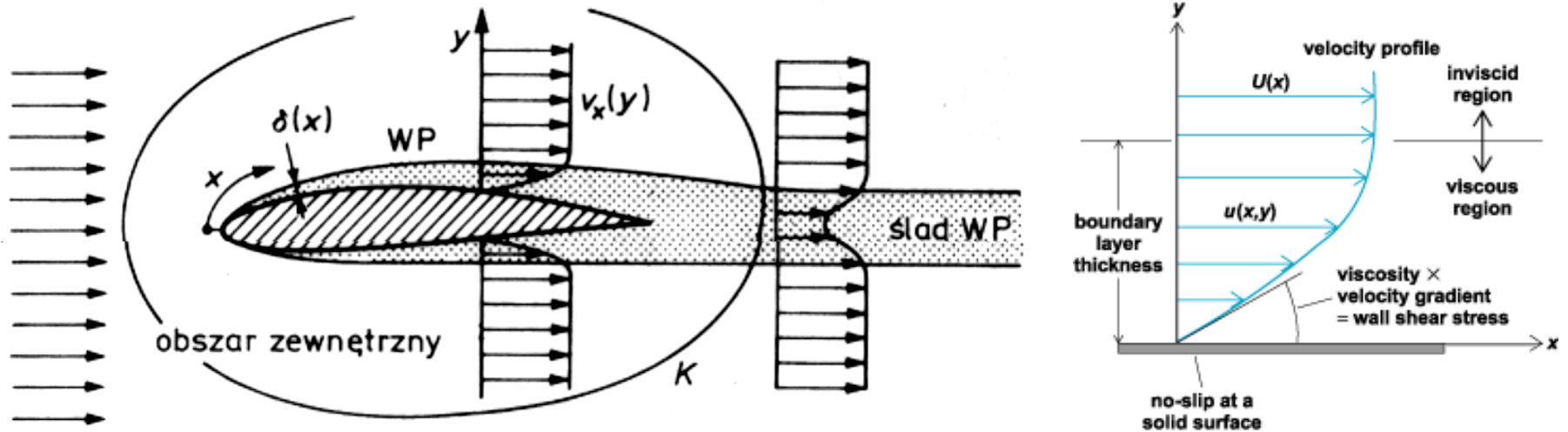


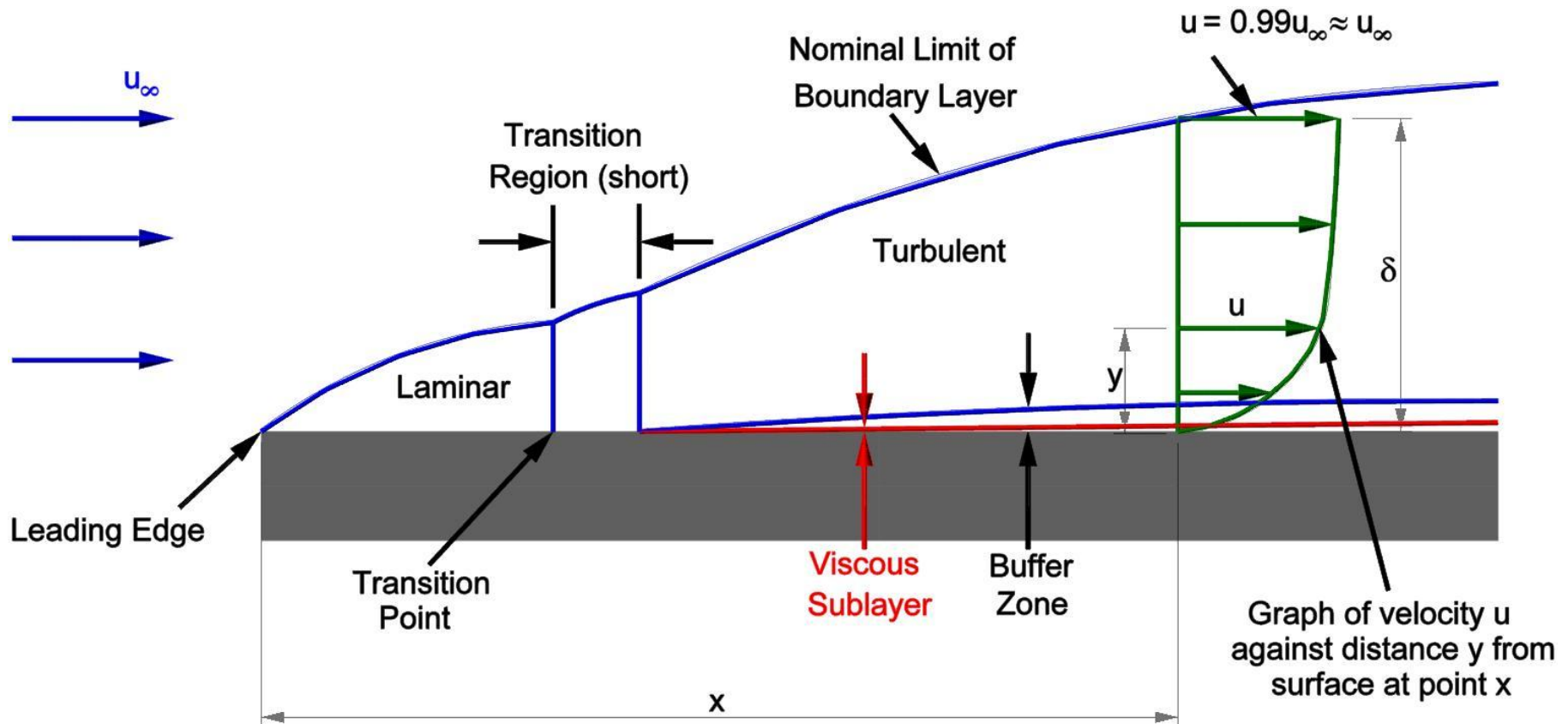
# J. Szantyr – Wykład 5 – Turbulentna warstwa przyścienna



