

J. Szantyr - Wykład 13 – Podstawy teoretyczne i modelowanie turbulencji

Matematycznym opisem turbulentnego ruchu płynu są **równania Reynoldsa**. Reynolds założył, że w przepływie turbulentnym wszystkie charakteryzujące go parametry, w tym prędkość i ciśnienie płynu mogą być przedstawione w postaci sum ich wartości średnich (ściślej: wolnozmiennych) oraz fluktuacji turbulentnych, czyli:

$$\bar{u} = \bar{U} + \bar{u}' \quad p = P + p'$$

gdzie U jest prędkością przepływu uśrednionego

$$\bar{U} = \bar{i}U + \bar{j}V + \bar{k}W$$

a u' jest turbulentną fluktuacją prędkości

$$\bar{u}' = \bar{i}u' + \bar{j}v' + \bar{k}w'$$



Osborne Reynolds
1842 - 1912

Podstawienie tak zapisanych prędkości i ciśnienia do równania Naviera-Stokesa prowadzi do ujawnienia nowych sił powierzchniowych, zwanych **naprężeniami turbulentnymi**:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \operatorname{divgrad} U + \rho \left[-\frac{\partial \tilde{u}'^2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}'\tilde{v}'}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{u}'\tilde{w}'}{\partial z} \right]$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \operatorname{divgrad} V + \rho \left[-\frac{\partial \tilde{u}'\tilde{v}'}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}'^2}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}'\tilde{w}'}{\partial z} \right]$$

$$\rho \frac{DW}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \operatorname{divgrad} W + \rho \left[-\frac{\partial \tilde{u}'\tilde{w}'}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}'\tilde{w}'}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{w}'^2}{\partial z} \right]$$

Powyższe równania odnoszą się do przepływu płynu nieściśliwego

Naprężenia normalne:

$$\tau_{xx} = -\rho \tilde{u}'^2 \quad \tau_{yy} = -\rho \tilde{v}'^2 \quad \tau_{zz} = -\rho \tilde{w}'^2$$

Naprężenia styczne (ścinające): $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \tilde{u}' \tilde{v}'$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho \tilde{u}' \tilde{w}' \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho \tilde{v}' \tilde{w}'$$

Naprężenia turbulentne, zwane także naprężeniami Reynoldsa, są zależne od wartości turbulentnych fluktuacji prędkości przepływu a nie od lepkości płynu. Można wykazać, że tworzą one symetryczny tensor naprężeń. Stanowią one dodatkowe 6 niewiadomych w układzie równań Reynoldsa opisującym turbulentny ruch płynu. Aby zredukować liczbę niewiadomych i zamknąć układ równań konieczne jest wprowadzenie odpowiednich **modeli turbulencji**. Równanie Reynoldsa stanowi podstawę większości komercyjnych kodów obliczeniowych z obszaru numerycznej mechaniki płynów.

Hipoteza Boussinesq'a (1877)

Boussinesq założył, że naprężenia turbulentne Reynoldsa mogą być powiązane z tensorem **średnich** prędkości deformacji w sposób podobny jak model płynu Newtona wiąże naprężenia lepkościowe z tym tensorem. Różnica polega na tym, że w przypadku naprężeń turbulentnych współczynnikiem proporcjonalności jest dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej μ_t . Ten współczynnik nie jest cechą fizyczną płynu, lecz cechą przepływu zależną od charakteru turbulencji.

$$\tau_{ij} = -\rho u'_i u'_j = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Hipoteza Boussinesq'a ma racjonalne podstawy, gdyż tam gdzie występują większe gradienty prędkości średnich dochodzi również do bardziej intensywnej generacji turbulencji.



Joseph Boussinesq
1842 - 1929

Tensor symetryczny opisujący deformację elementu płynu nosi nazwę tensora prędkości deformacji:

$$[D] = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

gdzie poszczególne składowe wyrażają się zależnościami:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} & \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} & \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} & \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Boussinesq założył, że współczynnik lepkości turbulentnej jest skalarem, podczas gdy turbulentny stan naprężeń w płynie jest silnie trójwymiarowy i aby to w sposób pełny opisać **współczynnik lepkości turbulentnej powinien być tensorem.**

Można powiedzieć, że hipoteza Boussinesq'a tworzy nowy model płynu – **płyn turbulentny.**

Ogólna zasada tworzenia modeli turbulencji

Większość modeli turbulencji wykorzystuje hipotezę Boussinesq'a. Wtedy celem modelowania jest określenie wartości współczynnika lepkości turbulentnej. Wartość ta jest poszukiwana w ogólnej postaci:

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

Przedmiotem modelowania jest zarówno postać zależności funkcyjnej f jak i zależności określające wartości argumentów y w odpowiednich punktach obszaru przepływu. W zależności od liczby równań określających te parametry mówimy o modelach zerorównaniowych, jednorównaniowych, dwurównaniowych itd..

