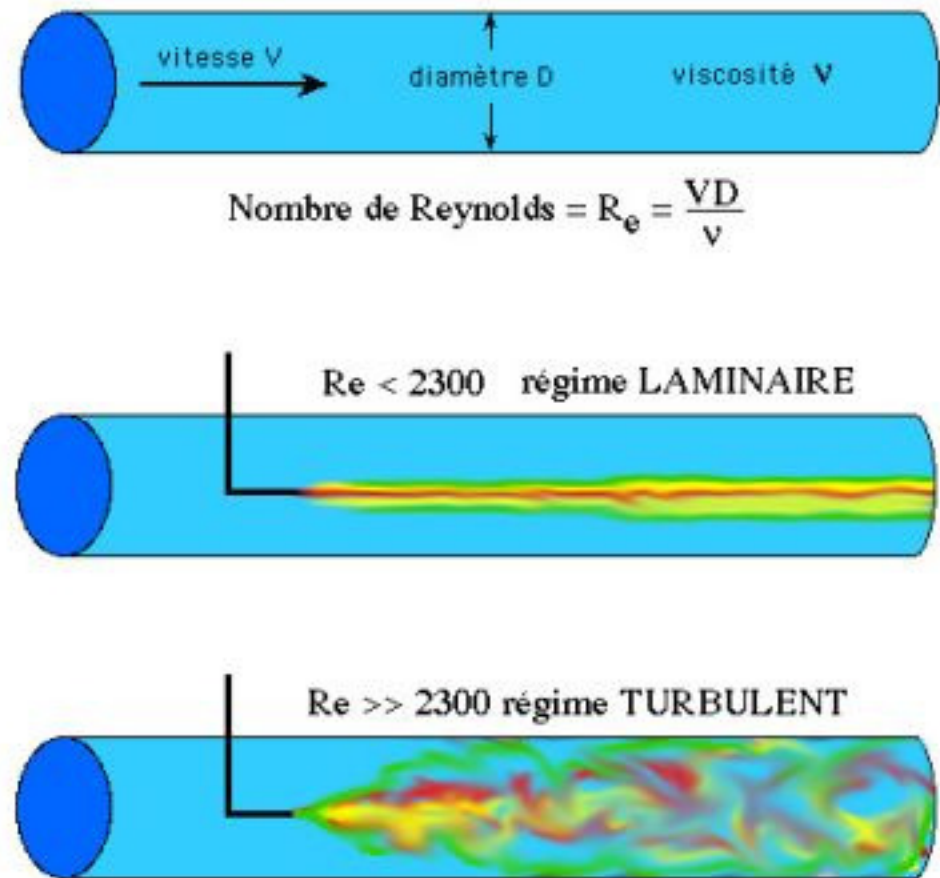


J. Szantyr – Wykład 4 – Podstawy teorii przepływów turbulentnych

Zjawisko występowania dwóch różnych rodzajów przepływów, czyli laminarnego i turbulentnego, odkrył Osborne Reynolds (1842 – 1912) w swoim znanym eksperymencie dotyczącym przepływu w rurze w roku 1883. Stwierdził, że przepływ laminarny występuje do wartości $Re=2300$. Powyżej tej wartości ruch cieczy staje się niestabilny i dochodzi do silnego mieszania się cieczy w przepływie o charakterze wirowym – turbulentnym.



Liczbą kryterialną pozwalającą ocenić charakter przepływu na podstawie jego głównych parametrów jest liczba Reynoldsa:

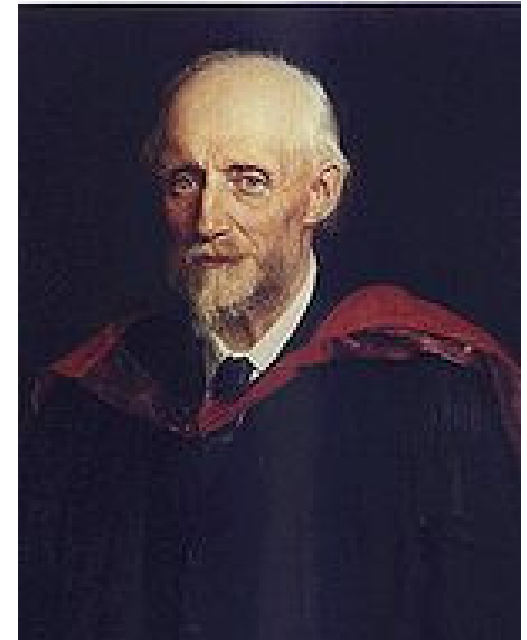
$$Re = \frac{u \cdot l}{\nu}$$

u – prędkość charakterystyczna przepływu

l – charakterystyczny wymiar liniowy przepływu, najczęściej zgodny z kierunkiem prędkości u

