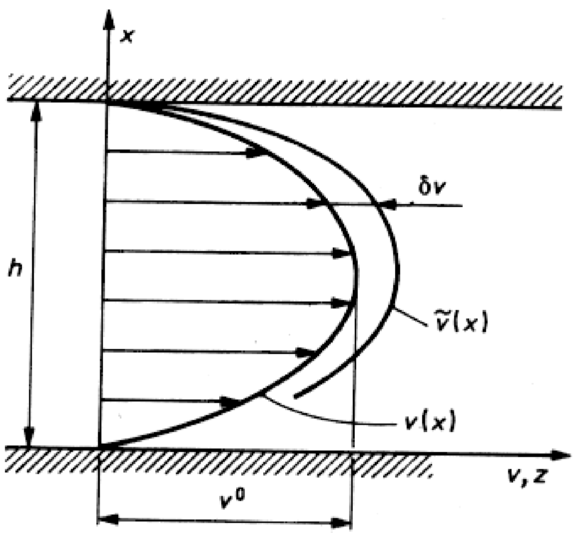
J. Szantyr - Wykład 11 - Wyznaczanie przepływów lepkich - metoda elementów skończonych

Analizowany obszar przepływu jest dzielony na części, tzw. elementy skończone. W wybranych punktach każdego elementu chcemy określić wartości poszukiwanej funkcji, np. prędkości, ciśnienia itp. Rozkład tej funkcji postulujemy w postaci **funkcji bazowej** aproksymującej rozwiązanie. Parametry funkcji aproksymującej ustalamy przy pomocy **metody wariacyjnej.**

Przykładowe rozwiązanie jednowymiarowe – płaski przepływ Poiseuille'a.



Równanie opisujące przepływ:

$$L = \frac{\Delta p}{\Delta z} + \mu \frac{d^2 \upsilon}{dx^2} = 0$$

Jeżeli $\tilde{\upsilon}$ jest rozwiązaniem przybliżonym, to ogólnie: $L(\tilde{\upsilon}) \neq 0$ a miarą błędu jest reszta ważona:

$$R = \int_0^h L(\tilde{\upsilon}) W dx = \int_0^h L(\tilde{\upsilon}) \tilde{\upsilon} dx$$

Warunek stacjonarności funkcjonału R (czyli jego minimalizacji) ma postać:

$$\delta R = \int_0^h L(\tilde{\upsilon})\delta\tilde{\upsilon}dx = \int_0^h \left(\frac{\Delta p}{\Delta z}\delta\tilde{\upsilon} - \mu \frac{d\tilde{\upsilon}}{dx}\frac{d\delta\tilde{\upsilon}}{dx} \right) dx = 0$$

co można zapisać w postaci:

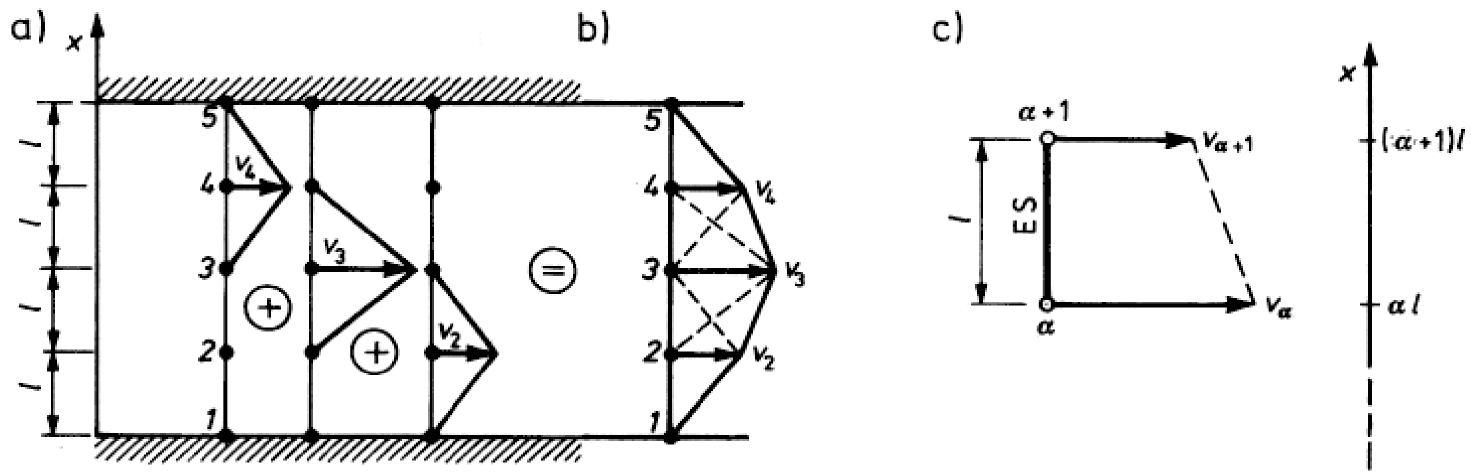
$$\mu \int_0^h \frac{d\tilde{\upsilon}}{dx}\frac{d\delta\tilde{\upsilon}}{dx}dx = \frac{\Delta p}{\Delta z}\int_0^h \delta\tilde{\upsilon}dx$$