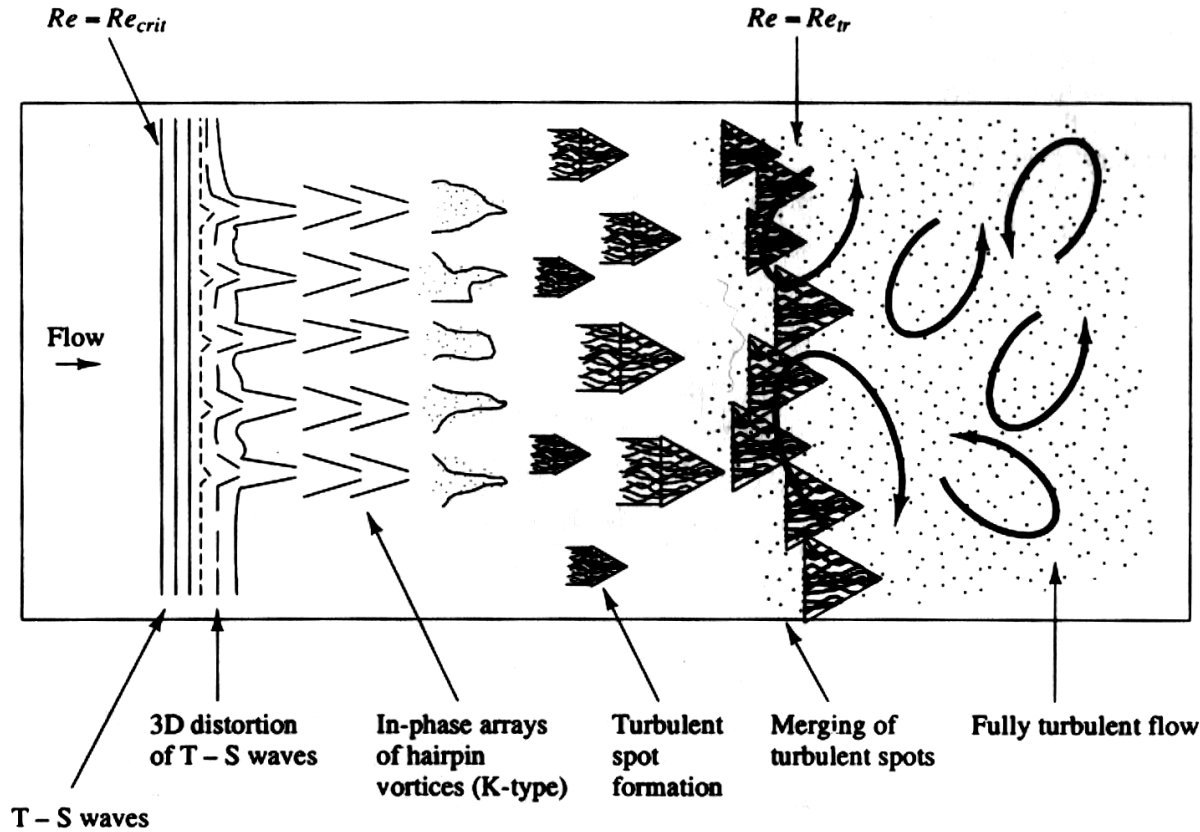
Warstwa przyścienna jest to część obszaru przepływu bezpośrednio sąsiadująca z powierzchnią opływanego ciała. W warstwie przyściennej znaczącą rolę odgrywają siły lepkości i występują tam znaczne poprzeczne gradienty prędkości przepływu. Poza warstwą przyścienną przepływ może być praktycznie uważany za nie lepki. Za opływanym ciałem warstwa przechodzi w tzw. ślad.