Model zerównaniowy- droga mieszania Prandtla

Droga mieszania – hipotetyczna odległość, na której dochodzi do kompletnej wymiany pędu pomiędzy elementami płynu na skutek działania naprężeń turbulentnych. Prandtl uważał ją za analog średniej drogi swobodnej cząstek w gazach. Obecnie uważamy ją za uśrednioną charakterystykę turbulentnego mieszania płynu.

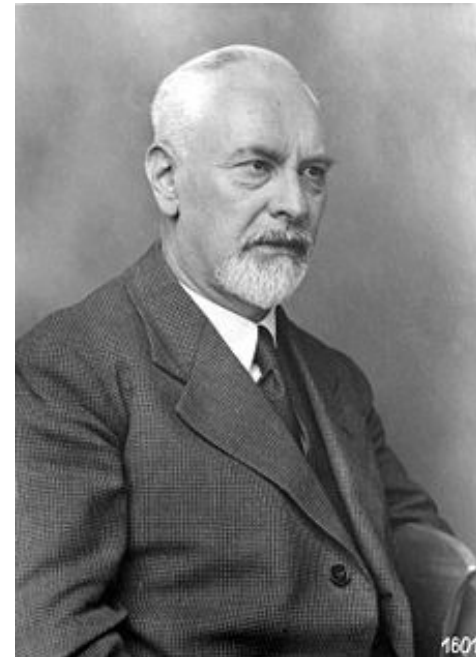
W przepływie dwuwymiarowym mamy:

$$\tau_{xy} = \rho \cdot l_m^2 \cdot \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \quad \begin{array}{l} \text{Naprężenie} \\ \text{ścinające} \end{array}$$

Czyli:

$$\nu_t = l_m^2 \cdot \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Kinematyczny} \\ \text{współczynnik} \\ \text{lepkości turbulentnej} \end{array}$$

Gdzie: l_m - droga mieszania



Ludwig Prandtl
1875 - 1929

W przepływie dwuwymiarowym wartość drogi mieszania określają zależności empiryczne, na przykład:

Wypływ: $l_m = 0,09 \cdot L$

L – połowa szerokości strumienia

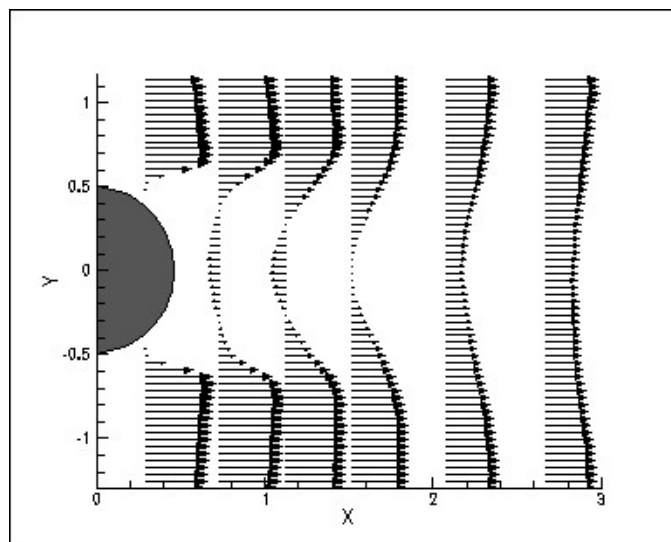
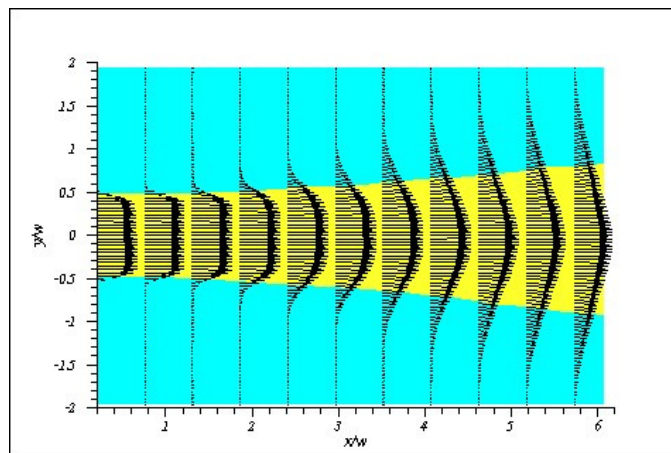
Ślad: $l_m = 0,16 \cdot L$

