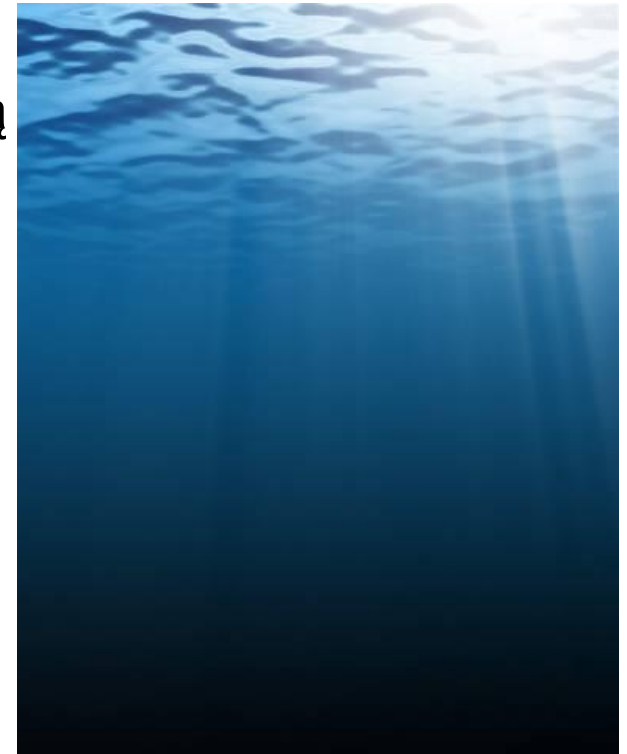


J. Szantyr – Wykład 14 – Modelowanie przepływów ze swobodnymi granicami

Swobodna granica obszaru przepływu to najczęściej powierzchnia rozdziału pomiędzy cieczą a gazem. Na powierzchni tej często występują fale grawitacyjne, spowodowane ruchem gazu (wiatr) lub ruchem ciał stałych w cieczy. W ramach liniowego modelu dwuwymiarowego falowania równanie sfalowanej powierzchni ma postać:



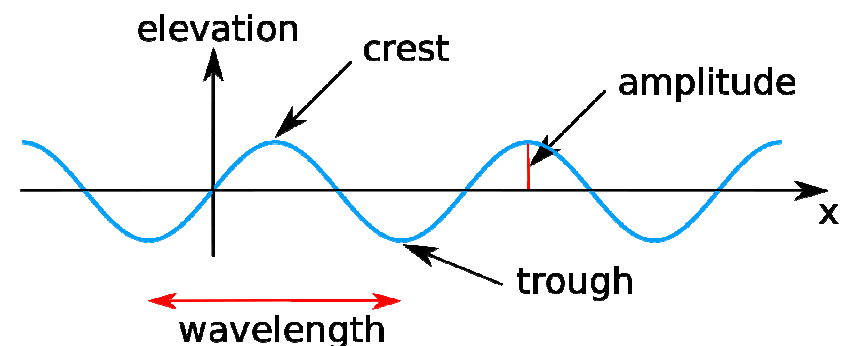
$$\eta(x, t) = a \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

gdzie: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$ - liczba falowa

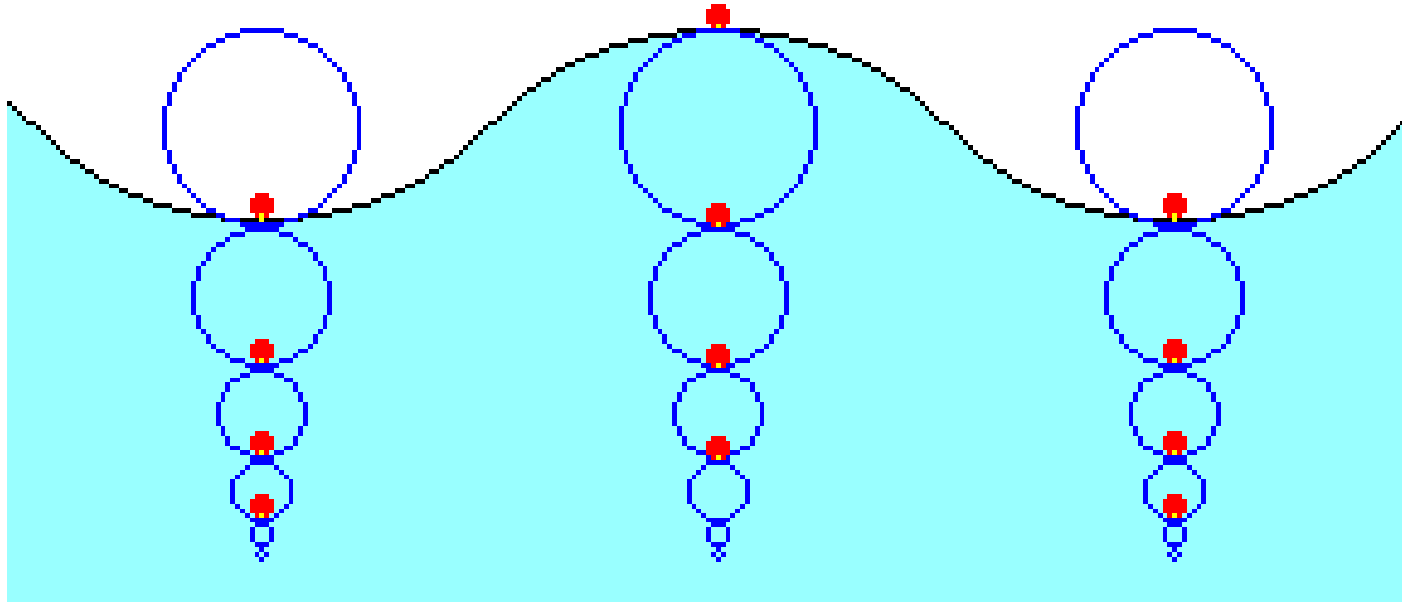
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$ - częstość kołowa fali

