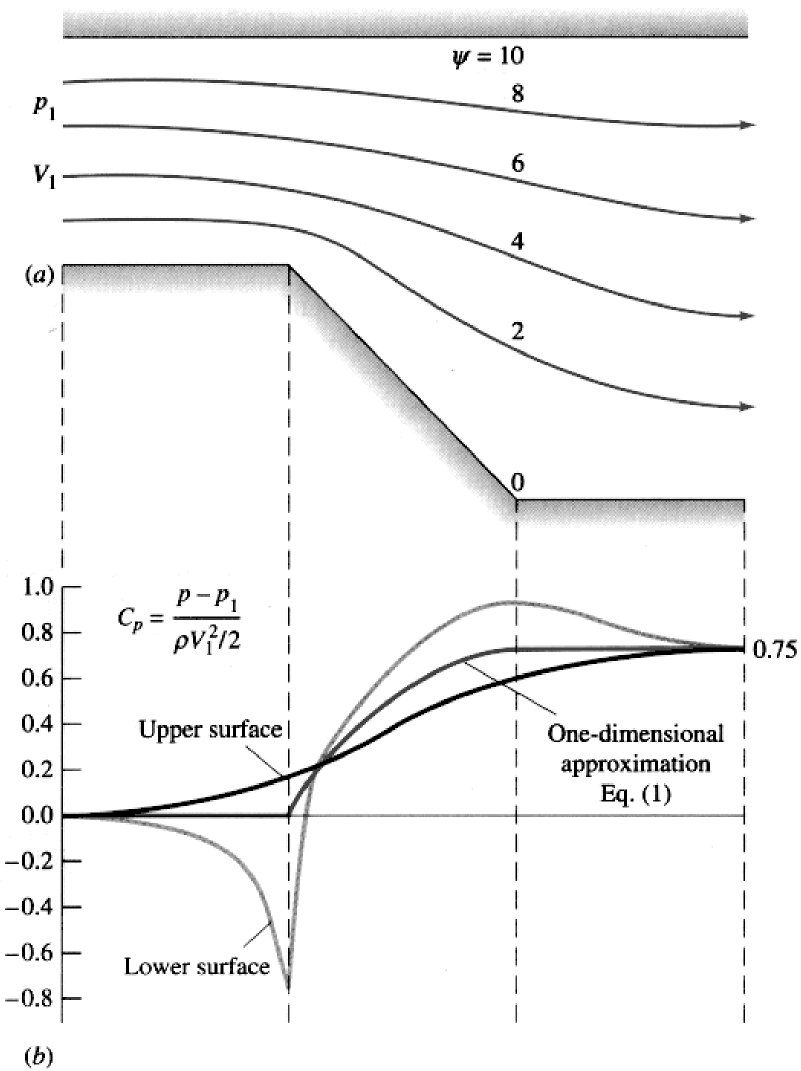
Dla wygody zakładamy, że funkcja prądu ma wartość zero dla dolnej krawędzi dyszy. Z objętościowego natężenia przepływu wynika, że funkcja prądu powinna mieć wartość 10 na górnej krawędzi dyszy.

Ponieważ dopływ i wypływ z dyszy są jednorodne, to funkcja prądu na wlocie i wylocie musi się zmieniać liniowo z wysokością. Dla punktów wewnętrznych przyjmuje się dość dowolne wartości początkowe funkcji prądu i stosuje się ww. wzór interpolacyjny kolejne dla wszystkich punktów, zaczynając np. od lewego górnego rogu. Po kilkakrotnym przejściu całej domeny przepływu różnice wartości w odpowiadających sobie punktach dla kolejnych iteracji są mniejsze od założonego błędu i uzyskujemy dostatecznie dokładne rozwiązanie:

ψ = 10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
8.00	8.02	8.04	8.07	8.12	8.20	8.30	8.41	8.52	8.62	8.71	8.79	8.85	8.91	8.95	9.00
6.00	6.03	6.06	6.12	6.22	6.37	6.58	6.82	7.05	7.26	7.44	7.59	7.71	7.82	7.91	8.00
4.00	4.03	4.07	4.13	4.26	4.48	4.84	5.24	5.61	5.93	6.19	6.41	6.59	6.74	6.88	7.00
2.00	2.02	2.05	2.09	2.20	2.44	3.08	3.69	4.22	4.65	5.00	5.28	5.50	5.69	5.85	6.00
ψ = 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.33	2.22	2.92	3.45	3.87	4.19	4.45	4.66	4.84	5.00
						0.00	1.00	1.77	2.37	2.83	3.18	3.45	3.66	3.84	4.00
							0.00	0.80	1.42	1.90	2.24	2.50	2.70	2.86	3.00
								0.00	0.63	1.09	1.40	1.61	1.77	1.89	2.00
									0.00	0.44	0.66	0.79	0.87	0.94	1.00
										0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Wartości prędkości uzyskamy ze wzoru:

$$u(3{,}6)=\frac{\psi(3{,}7)-\psi(3{,}6)}{\Delta y}=\frac{2{,}09-0{,}00}{0{,}2}=10{,}45[m/s]$$



Ciśnienie można wyznaczyć ze wzoru Bernoulliego:

$$C_P=\frac{p-p_W}{\frac{1}{2}\rho V_W^2}=1-\left(\frac{V}{V_W}\right)^2$$

Przybliżenie jednowymiarowe, oparte na równaniu ciągłości i równaniu Bernoulliego:

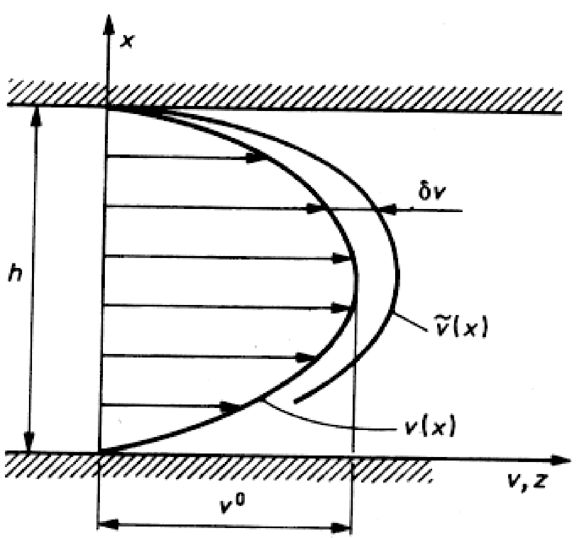
$$V_W A_W=V(x)A(x)$$

$$C_P=1-\left(\frac{A_W}{A(x)}\right)^2$$

Metoda elementów skończonych

Analizowany obszar przepływu jest dzielony na części, tzw. elementy skończone. W wybranych punktach każdego elementu chcemy określić wartości poszukiwanej funkcji, np. prędkości, ciśnienia itp. Rozkład tej funkcji postulujemy w postaci **funkcji bazowej** aproksymującej rozwiązanie. Parametry funkcji aproksymującej ustalamy przy pomocy **metody wariacyjnej.**

Przykładowe rozwiązanie jednowymiarowe – płaski przepływ Poiseuille'a.



Równanie opisujące przepływ:

$$L = \frac{\Delta p}{\Delta z} + \mu \frac{d^2 \upsilon}{dx^2} = 0$$

Jeżeli $\tilde{\upsilon}$ jest rozwiązaniem przybliżonym, to ogólnie: $L(\tilde{\upsilon}) \neq 0$ a miarą błędu jest reszta ważona:

$$R = \int_0^h L(\tilde{\upsilon}) W dx = \int_0^h L(\tilde{\upsilon}) \tilde{\upsilon} dx$$

Warunek stacjonarności funkcjonału R (czyli jego minimalizacji) ma postać:

$$\delta R = \int_0^h L(\tilde{\upsilon})\delta\tilde{\upsilon}\,dx = \int_0^h \left(\frac{\Delta p}{\Delta z}\delta\tilde{\upsilon} - \mu \frac{d\tilde{\upsilon}}{dx}\frac{d\delta\tilde{\upsilon}}{dx} \right) dx = 0$$