ν – kinematyczny współczynnik lepkości

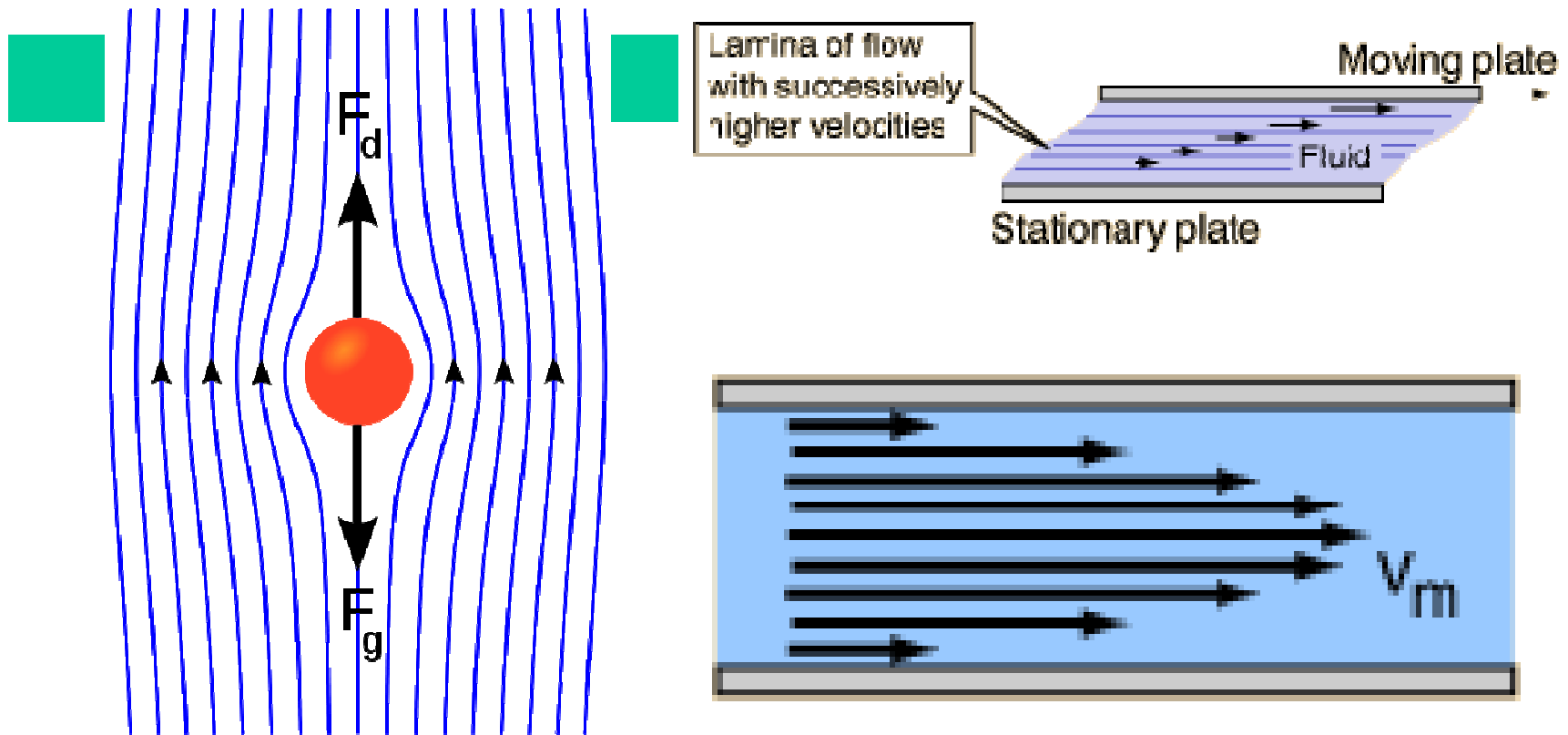
Bezwymiarowa liczba Reynoldsa wyraża stosunek sił bezwładności do sił lepkości w danym przepływie. Duża wartość liczby Reynoldsa oznacza dominację sił bezwładności, a mała wartość wskazuje na znaczącą rolę sił lepkości.