λ – długość fali T – okres fali

a – amplituda fali



Najprostsza teoria dwuwymiarowego falowania to teoria Airy'ego



Teoria Airy'ego opisuje falę biegnącą o profilu sinusoidalnym.

George Biddle Airy 1801 - 1892



Dwuwymiarowe falowanie regularne można opisać potencjałem prędkości:

$$\Phi(x, z, t) = -\frac{g \cdot a}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k \cdot (h - z)]}{\cosh(k \cdot h)} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

Gdzie: $\cosh(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$ h – głębokość akwenu z – współrzędna liczona w dół od swobodnej powierzchni

Prędkość fazowa fali na akwencie głębokim: $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}} = "A"$

Prędkość fazowa fali na akwencie płytkim: $c = \sqrt{g \cdot h} = "A"$

Prędkość grupowa fali na akwencie głębokim: $c_g = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2} \cdot c = "B"$

Prędkość grupowa fali na akwencie płytkim: $c_g = c = \sqrt{g \cdot h} = "B"$

Ciśnienie wewnątrz fali na akwencie głębokim: $p = \rho \cdot g \cdot a \cdot \frac{\cosh[k \cdot (h - z)]}{\cosh(k \cdot h)} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$

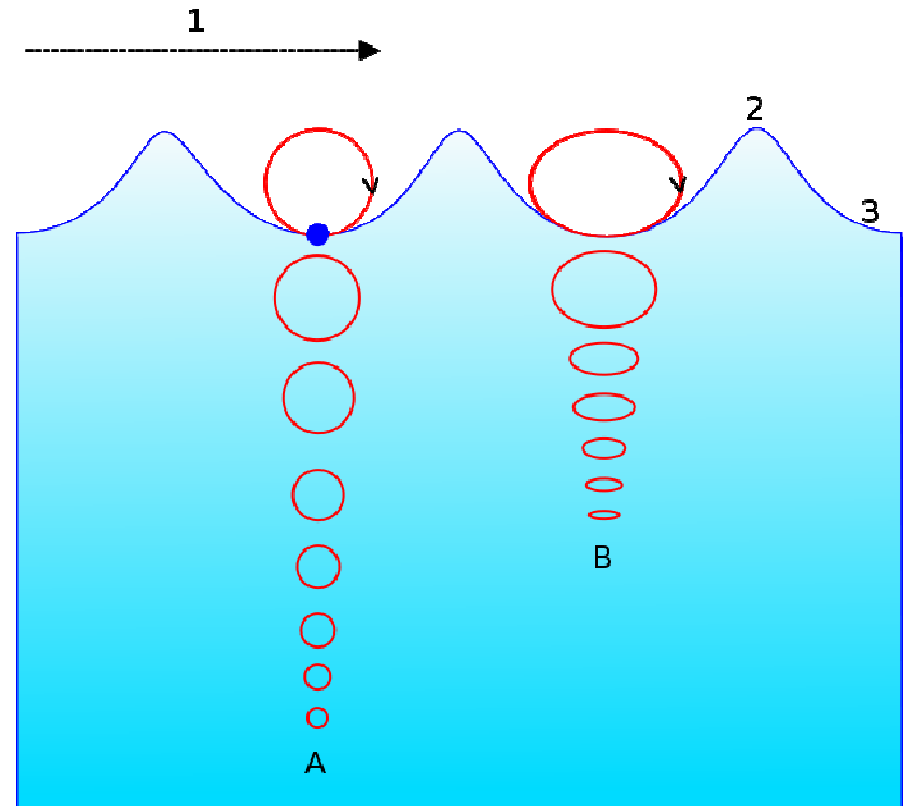
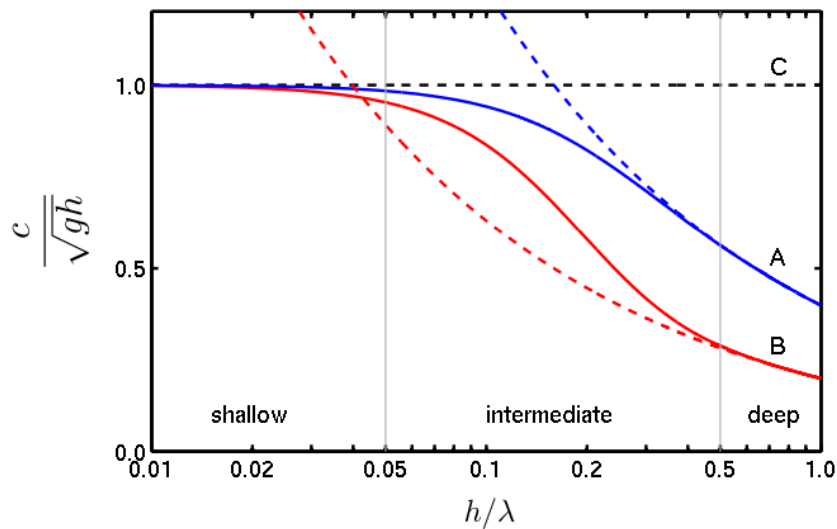
Ciśnienie wewnątrz fali na akwencie płytkim: $p = \rho \cdot g \cdot a \cdot e^{-kz} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$