L – połowa szerokości śladu

Kanał o szerokości $2L$
lub rura o promieniu L

$$l_m = L \cdot \left[0,14 - 0,08 \cdot \left(1 - \frac{y}{L} \right)^2 - 0,06 \cdot \left(1 - \frac{y}{L} \right)^4 \right]$$

Można rozwinąć model zerorównaniowy na przepływu trójwymiarowe



Zalety modelu zerorównaniowego:

- Łatwy do zastosowania i „tani” w sensie obliczeniowym
- Daje dobre wyniki dla cienkich warstw ścinających, wpływów z otworów i śladów za opływającymi obiektami
- Dobrze ugruntowany – zebrano ogromne doświadczenie w jego stosowaniu

Wady modelu zerorównaniowego:

- Nie uwzględnia „historii” przepływu
- Nie bierze pod uwagę energii kinetycznej turbulencji
- Zawodzi w przypadku przepływów z oderwaniem i recyrkulacją

Model jednorównaniowy

Model ten uzależnia kinematyczny współczynnik lepkości turbulentnej od energii kinetycznej turbulencji k . Energia ta jest wyznaczana ze dodatkowego równania, które musi być rozwiązywane razem z równaniami Reynoldsa i równaniem zachowania masy.

$$\nu_t = l_m \cdot k^{\frac{1}{2}}$$

Współczynnik
lepkości
turbulentnej

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \sum_i U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{ij} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{k2} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}$$

Równanie opisujące zmienność
energii kinetycznej turbulencji w
przestrzeni

Interpretacja fizyczna równania energii kinetycznej turbulencji jest następująca:

$$A+B=C+D+E$$

A – lokalna zmiana k

B – konwekcyjna zmiana k

C – transport k na drodze dyfuzji

D – „produkcja” k przez deformacje pola prędkości

E – dyssypacja energii kinetycznej turbulencji

Wielkości l , C_{k2} , σ_k są stałymi określonymi empirycznie

W porównaniu z modelem zerorównaniowym model jednorównaniowy pozwala uwzględnić historię zmian kinetycznej energii turbulencji w przepływie

Model dwurównaniowy (1974)

Model dwurównaniowy wprowadza **dwa dodatkowe** równania: na energię kinetyczną turbulencji k oraz na prędkość jej dyssypacji ε . Równania te muszą być rozwiązywane łącznie z równaniami Reynoldsa i równaniem zachowania masy. Powyższe dwa równania mogą być wyprowadzone teoretycznie z równania Naviera-Stokesa i równania Reynoldsa, wymagają jednak uzupełnienia współczynnikami empirycznymi. W modelu standardowym k - ε równania te mają postać:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho k \bar{U}) = \operatorname{div}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \operatorname{grad} k\right) + 2\mu_t E_{ij} E_{ij} \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \bar{U}) = \operatorname{div}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon\right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Gdzie:
$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Interpretacja fizyczna obu równań jest podobna: $A=B=C+D+E$

A – lokalna zmiana k lub ε

B – konwekcyjna zmiana k lub ε

C – transport k lub ε na drodze dyfuzji

D – produkcja k lub ε przez uśrednione prędkości deformacji

E – dyssypacja k lub ε

Następujące współczynniki są ustalone empirycznie:

$$C_\mu = 0,09 \quad \sigma_k = 1,0 \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad C_{1\varepsilon} = 1,44 \quad C_{2\varepsilon} = 1,92$$

$$\mu_t = \rho \cdot C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \begin{array}{l} \text{Dynamiczny współczynnik} \\ \text{lepkości turbulentnej} \end{array}$$

Odmianą modelu dwurównaniowego jest model k -omega, gdzie: $\omega \approx \frac{k}{\varepsilon}$

Zalety modelu dwurównaniowego:

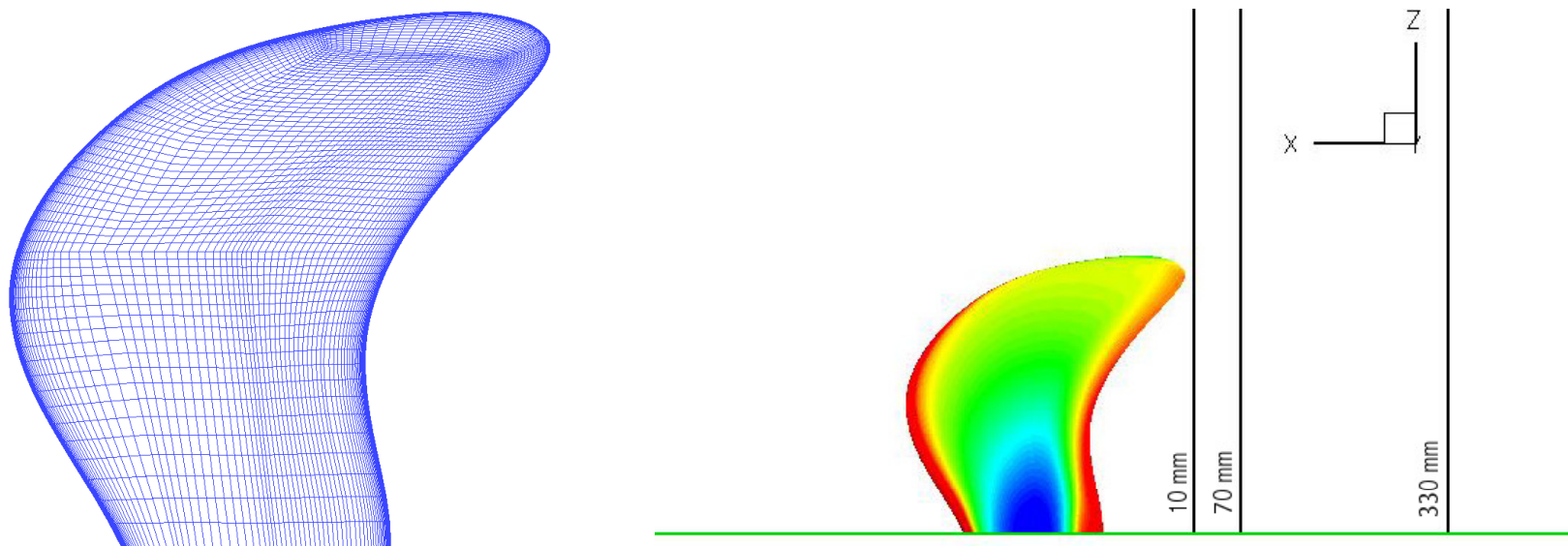
- Najprostszy „prawdziwy” model turbulencji
- Daje bardzo dobre wyniki dla wielu realistycznych przepływów o znaczeniu technicznym
- Jeden z najlepiej zweryfikowanych modeli

Wady modelu dwurównaniowego:

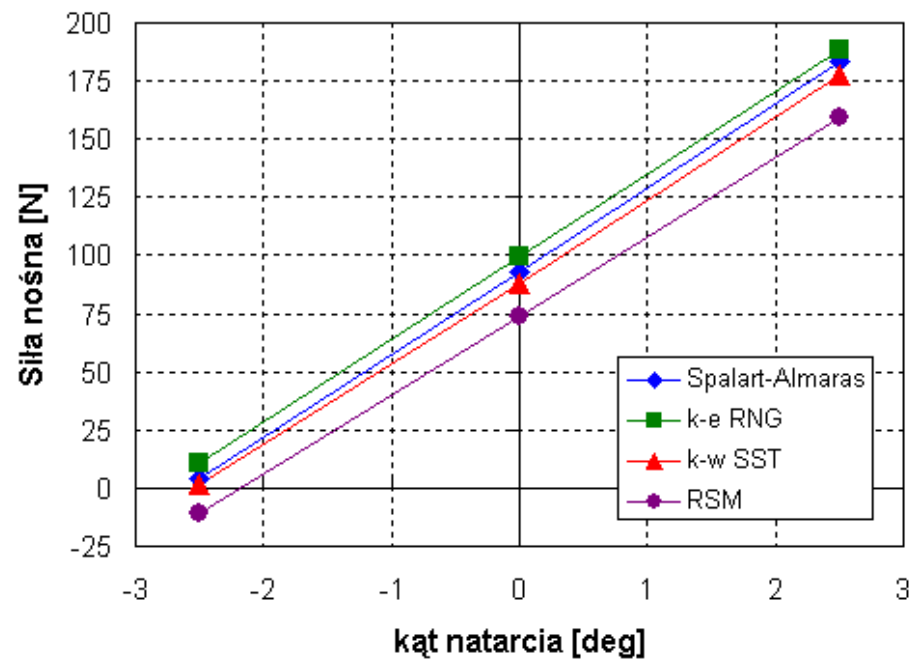
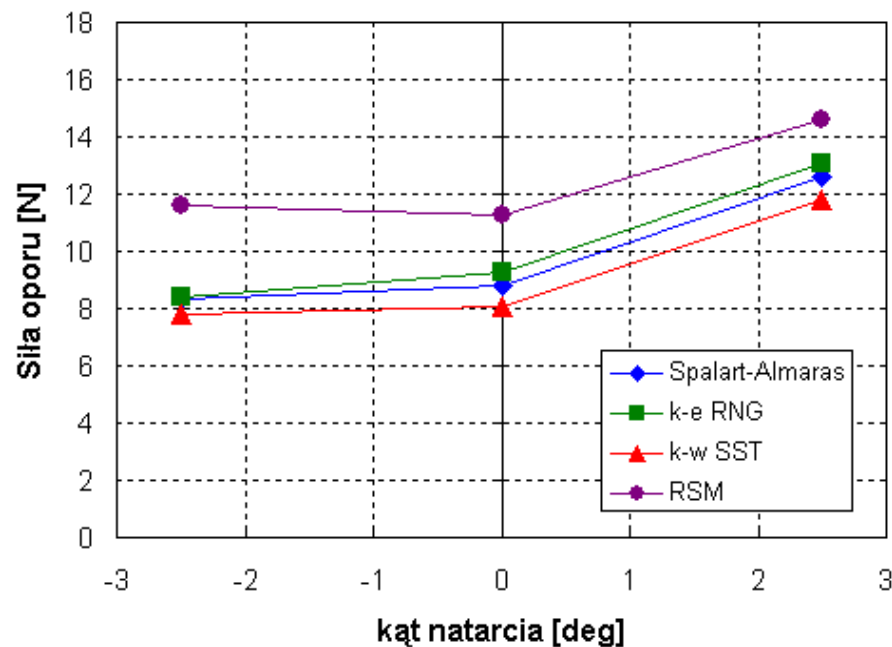
- Bardziej „kosztowny” od modelu drogi mieszania
- Słabe wyniki dla szeregu technicznie ważnych przepływów, takich jak: przepływu zdominowane przez wirowość, przepływy o bardzo wysokich naprężeniach ścinających itp..