Osborne Reynolds
1842 - 1912

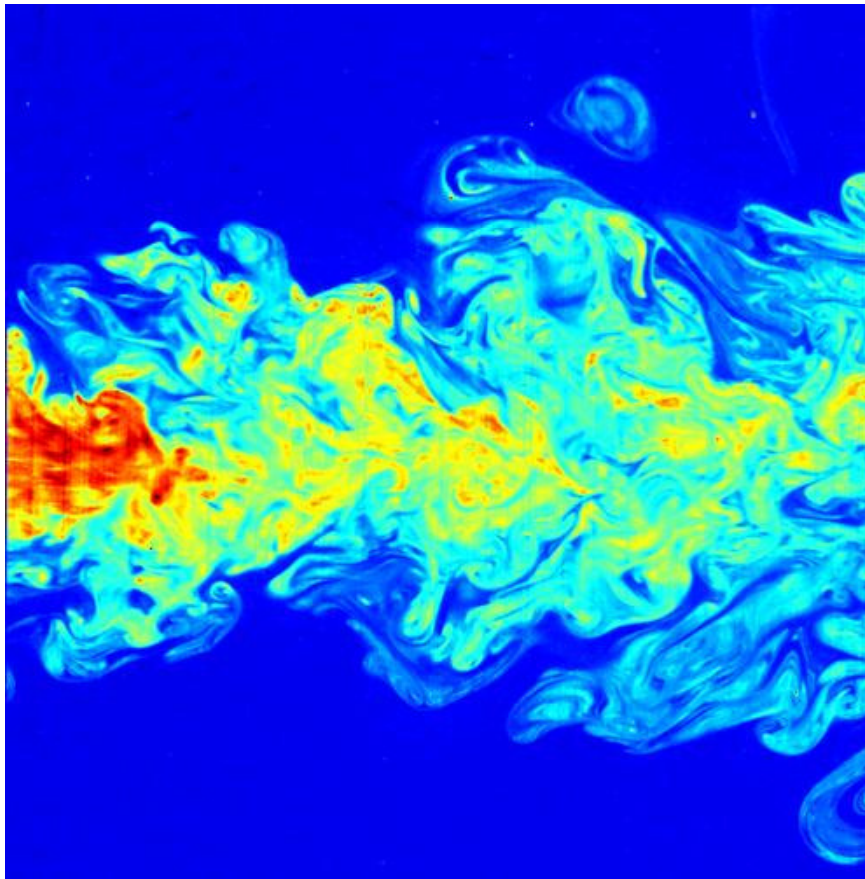
Wzajemna relacja sił bezwładności i sił lepkości w przepływie płynu, wyrażona przez liczbę Reynoldsa, silnie wpływa na charakter przepływu. Przy niskich wartościach liczby Reynoldsa, czyli przy relatywnie dużych siłach lepkości, przepływ ma charakter uporządkowany – elementy płynu poruszają się po torach równoległych i nie dochodzi do ich wzajemnego mieszania się. Przepływ taki nazywamy **laminarnym** czyli uwarstwionym. Powyżej pewnej wartości liczby Reynoldsa (zwanej **dolną liczbą krytyczną**), na skutek rosnącej roli sił bezwładności przepływ taki traci stateczność i pojawiają się w nim zaburzenia charakteryzujące się stochastycznymi fluktuacjami prędkości. Przy dalszym wzroście liczby Reynoldsa (powyżej tzw. **górnej wartości krytycznej**) zaburzenia obejmują cały przepływ, który wtedy jest nazywany **turbulentnym**. Wartości krytyczne liczby Reynoldsa są różne dla różnych przepływów, np. inne dla przepływu w rurze, a inne dla opływu płaskiej ściany.

Przepływ laminarny – uporządkowany ruch płynu po torach równoległych, elementy płynu nie mieszają się ze sobą, działa czysto lepkościowy mechanizm wymiany pędu i energii



Wzrost wartości liczby Reynoldsa (zwykle na skutek wzrostu prędkości przepływu) prowadzi do utraty stabilności przepływu laminarnego i przejścia w przepływ turbulentny.