Przepływ w warstwie może być laminarny lub turbulentny. Umowną grubość warstwy  $\delta$  określa osiągnięcie prędkości  $u_\delta = 0,99u_\infty$

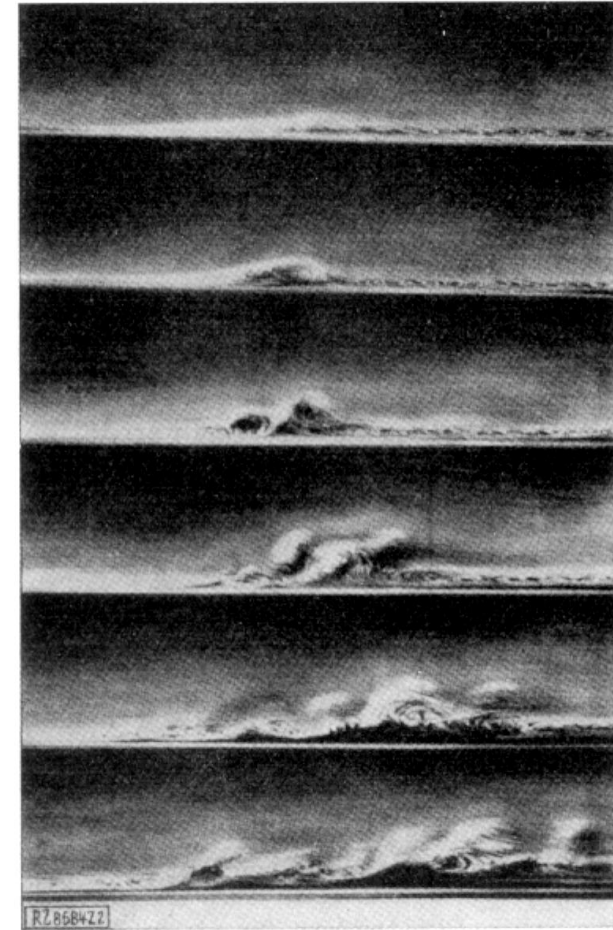
Typowa warstwa przyścienna na ścianie opływanego obiektu składa się ze strefy przepływu laminarnego przy krawędzi natarcia, z rejonu przejściowego i ze strefy turbulentnej. W strefie turbulentnej występuje bardzo cienka podwarstwa lepka przy samej ścianie, dalej od ścianki - rejon przejściowy i dominujący rejon w pełni turbulentny.



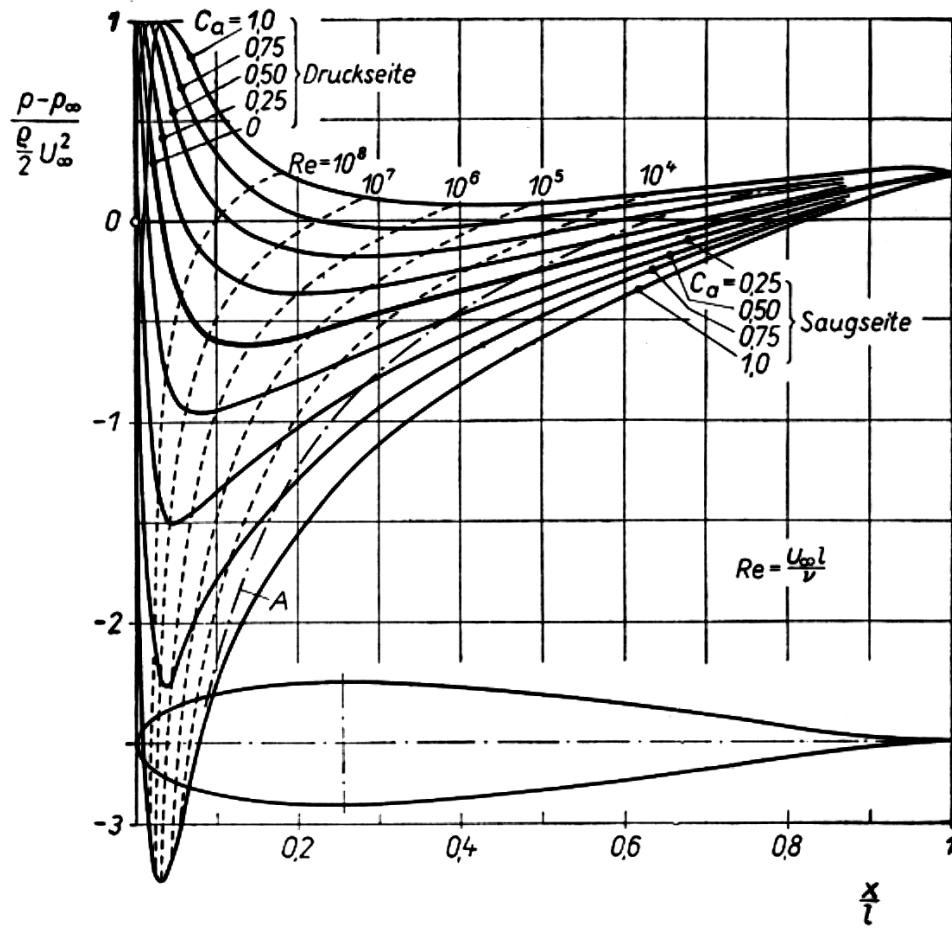
Powiększanie liczby Reynoldsa prowadzi do utraty stabilności laminarnej warstwy przyściennej i do stopniowego rozwoju turbulencji aż do wystąpienia w pełni rozwiniętej turbulენტnej warstwy przyściennej