Część wad modelu dwurównaniowego (przede wszystkim jego izotropowość) eliminuje modelowanie naprężeń Reynoldsa wprost (RSM – Reynolds Stress Modelling), wymagające **siedmiu równań**.

Przykład zastosowania różnych modeli turbulencji do konkretnego problemu obliczeniowego

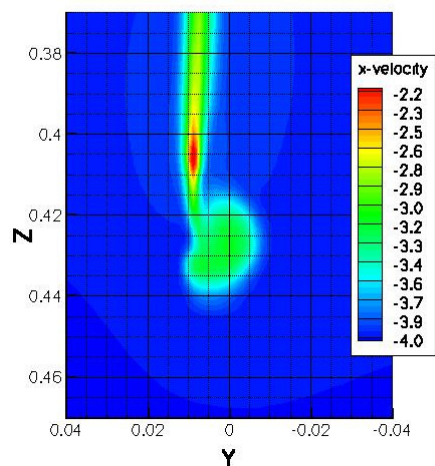


Zadanie obliczeniowe polega na wyznaczeniu prędkości przepływu w śladzie za płatem nośnym w przekrojach oddalonych o 10, 70 i 330 mm od krawędzi spływu. Zastosowano cztery modele turbulencji: jednorównaniowy (Spalart-Allmaras), dwurównaniowe k-epsilon RNG i k-omega SST oraz siedmiorównaniowy RSM (Reynolds Stress Method)

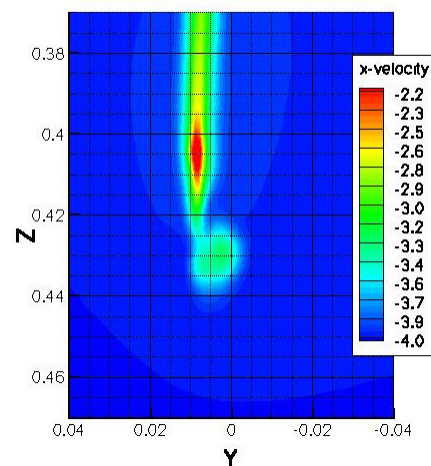


Zależności siły oporu i siły nośnej na płacie od kąta natarcia płata, wyznaczone obliczeniowo przy zastosowaniu różnych modeli turbulencji

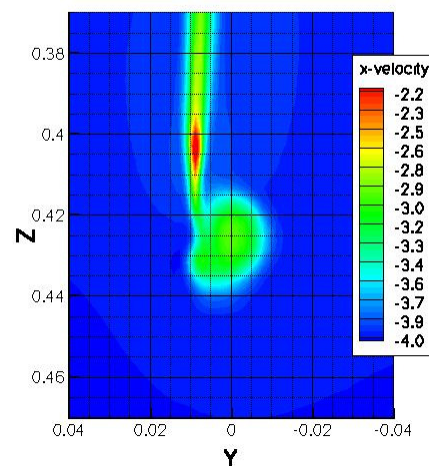
Osiowa składowa prędkości w przekroju 10 mm za płatem