Przepływ turbulentny – chaotyczny ruch płynu o stochastycznym charakterze, niestacjonarny nawet przy ustalonych warunkach brzegowych, elementy płynu mieszają się ze sobą, co prowadzi do intensyfikacji wymiany masy, pędu i energii.



Big whirls have little whirls,
That feed on their velocity
And little whirls have lesser
whirls
And so on to viscosity
(in the molecular sense)

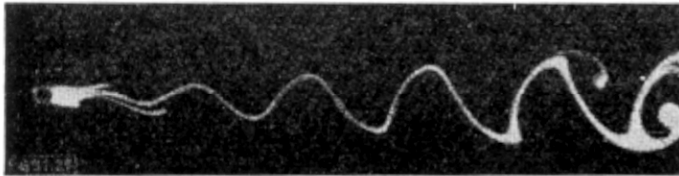
L.F. Richardson (1922)



$Re = 32$



$Re = 55$



$Re = 65$



$Re = 71$



$Re = 102$



$Re = 161$

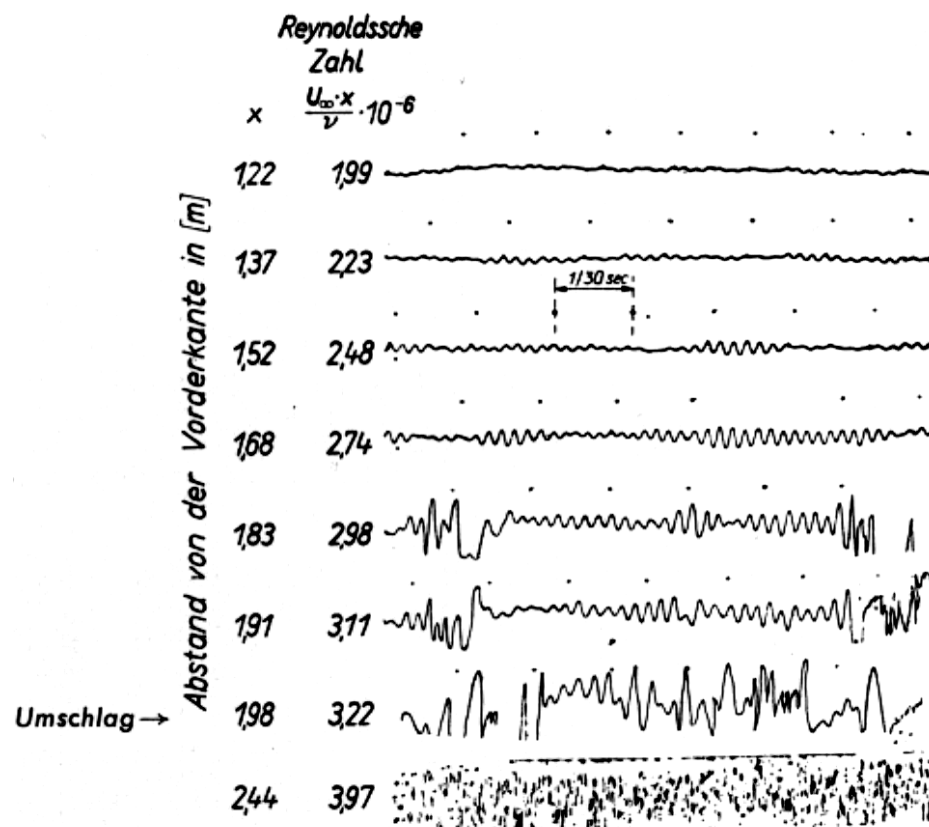


$Re = 225$



$Re = 281$

Powyżej pokazano eksperyment dotyczący opływu cienkiego pręta, umieszczonego prostopadle do kierunku prędkości. Kolejne zdjęcia pokazują stopniową utratę stabilności przepływu w miarę wzrostu liczby Reynoldsa.



Rysunek pokazuje narastanie turbulentnych fluktuacji prędkości przepływu wzdłuż płaskiej płyty, czyli przy rosnącej wartości liczby Reynoldsa obliczanej w oparciu o odległość od przedniej krawędzi płyty.