Energia fali (na jednostkę powierzchni):

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot a^2 + \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot a^2$$

Akwen można uznać za głęboki gdy jego głębokość jest większa od połowy długości fali:

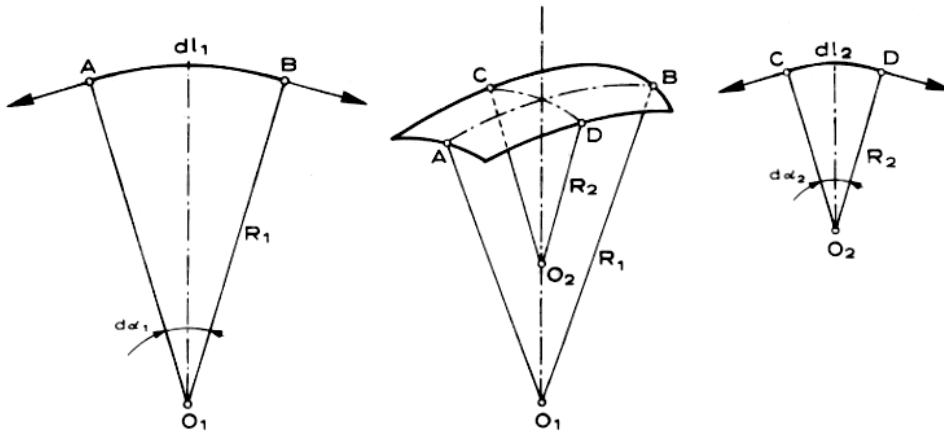
$$h \geq \frac{1}{2} \cdot \lambda$$



Zmiana prędkości fazowej fal i prędkości grupowej przy przejściu z akwenu płytkiego na akwen głęboki

Porównanie trajektorii cząsteczek cieczy przy falowaniu na akwenu o nieograniczonej głębokości i na akwenu płytkim.

Fale kapilarne czyli fale pod wpływem napięcia powierzchniowego



W przypadku uwzględnienia napięcia powierzchniowego działającego na powierzchni rozdziału pomiędzy cieczą i gazem dynamiczny warunek brzegowy na tej powierzchni przybiera postać:

$$p - p_a = f_{la} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Gdzie: f_{la} - napięcie powierzchniowe, dla woda/powietrze jest: $f_{la} = 0,072 [N/m]$

Wtedy w ramach liniowego modelu falowania uzyskamy zależności:

Prędkość fazowa na wodzie głębokiej:
$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} + \frac{2 \cdot \pi \cdot f_{la}}{\rho \cdot \lambda}}$$

Wpływ napięcia powierzchniowego na prędkość i częstość:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{c - c_0}{c_0} = \sqrt{1 + \frac{f_{la}}{g \cdot \rho} \cdot k^2} - 1$$

Wpływ napięcia powierzchniowego na fale ponad powierzchniowe staje się znaczący dla fal o długości poniżej 0,12 [m] i prędkości rozchodzenia poniżej 0,43 [m/s]. Mówimy wtedy o falach kapilarnych.

Numeryczne wyznaczanie przepływów ze swobodną powierzchnią

Z reguły kształt i położenie swobodnej powierzchni są znane jedynie w chwili początkowej. W kolejnych chwilach muszą być wyznaczane jako część rozwiązania. Przy pominięciu przemiany fazowej na swobodnej powierzchni mamy warunki brzegowe:

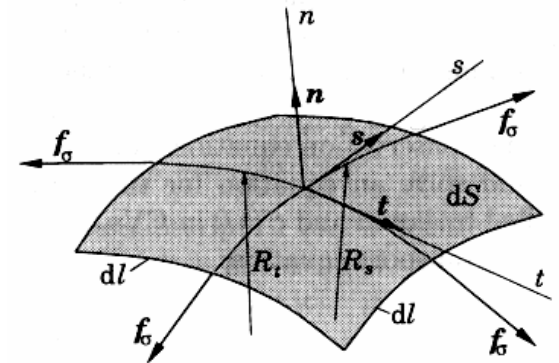
Kinematyczny warunek brzegowy: **brak przepływu przez powierzchnię rozdziału**, czyli
$$\left[(\bar{v} - \bar{v}_{fs}) \cdot \bar{n} \right]_{fs} = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{m}_{fs} = 0$$

Dynamiczny warunek brzegowy: **siły na powierzchni są w równowadze**, czyli

$$\bar{F}_c \cdot \bar{n} = \bar{F}_g \cdot \bar{n} + f_{la} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\bar{F}_c \cdot \bar{t} = \bar{F}_g \cdot \bar{t} + \frac{\partial f_{la}}{\partial t}$$

$$\bar{F}_c \cdot \bar{s} = \bar{F}_g \cdot \bar{s} + \frac{\partial f_{la}}{\partial s}$$



W przypadku znacznych gradientów temperatury na powierzchni wartość napięcia powierzchniowego będzie się zmieniać, co spowoduje powstanie sił stycznych i wywoła przepływ wzdłuż powierzchni od rejonu „ciepłego” do rejonu „zimnego”.