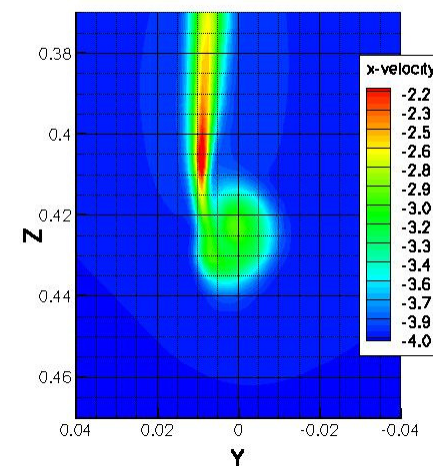
Spalart



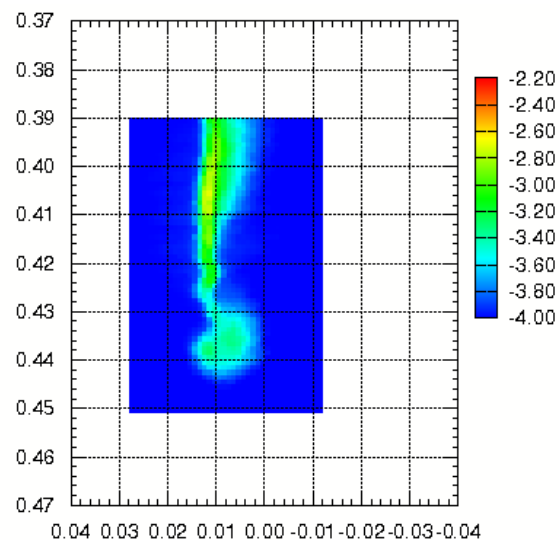
k-epsilon



k-omega

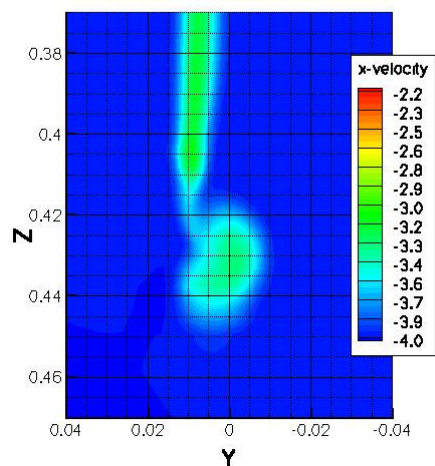


RSM

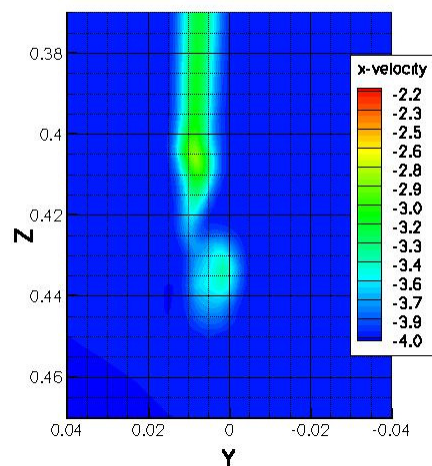


<- Wyniki pomiarów anemometrem laserowym

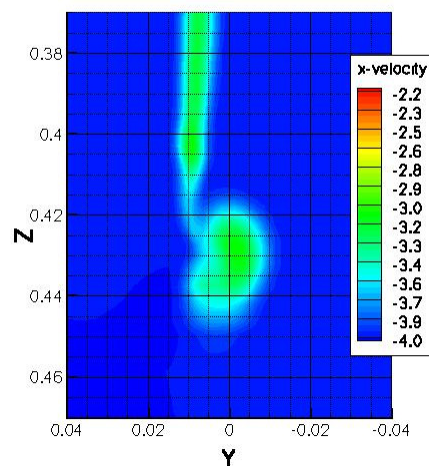
Osiowa składowa prędkości w przekroju 70 mm za płatem