Przedział całkowania [0,h] dzielimy na 4 równe odcinki (elementy skończone) o długości l=h/4. Ich końce wyznaczają 5 węzłów. W każdym z nich występuje wartość węzłowa prędkości:

$$\upsilon_\alpha = \upsilon((\alpha - 1)/l) \rightarrow \alpha = 2,3,4$$

W węzłach skrajnych mamy wartości brzegowe:

$$\upsilon_1 = \upsilon_5 = 0$$



Poszukiwane rozwiązanie aproksymujemy lokalnymi funkcjami liniowymi, określonymi w ramach danego elementu skończonego:

$$\tilde{\upsilon}_\alpha = \upsilon_{\alpha-1}(1-x') + \upsilon_\alpha x' \qquad \text{gdzie:} \quad x' = x/l$$

Po wstawieniu lokalnych funkcji bazowych warunek minimalizacji funkcjonału R przybiera postać:

$$\frac{\mu}{l}\sum_1^4 \int_0^1 \frac{d\tilde{\upsilon}}{dx'}\frac{d\delta\tilde{\upsilon}}{dx'}dx' = l\frac{\Delta p}{\Delta z}\sum_1^4\int_0^1 \delta\tilde{\upsilon}dx'$$

co można rozwinąć:

$$\frac{\mu}{l}\int_0^1 \left\langle \left[\frac{d}{dx'}(\upsilon_2 x')\frac{d}{dx'}(\delta\upsilon_2 x')\right] + \left[\frac{d}{dx}(\upsilon_3 x' + \upsilon_2(1-x'))\frac{d}{dx'}(\delta\upsilon_3 x' + \delta\upsilon_2(1-x'))\right]\right.$$

$$\left. + \left[\frac{d}{dx'}(\upsilon_4 x' + \upsilon_3(1-x'))\frac{d}{dx'}(\delta\upsilon_4 x' + \delta\upsilon_3(1-x'))\right] + \left[\frac{d}{dx'}(\upsilon_4(1-x'))\frac{d}{dx'}(\delta\upsilon_4(1-x'))\right] \right\rangle dx =$$

$$= l\frac{\Delta p}{\Delta z}\int_0^1 \{\delta(\upsilon_2 x') + \delta(\upsilon_3 x' + \upsilon_2(1-x')) + \delta(\upsilon_4 x' + \upsilon_3(1-x')) + \delta(\upsilon_4(1-x'))\}$$

Po wykonaniu całkowania i uporządkowaniu prowadzi to do układu równań na nieznane wartości węzłowe prędkości:

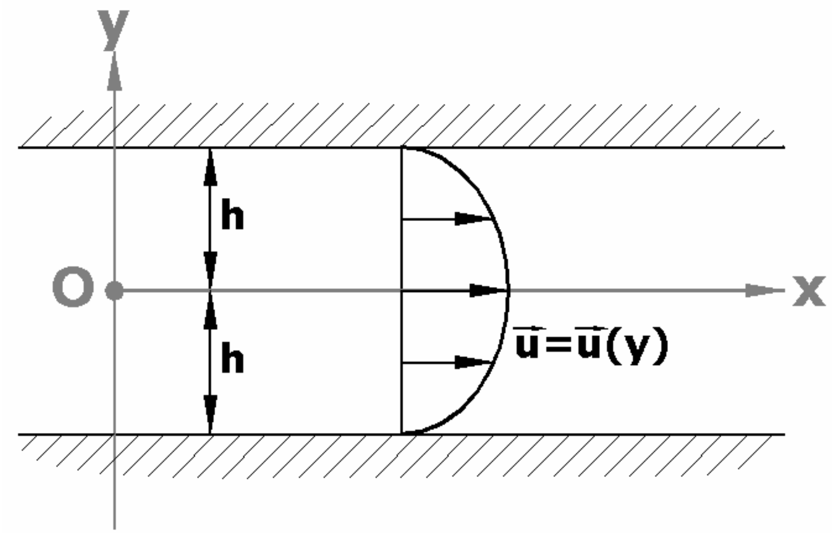
$$\frac{\mu}{cl^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{gdzie:} \qquad c = \frac{\Delta p}{\Delta z}$$

Rozwiązanie układu daje następujące wyniki:

$$v_2 = v_4 = \frac{3}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{h^2}{\mu}$$

$$v_3 = \frac{4}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{h^2}{\mu}$$

Rozwiązanie analityczne: Ustalony laminarny przepływ pomiędzy dwoma nieskończonymi równoległymi płytami (przepływ Poiseuille'a)



Dane: $\frac{\Delta p}{\Delta x} = const$

Warunki brzegowe:

u=0 dla *y=h*

u=0 dla *y=-h*

Równanie Naviera Stokesa przybiera postać: $$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy:

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych, co prowadzi do rozwiązania:

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\left(h^2 - y^2\right)$$

Przejście do definicji przyjętych w rozwiązaniu metodą elementów skończonych:

$$y = x - \frac{H}{2} \qquad h = \frac{H}{2} \qquad \upsilon(x) = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta z}\left(\frac{x}{H} - \frac{x^2}{H^2}\right)$$

$$\upsilon\left(\frac{H}{4}\right) = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta z}\left(\frac{H}{4H} - \frac{H^2}{16H^2}\right) = \frac{3}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{H^2}{\mu}$$

$$\upsilon\left(\frac{3H}{4}\right) = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta z}\left(\frac{3H}{4H} - \frac{9H^2}{16H^2}\right) = \frac{3}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{H^2}{\mu}$$

$$\upsilon\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta z}\left(\frac{H}{2H} - \frac{H^2}{4H^2}\right) = \frac{4}{32}\frac{\Delta p}{\Delta z}\frac{H^2}{\mu}$$

Czyli rozwiązanie analityczne jest dokładnie zgodne z rozwiązaniem numerycznym metodą elementów skończonych