Dla przepływu w rurze o przekroju kołowym (D – średnica) mamy:

dolna wartość krytyczna: $Re_{kr1} = \frac{u \cdot D}{\nu} = 2000$

górną wartość krytyczną: $Re_{kr2} = \frac{u \cdot D}{\nu} = 50000$

W opływie płaskiej płyty (x – odległość od krawędzi) mamy:

dolna wartość krytyczna: $\text{Re}_{kr1} = \frac{u \cdot x_1}{\nu} = 90000$

górną wartość krytyczną: $\text{Re}_{kr2} = \frac{u \cdot x_2}{\nu} = 1000000$

W przepływie turbulentnym mamy: $\bar{u} = \bar{U} + \bar{u}'$ czyli:

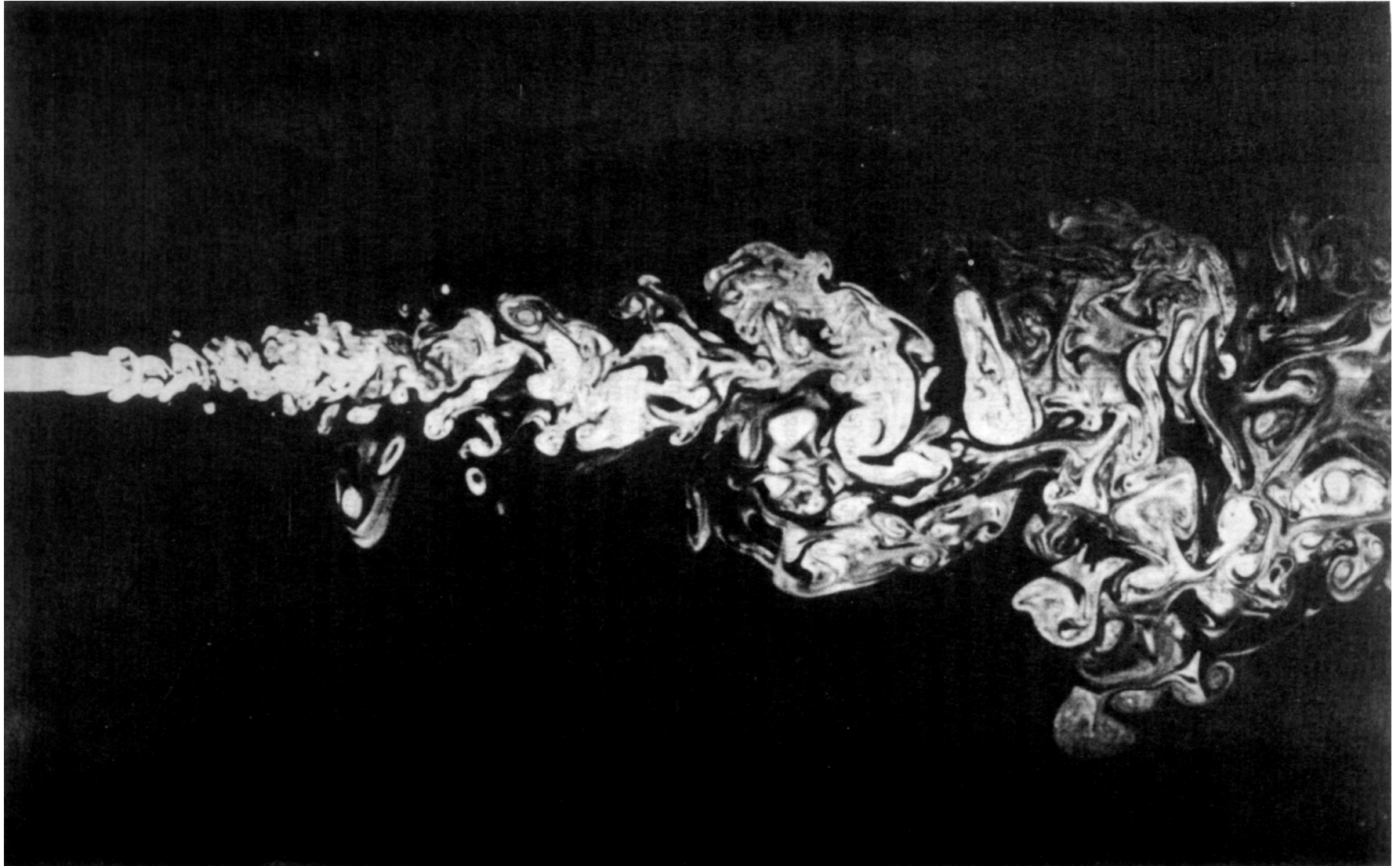
prędkość chwilowa = prędkość średnia + fluktuacja turbulentna