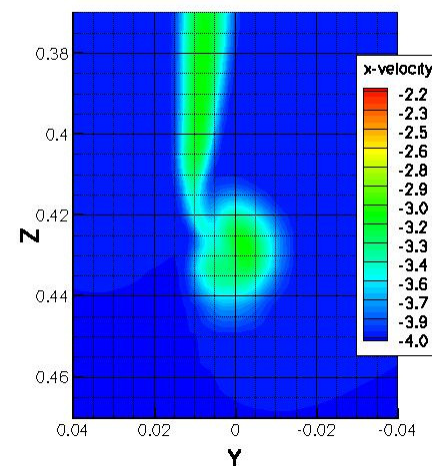
Spalart



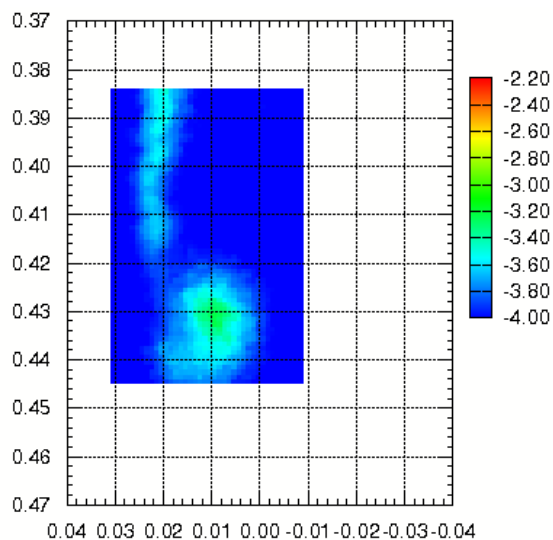
k-epsilon



k-omega

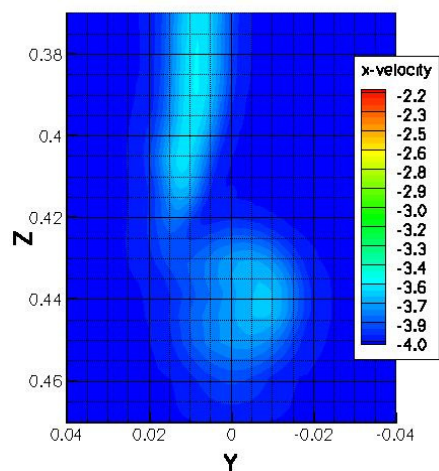


RSM

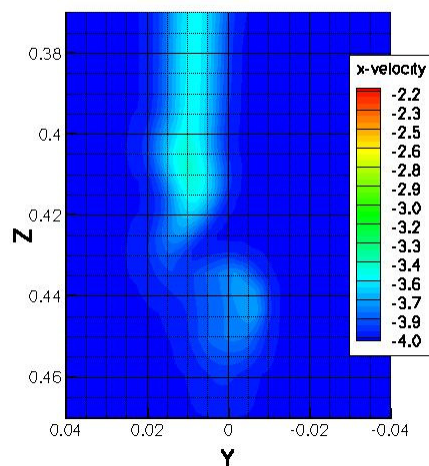


<-Wyniki pomiarów anemometrem laserowym

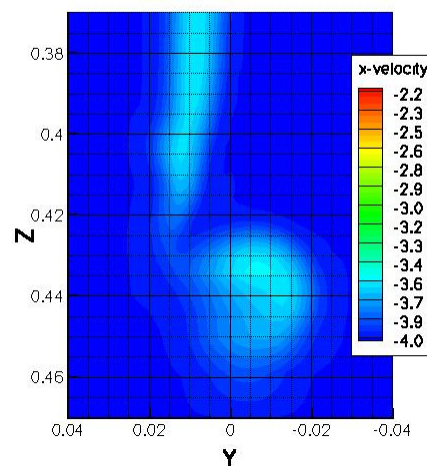
Osiowa składowa prędkości w przekroju 330 mm za płatem