Istnieją dwie grupy metod numerycznych pozwalających na wyznaczanie kształtu swobodnej powierzchni:

Metody wyznaczania granicy (Interface Capturing Methods)

W tym przypadku obliczenia są wykonywane na stałej sieci dyskretnej (np. objętości skończonych), która rozciąga się poza początkowe położenie swobodnej powierzchni. Kolejne położenia swobodnej powierzchni są wyznaczane albo poprzez śledzenie ruchu nieważkich cząstek ulokowanych w cieczy w pobliżu powierzchni (Marker and Cell Method - MAC), albo poprzez rozwiązywanie dodatkowego równania transportu dla stopnia „próżni” w fazie ciekłej (Volume of Fluid Method - VOF). Metoda MAC jest bardzo prosta ale wymaga zaangażowania dużych mocy obliczeniowych dla śledzenia ruchu dużej liczby cząstek. W metodzie VOF w uzupełnieniu równania zachowania masy i równania zachowanie pędu rozwiązuje się równanie transportu dla parametru

C:

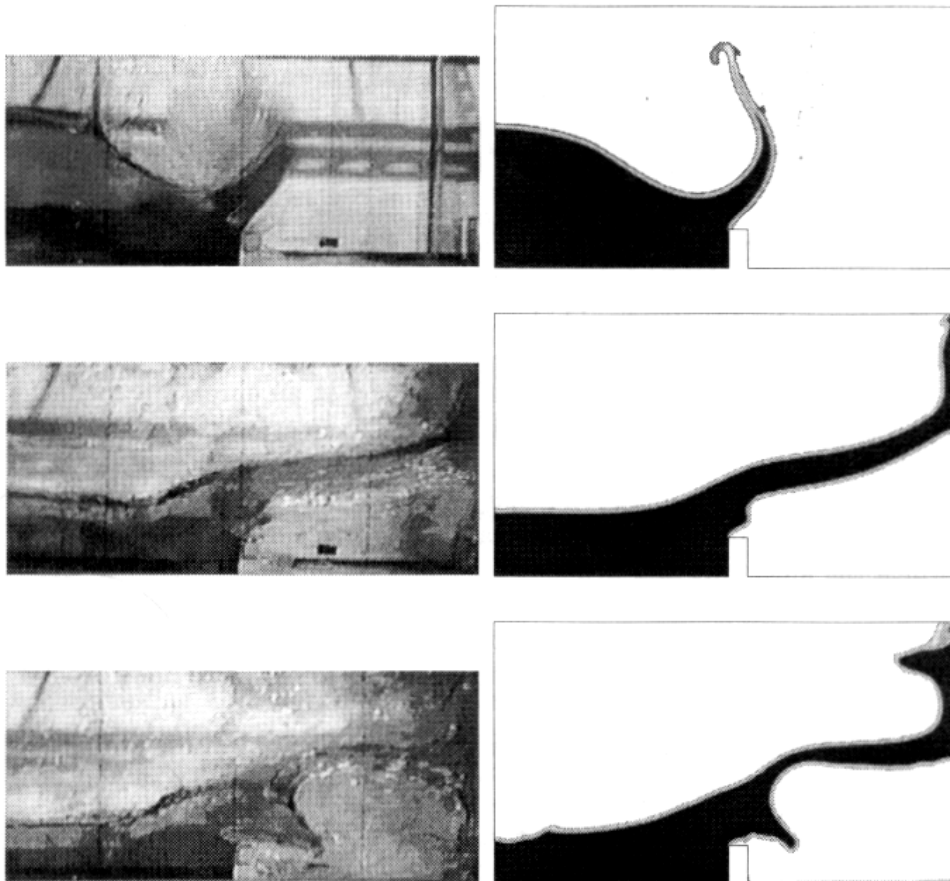
$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C \bar{v}) = 0$$

Gdzie $C=1$ oznacza objętość skończona w całości wypełnioną cieczą, a $C=0$ – objętość w całości wypełnioną gazem. Swobodna powierzchnia jest konturem, gdzie $C=0,5$. Metoda VOF nie daje „ostrej” definicji położenia swobodnej powierzchni – z reguły jest ona „rozmazana” przez 2 -3 objętości skończone. Problem ten może być złagodzony przez dodatkowe zagęszczenie sieci w sąsiedztwie swobodnej powierzchni.