Miarą intensywności turbulencji jest stopień turbulencji ε :

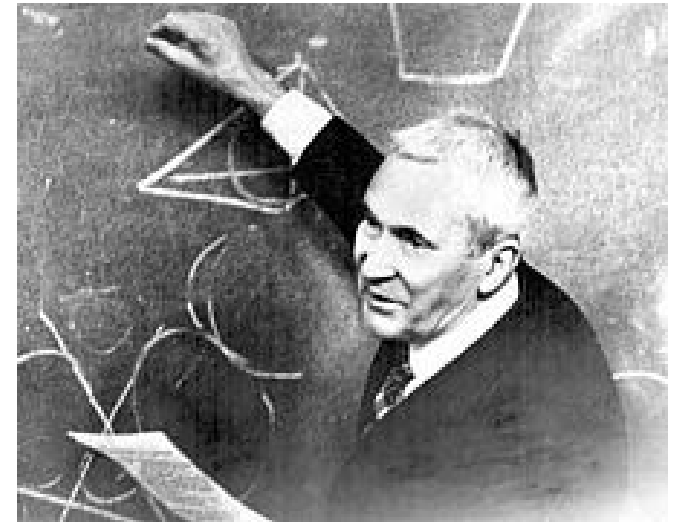
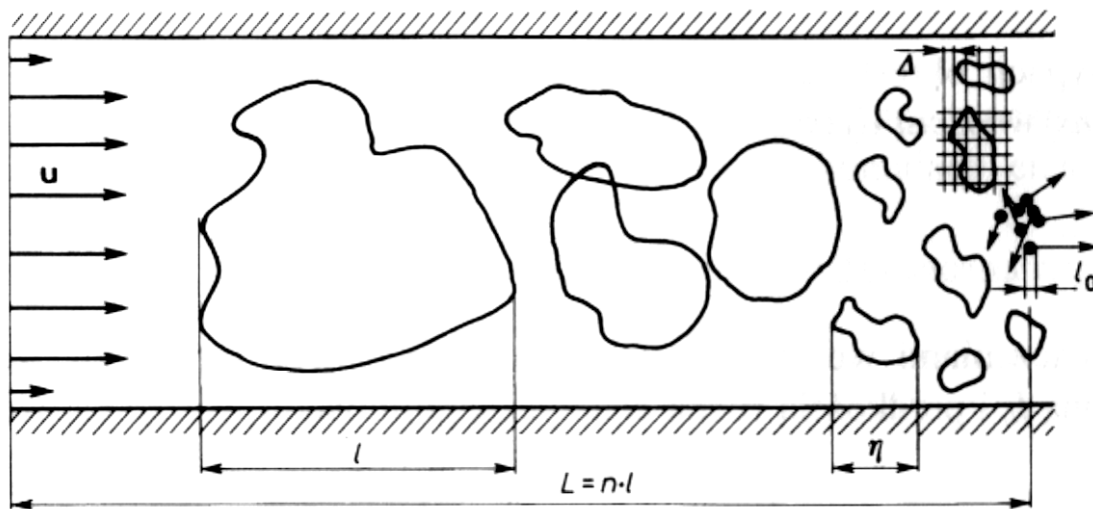
$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} [(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2]}}{|\bar{U}|}$$

Energia kinetyczna turbulencji k wyraża się zależnością:

$$k = \frac{1}{2} [(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2]$$



Wizualizacja przepływu turbulentnego uwidacznia struktury wirowe o różnych skalach wielkości, zwane wirami turbulentnymi.



Andrej Kolmogorow
1903 - 1987

Model Kołmogorowa (1941) traktuje **turbulencję jako kaskadę wirów**, przekazującą energię ruchu płynu od przepływu głównego do poziomego ruchu molekularnego.

Największe wiry oddziałują z przepływem głównym i z niego pobierają energię. Ich prędkość charakterystyczna i wymiar charakterystyczny są tego rzędu co w przepływie głównym (duża liczba Re). Oznacza to, że dominują tu siły bezwładności, a siły lepkości są pomijalne. Prowadzi to do rozpadu wirów na coraz mniejsze i szybciej wirujące. Najmniejsze wiry mają $Re=1$ przy średnicy $\eta=0,1-0,01$ mm i częstości obrotowej 10 kHz. Ruch tych wirów jest hamowany przez siły lepkości (równe siłom bezwładności), a ich energia jest rozpraszana i przechodzi w energię wewnętrzną ruchu molekularnego, czyli w ciepło.