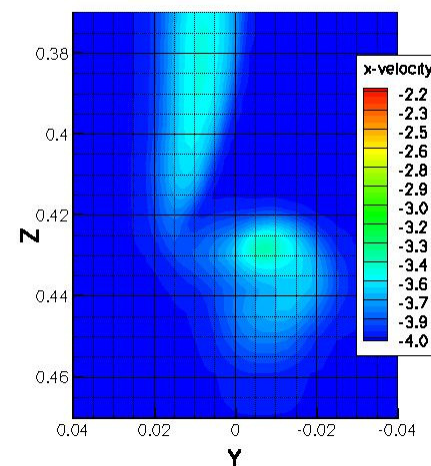
Spalart



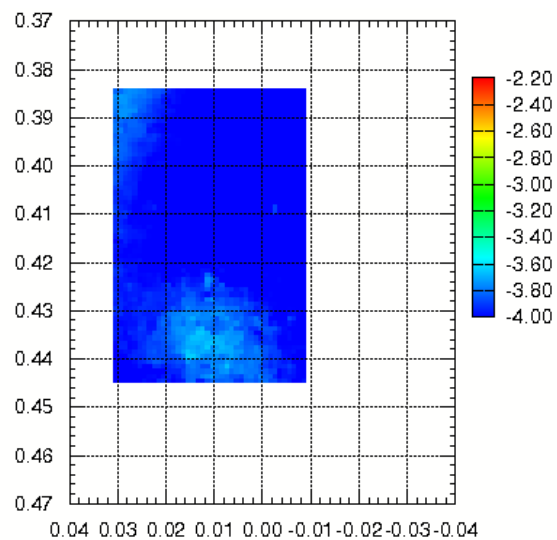
k-epsilon



k-omega



RSM



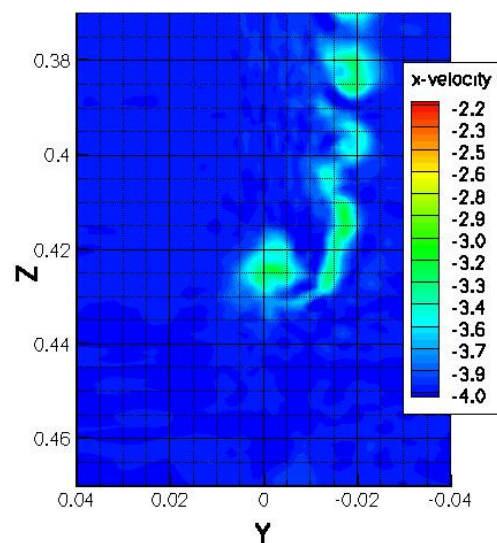
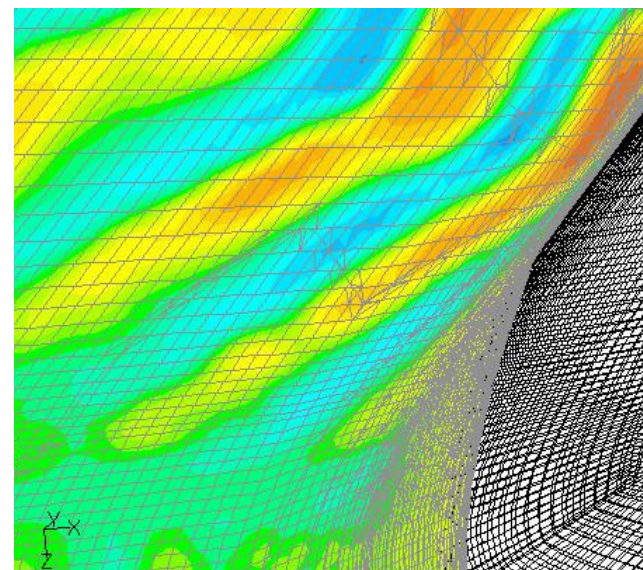
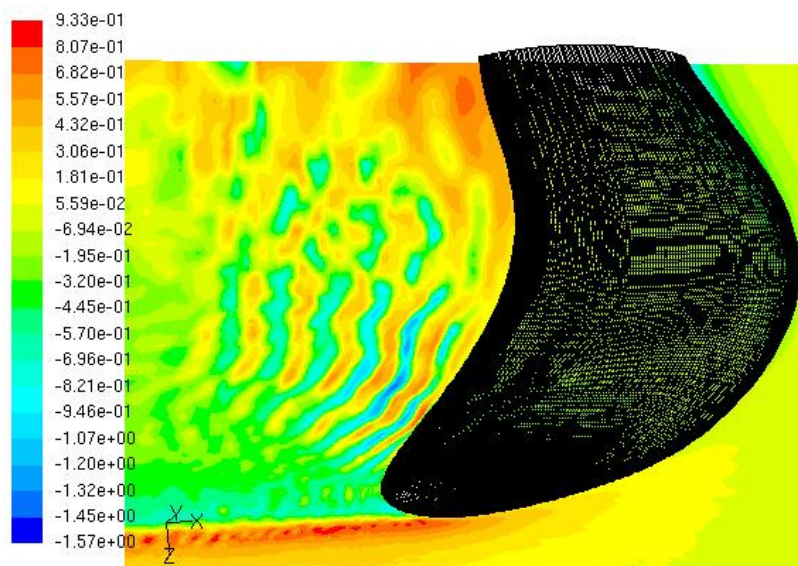
<-Wyniki pomiarów anemometrem laserowym

Alternatywą do stosowania równań Reynoldsa wraz z modelami turbulencji (czyli metody RANSE) są podejścia LES (Large Eddy Simulation) lub DNS (Direct Numerical Simulation).

Metoda LES polega na numerycznej symulacji dużych, koherentnych struktur wirowych i ograniczeniu stosowania modeli turbulencji do małych skal turbulencji (poniżej gęstości siatki obliczeniowej). Wymaga ona większej pamięci komputera i dłuższych czasów obliczeń.

Metoda DNS polega na zastosowaniu bezpośredniej symulacji numerycznej całej kaskady wirów Kołmogorowa aż do najdrobniejszych skal turbulencji. Jej zastosowanie wymaga bardzo dużych zasobów obliczeniowych i obecnie nie jest jeszcze stosowane do rozwiązywania praktycznych problemów technicznych

Przepływ za płatem obliczony metodą LES – widoczne symulowane numerycznie duże, koherentne struktury wirowe



Prędkość wzdłużna w
przekroju 700 mm za płatem
← obraz chwilowy
obraz uśredniony w czasie →