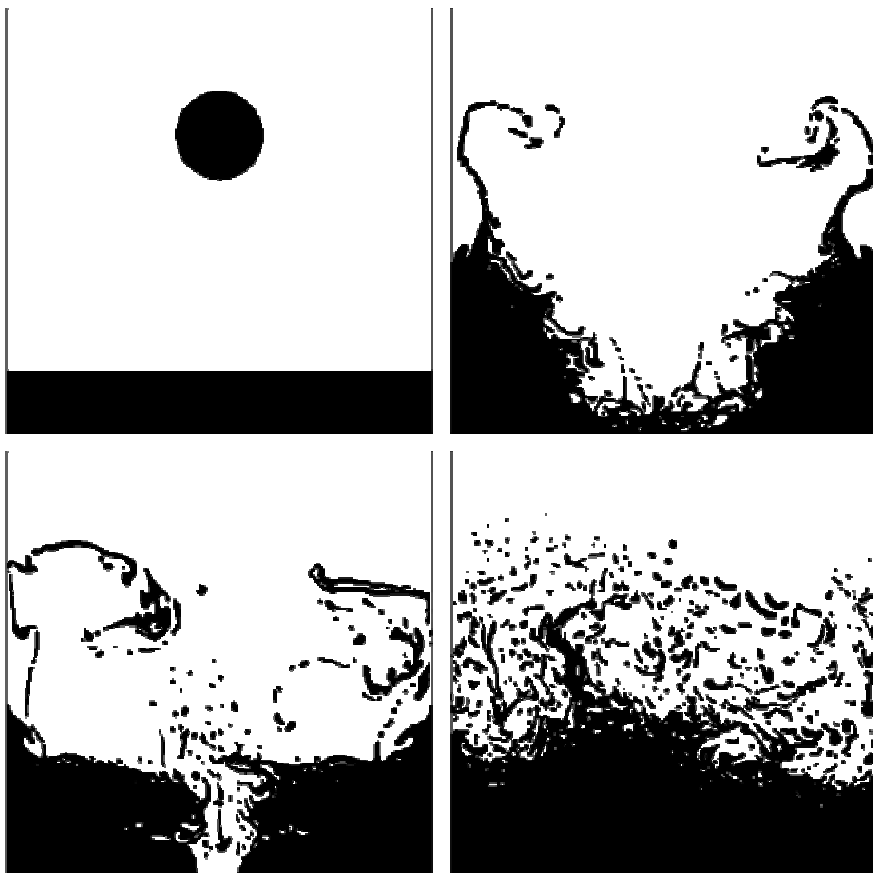
W metodzie VOF przepływy gazu i cieczy są na ogół wyznaczane oddzielnie, ze wspólnym warunkiem brzegowym na powierzchni swobodnej. Alternatywnie można traktować obie fazy jako jeden płyn o zmieniających się właściwościach, tzn.:

$$\rho = \rho_1 \cdot C + \rho_2 \cdot (1 - C) \qquad \mu = \mu_1 \cdot C + \mu_2 \cdot (1 - C)$$

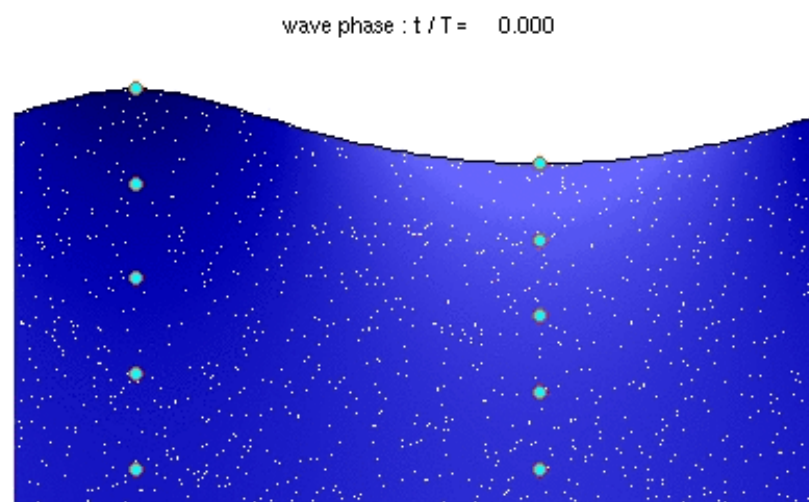
W takim przypadku nie wprowadza się formalnie warunku brzegowego na swobodnej powierzchni, traktując tę powierzchnię jako nieciągłość parametrów płynu. Warunki brzegowe są jednak spełnione w sposób ukryty.



Kolejne fazy niestacjonarnego przepływu przez zaporę po nagłym „przerwaniu” tamy obliczone metodą Volume of Fluid (VOF) przy zastosowaniu podejścia „jednego płynu”, w porównaniu z eksperymentem.



Obliczenie efektu uderzenia kulki w powierzchnię wody metodą MAC. Po lewej „nieważkie” znaczniki rozmieszczone w cieczy →



Metody śledzenia granicy (Interface Tracking Methods)

Najczęściej wprowadza się funkcję opisującą wzniesienie swobodnej powierzchni nad jej położeniem początkowym: $z = H(x, y, t)$

Wtedy z kinematycznego warunku brzegowego wyprowadza się zależność opisującą lokalną zmianę H:
$$\frac{\partial H}{\partial t} = v_z - v_x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - v_y \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$$

Powyższa zależność jest całkowana numerycznie w czasie, przy czym w każdym kroku czasowym wykonuje się wewnętrzny cykl iteracyjny obejmujący:

- Rozwiązanie równania zachowania pędu przy znanym ciśnieniu na swobodnej powierzchni, w celu uzyskania pola prędkości
- Rozwiązanie równania zachowania masy przy znanym ciśnieniu na swobodnej powierzchni i znanym jej kształcie prowadzi do wyznaczenia niezerowego przepływu masy przez swobodną powierzchnię:

$$\dot{m}_{fs} = \int_{S_{fs}} \rho \cdot \bar{v}_{fs} \cdot \bar{n} \cdot dS - \int_{S_{fs}} \rho \cdot \bar{v}_b \cdot \bar{n} \cdot dS \approx \rho \cdot (\bar{v} \cdot \bar{n})_{fs}^T \cdot S_{fs}^T - \rho \cdot \dot{\Omega}_{fs}$$

gdzie:

$\bar{v}_{fs}$ - aktualna prędkość wyznaczona na swobodnej powierzchni

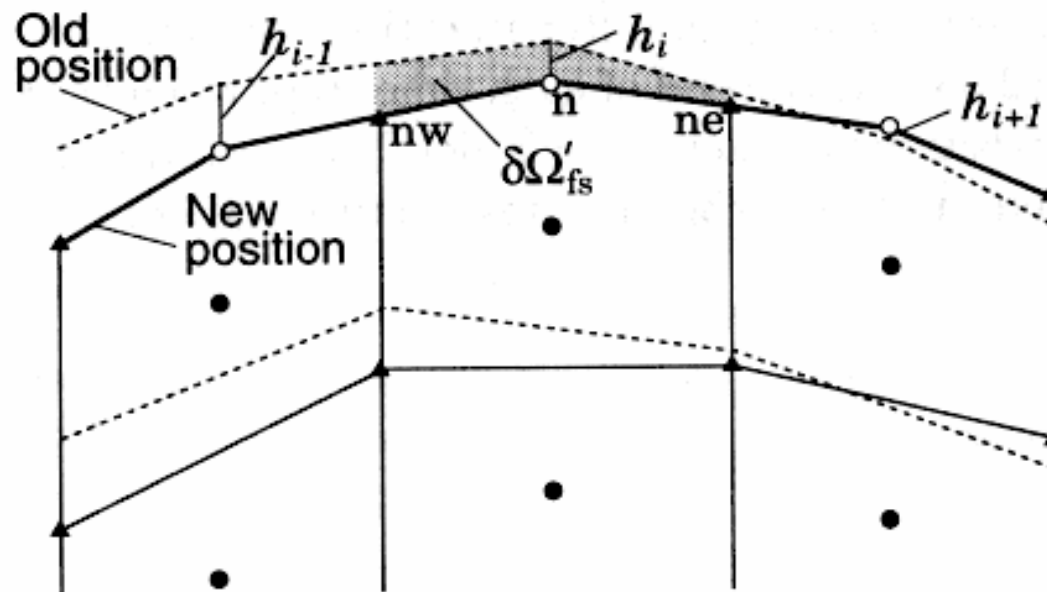
$\bar{v}_b$ - prędkość ruchu swobodnej powierzchni z poprzedniego kroku

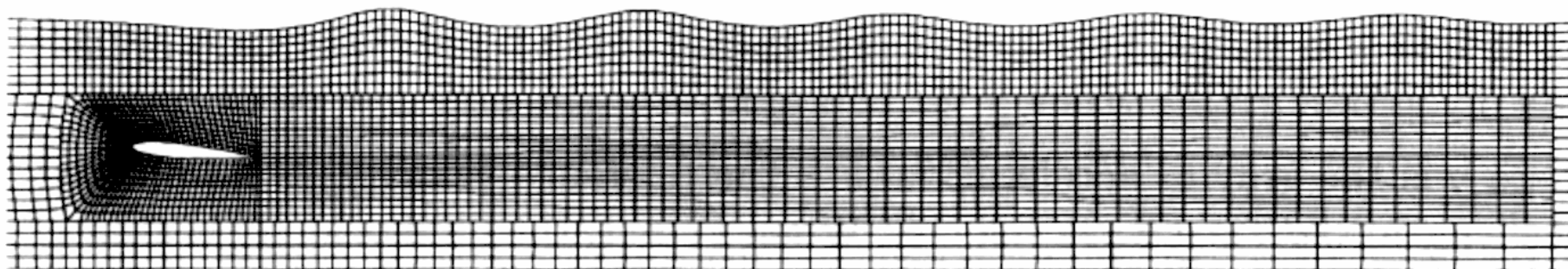
- Korekta położenia swobodnej powierzchni tak aby przepływ masy przez nią został wyzerowany: $\dot{m}_{fs} + \rho \cdot \dot{\Omega}'_{fs} = 0$

$\dot{\Omega}'_{fs}$ jest objętością płynu jaka musi wypłynąć z (lub wpłynąć do) objętości kontrolnej, aby równanie zachowania masy było spełnione. Na podstawie tej objętości ustala się odpowiednie przemieszczenie węzłów objętości kontrolnej (por. rysunek), np. dla siatki dwuwymiarowej mamy:

$$\partial \dot{\Omega}'_{fs} = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot (h_{nw} + 2 \cdot h_n + h_{ne})$$