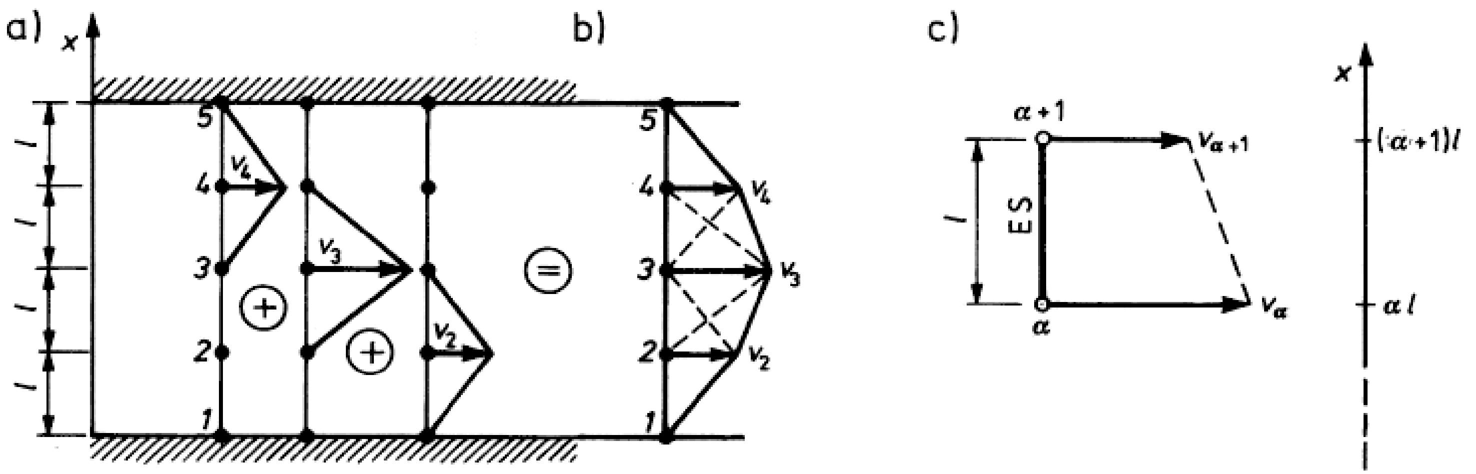
co można zapisać w postaci: $$\mu \int_0^h \frac{d\tilde{\upsilon}}{dx}\frac{d\delta\tilde{\upsilon}}{dx}\,dx = \frac{\Delta p}{\Delta z}\int_0^h \delta\tilde{\upsilon}\,dx$$

Przedział całkowania [0,h] dzielimy na 4 równe odcinki (elementy skończone) o długości l=h/4. Ich końce wyznaczają 5 węzłów. W każdym z nich występuje wartość węzłowa prędkości:

$$\upsilon_\alpha = \upsilon((\alpha - 1)/l) \rightarrow \alpha = 2,3,4$$

W węzłach skrajnych mamy wartości brzegowe:

$$\upsilon_1 = \upsilon_5 = 0$$



Poszukiwane rozwiązanie aproksymujemy lokalnymi funkcjami liniowymi, określonymi w ramach danego elementu skończonego:

$$\tilde{\upsilon}_\alpha = \upsilon_{\alpha-1}(1-x') + \upsilon_\alpha x' \qquad \text{gdzie:} \quad x' = x/l$$

Po wstawieniu lokalnych funkcji bazowych warunek minimalizacji funkcjonału R przybiera postać:

$$\frac{\mu}{l}\sum_1^4 \int_0^1 \frac{d\tilde{\upsilon}}{dx'}\frac{d\delta\tilde{\upsilon}}{dx'}dx' = l\frac{\Delta p}{\Delta z}\sum_1^4\int_0^1 \delta\tilde{\upsilon}dx'$$

co można rozwinąć:

$$\frac{\mu}{l}\int_0^1 \Big\langle \left[\frac{d}{dx'}(\upsilon_2 x')\frac{d}{dx'}(\delta\upsilon_2 x')\right] + \left[\frac{d}{dx}(\upsilon_3 x' + \upsilon_2(1-x'))\frac{d}{dx'}(\delta\upsilon_3 x' + \delta\upsilon_2(1-x'))\right]$$