Analiza mechanizmów fizycznych występujących w przepływie turbulentnym prowadzi do następujących zależności określających charakterystyczne wielkości wirów w kaskadzie Kołmogorowa:

$$\frac{\eta}{l} = \text{Re}_L^{-\frac{3}{4}} \quad \text{gdzie: } \eta - \text{skala najmniejszych wirów} - \text{skala Kołmogorowa}$$

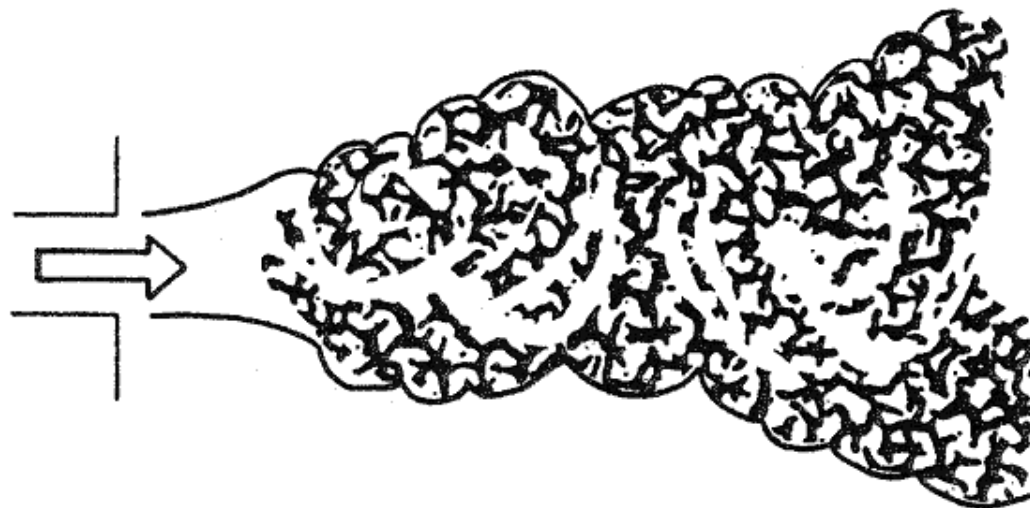
$$\frac{\eta}{l_0} = \frac{\text{Re}_L}{Ma} \quad \text{gdzie: } Ma - \text{liczba Macha oparta na prędkości ruchu molekularnego}$$

Oszacowanie liczbowe prowadzi do następujących orientacyjnych wartości:

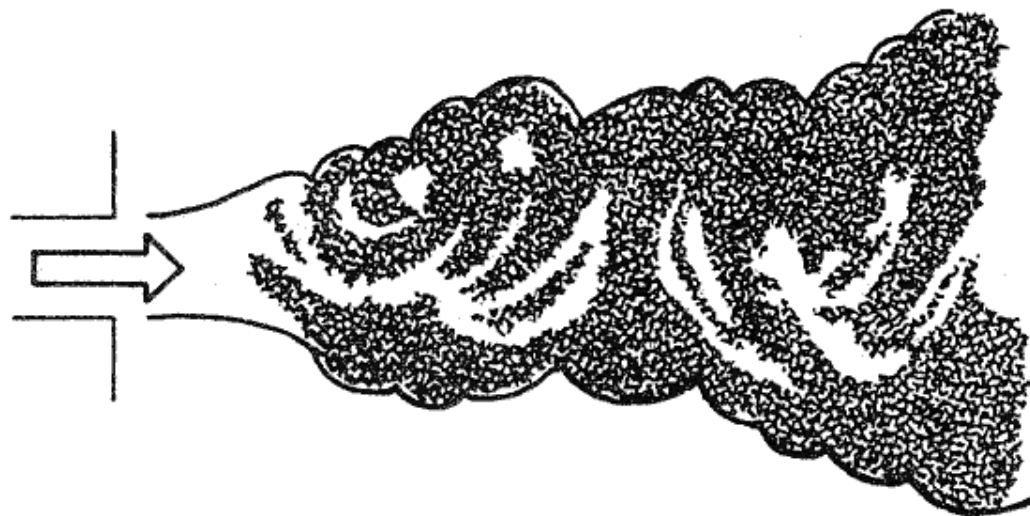
$$\frac{\eta}{l} \approx 10^{-6} \quad \frac{\eta}{l_0} \approx 10^2 \quad \text{czyli:} \quad l \gg \eta > l_0$$