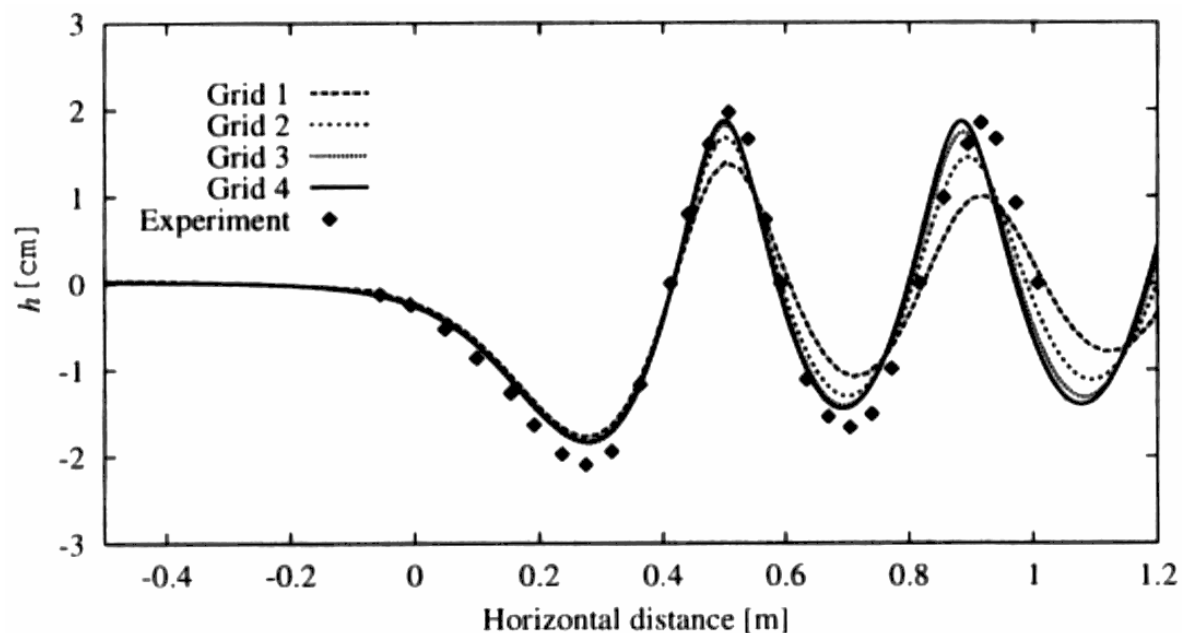
- Powtórzenie powyższych czynności aż do uzyskania zadowalającej zbieżności
- Przejście do następnego kroku czasowego





Przykład zastosowania metody ITM dla przypadku wyznaczania układu falowego na swobodnej powierzchni wywołanego przez płat poruszający pod powierzchnią (przepływ dwuwymiarowy).