$$+\left[\frac{d}{dx'}(\upsilon_4 x' + \upsilon_3(1-x'))\frac{d}{dx'}(\delta\upsilon_4 x' + \delta\upsilon_3(1-x'))\right] + \left[\frac{d}{dx'}(\upsilon_4(1-x'))\frac{d}{dx'}(\delta\upsilon_4(1-x'))\right]\Big\rangle dx =$$

$$= l\frac{\Delta p}{\Delta z}\int_0^1 \{\delta(\upsilon_2 x') + \delta(\upsilon_3 x' + \upsilon_2(1-x')) + \delta(\upsilon_4 x' + \upsilon_3(1-x')) + \delta(\upsilon_4(1-x'))\}$$

Po wykonaniu całkowania i uporządkowaniu prowadzi to do układu równań na nieznane wartości węzłowe prędkości:

$$\frac{\mu}{cl^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

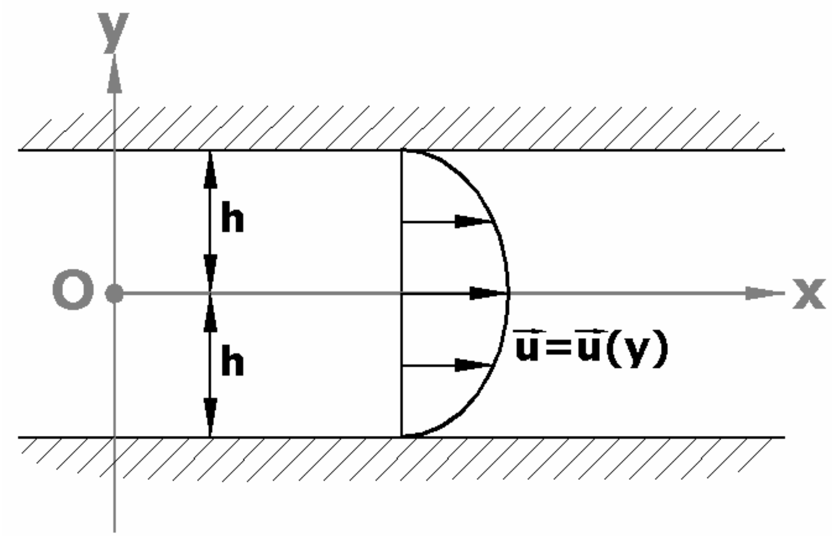
gdzie: $c = \dfrac{\Delta p}{\Delta z}$

Rozwiązanie układu daje następujące wyniki:

$$v_2 = v_4 = \frac{3}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{h^2}{\mu}$$

$$v_3 = \frac{4}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{h^2}{\mu}$$

Rozwiązanie analityczne: Ustalony laminarny przepływ pomiędzy dwoma nieskończonymi równoległymi płytami (przepływ Poiseuille'a)



Dane: $\frac{\Delta p}{\Delta x} = const$

Warunki brzegowe:

$u=0$ dla $y=h$

$u=0$ dla $y=-h$

Równanie Naviera Stokesa przybiera postać: $$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy:

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych, co prowadzi do rozwiązania:

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\left(h^2 - y^2\right)$$

Przejście do definicji przyjętych w rozwiązaniu metodą elementów skończonych:

$$y = x - \frac{H}{2} \qquad h = \frac{H}{2} \qquad \upsilon(x) = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta z}\left(\frac{x}{H} - \frac{x^2}{H^2}\right)$$

$$\upsilon\left(\frac{H}{4}\right) = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta z}\left(\frac{H}{4H} - \frac{H^2}{16H^2}\right) = \frac{3}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{H^2}{\mu}$$

$$\upsilon\left(\frac{3H}{4}\right) = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta z}\left(\frac{3H}{4H} - \frac{9H^2}{16H^2}\right) = \frac{3}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{H^2}{\mu}$$

$$\upsilon\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta z}\left(\frac{H}{2H} - \frac{H^2}{4H^2}\right) = \frac{4}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{H^2}{\mu}$$

Czyli rozwiązanie analityczne jest dokładnie zgodne z rozwiązaniem numerycznym metodą elementów skończonych