Należy podkreślić, że o ile przedział pomiędzy l i η jest pokryty w sposób ciągły przez różne wielkości wirów, to pomiędzy η a l_0 pośrednie skale nie występują

Strumień wypływający
z otworu przy
stosunkowo niskiej
nadkrytycznej liczbie
Reynoldsa



Strumień wypływający
z otworu przy
stosunkowo wysokiej
nadkrytycznej liczbie
Reynoldsa



Uwagi o zgodności teorii Kołmogorowa z fizyczną rzeczywistością turbulencji:

1. Teoria Kołmogorowa dobrze opisuje rzeczywisty przepływ turbulentny przy stosunkowo wysokich liczbach Reynoldsa.
2. Teoria Kołmogorowa zakłada wyłącznie stochastyczny charakter przepływu turbulentnego, podczas gdy w rzeczywistych przepływach często występują duże, koherentne struktury wirowe, które można opisać w sposób deterministyczny.
3. Teoria Kolmogorowa zakłada wyłącznie jednokierunkowy transport energii – od dużych wirów do małych – podczas gdy eksperymenty wykazują obecność również mało intensywnego transportu energii w kierunku przeciwnym – tzw. rozpraszanie wsteczne.

Matematycznym opisem turbulentnego ruchu płynu są **równania Reynoldsa**. Reynolds założył, że w przepływie turbulentnym wszystkie charakteryzujące go parametry, w tym prędkość i ciśnienie płynu mogą być przedstawione w postaci sum ich wartości średnich (ściślej: wolnozmiennych) oraz fluktuacji turbulentnych, czyli:

$$\bar{u} = \bar{U} + \bar{u}' \qquad p = P + p'$$

gdzie U jest prędkością przepływu uśrednionego

$$\bar{U} = \bar{i}U + \bar{j}V + \bar{k}W$$

a u' jest turbulentną fluktuacją prędkości

$$\bar{u}' = \bar{i}u' + \bar{j}v' + \bar{k}w'$$

Podstawienie tak zapisanych prędkości i ciśnienia do równania Naviera-Stokesa prowadzi do ujawnienia nowych sił powierzchniowych, zwanych **naprężeniami turbulentnymi**:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \operatorname{divgrad} U + \rho \left[-\frac{\partial \tilde{u}'^2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}'\tilde{v}'}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{u}'\tilde{w}'}{\partial z} \right]$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \operatorname{divgrad} V + \rho \left[-\frac{\partial \tilde{u}'\tilde{v}'}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}'^2}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}'\tilde{w}'}{\partial z} \right]$$

$$\rho \frac{DW}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \operatorname{divgrad} W + \rho \left[-\frac{\partial \tilde{u}'\tilde{w}'}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}'\tilde{w}'}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{w}'^2}{\partial z} \right]$$

Powyższe równania odnoszą się do przepływu płynu nieściśliwego

Naprężenia normalne:

$$\tau_{xx} = -\rho \tilde{u}'^2 \qquad \tau_{yy} = -\rho \tilde{v}'^2 \qquad \tau_{zz} = -\rho \tilde{w}'^2$$

Naprężenia styczne (ścinające): $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \tilde{u}' \tilde{v}'$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho \tilde{u}' \tilde{w}' \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho \tilde{v}' \tilde{w}'$$

Naprężenia turbulentne, zwane także naprężeniami Reynoldsa, są zależne od wartości turbulentnych fluktuacji prędkości przepływu a nie od lepkości płynu. Można wykazać, że tworzą one symetryczny tensor naprężeń. Stanowią one dodatkowe 6 niewiadomych w układzie równań Reynoldsa opisującym turbulentny ruch płynu. Aby zredukować liczbę niewiadomych i zamknąć układ równań konieczne jest wprowadzenie odpowiednich **modeli turbulencji**. Równanie Reynoldsa stanowi podstawę większości komercyjnych kodów obliczeniowych z obszaru numerycznej mechaniki płynów.