Porównanie wyników obliczeń i eksperymentu



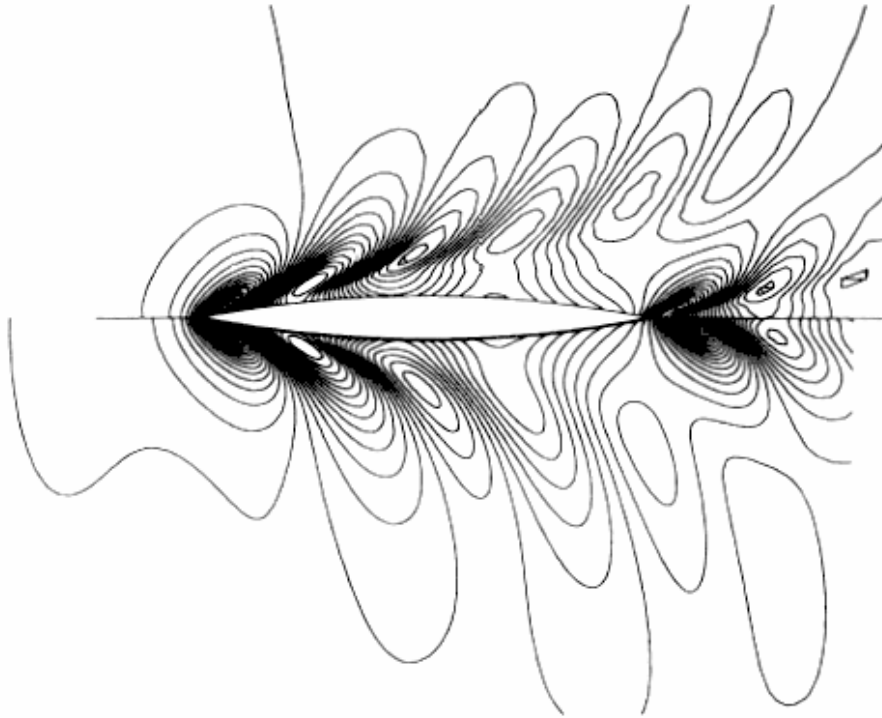
Grid 1 – 1004 objętości skończone

Grid 2 – 4016 objętości skończone

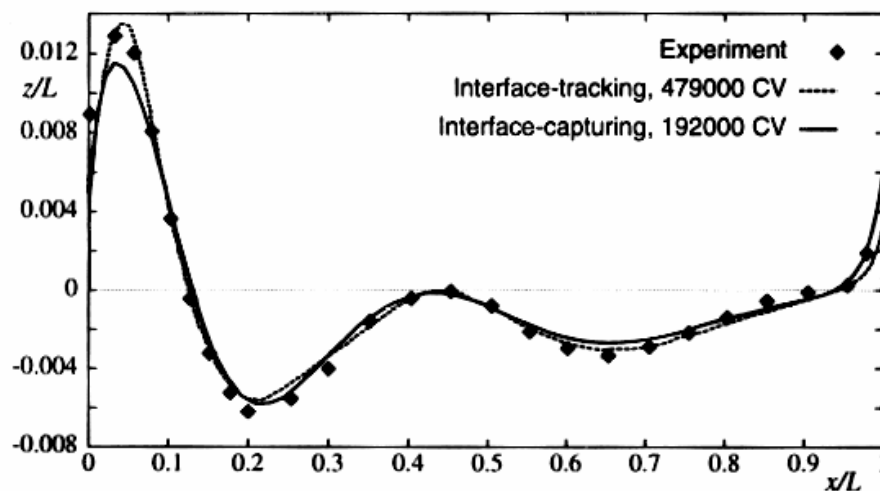
Grid 3 – 16064 objętości skończone

Grid 4 – 64256 objętości skończone

Porównanie metod VOF i ITM w obliczeniu układu falowego okrętu przy $Fr=0.267$



Mapa układu falowego okrętu
wyznaczona obliczeniowo - górna
połowa rysunku – metoda wyznaczania
granicy VOF, dolna połowa rysunku –
metoda śledzenia granicy ITF



Porównanie obserwowanego i
obliczonego profilu fali wzdłuż burty
okrętu

Dodatek bezpłatny: reakcje chemiczne w przepływach – na przykładzie spalania

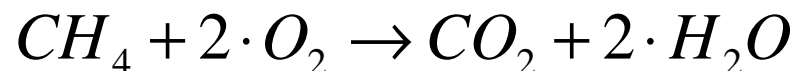
Spalanie to skomplikowany proces: zwykłe spalanie metanu w tlenie obejmuje około 40 podstawowych reakcji chemicznych.



Jeżeli interesują nas tylko globalne rezultaty procesu, można zastosować podejście uproszczone, oparte na następujących założeniach:

- reakcje chemiczne przebiegają nieskończenie szybko
- spalanie jest reakcją jednostopniową
- jeżeli jeden czynnik jest w nadmiarze, to pozostałe czynniki łączą się ze sobą w stosunku stoichiometrycznym, tworząc produkty reakcji:

1 kg paliwa + s kg utleniacza = (1+s) kg produktów reakcji



1 kg metanu + 64/16 kg tlenu = (1+64/16) kg produktów reakcji

Równania transportu dla udziałów masowych paliwa i utleniacza mają postać:

$$\frac{\partial(\rho \cdot m_p)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot m_p \cdot \bar{u}) = \text{div}(\Gamma_p \cdot \text{grad} m_p) + S_p$$

gdzie:

$$\frac{\partial(\rho \cdot m_u)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot m_u \cdot \bar{u}) = \text{div}(\Gamma_u \cdot \text{grad} m_u) + S_u$$

Γ – współczynnik transportu masy

zmiana lokalna + konwekcja = dyfuzja + produkcja

Przy założeniu równości współczynników transportu można wprowadzić funkcję:

$$\phi = s \cdot m_p - m_u$$

co daje możliwość połączenia równań transportu w jedno równanie:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \phi \cdot \bar{u}) = \text{div}(\Gamma_\phi \cdot \text{grad} \phi)$$

Teraz można wprowadzić współczynnik mieszaniny f :
$$f = \frac{\phi - \phi_u}{\phi_p - \phi_u}$$

Przy takiej definicji współczynnika mieszaniny jego lokalna wartość wynosi 0 jeżeli w danym miejscu jest tylko utleniacz i 1 gdy jest tam tylko paliwo. Transport współczynnika f w przepływie można opisać równaniem:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot f \cdot \bar{u}) = \text{div}(\Gamma_f \cdot \text{grad} f)$$

Rozwiązanie tego równania wspólnie z równaniem zachowania masy, równaniem zachowania pędu, równaniem zachowania energii i równaniem bilansu entropii, przy odpowiednich warunkach brzegowych, pozwala ustalić rozkład f w polu przepływu, co umożliwia obliczenie udziałów masowych paliwa lub utleniacza po procesie spalania.

przy: $f_{st} \leq f \leq 1$ mamy $m_p = \frac{f - f_{st}}{1 - f_{st}} \cdot m_{pw}$ $m_u = 0$

przy: $0 \leq f \leq f_{st}$ mamy $m_u = \frac{f_{st} - f}{f_{st}} \cdot m_{uw}$ $m_p = 0$

gdzie: $f_{st} = \frac{m_{uw}}{s \cdot m_{pw} + m_{uw}}$ wartość f dla stosunku stoichiometrycznego

m_{pw} - udział masowy paliwa na wlocie

m_{uw} - udział masowy utleniacza na wlocie

Powyższe uproszczone podejście wymaga rozwiązania tylko jednego dodatkowego równania różniczkowego opisującego transport współczynnika f dla wyznaczenie stężeń paliwa, utleniacza i produktów spalania w każdym punkcie pola przepływu. Zastosowanie praktyczne podejścia uproszczonego pokazuje poniższy przykład.