Schemat procesu turbulizacji warstwy przyściennej.



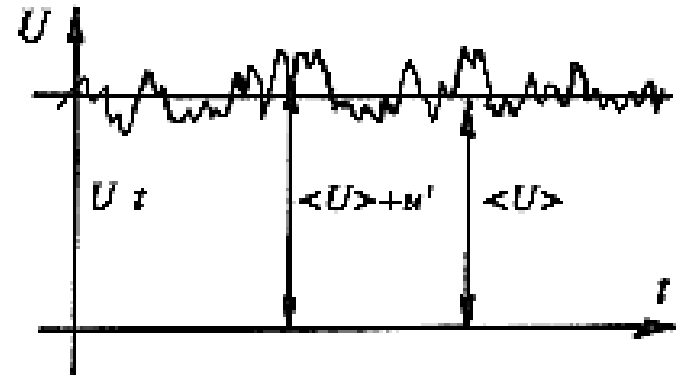
Wizualizacja procesu powstawania turbulencji



Położenie punktu przejścia laminarnej warstwy przyściennej w turbulentną zależy zarówno od liczby Reynoldsa jak i od gradientu ciśnienia wzdłuż warstwy. Rysunek pokazuje to zjawisko na symetrycznym profilu ustawianym pod różnymi kątami natarcia, co zmienia gradient ciśnienia. Linie przerywane pokazują położenie punktów przejścia laminarno-turbulentnego przy różnych wartościach liczby Reynoldsa

# Turbulentna warstwa przyścienna

Równania analogiczne do równań Prandtla dla dwuwymiarowej turbulentnej warstwy przyściennej można wyprowadzić z równań Reynoldsa, traktując wszystkie parametry opisujące ruch płynu jako efekt superpozycji ich wartości średnich (wolnozmiennych) i fluktuacji turbulentnych.



$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{równanie zachowania masy}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (u'v') - \frac{\partial}{\partial x} (u'^2) \quad \text{kierunek x}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u'v') - \frac{\partial}{\partial y} (v'^2) \quad \text{kierunek y}$$

Przeprowadzenie podobnego oszacowania wielkości poszczególnych wyrazów powyższych równań pozwala na wprowadzenie uproszczeń (pominięcie wyrazów względnie małych), co ostatecznie daje równania opisujące przepływ w turbulentnej warstwie przyściennej:

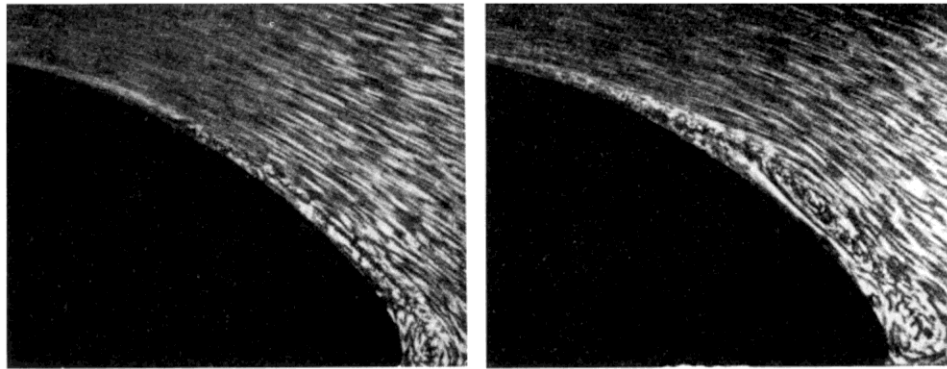
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{równanie zachowania masy}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (u'v') \quad \text{kierunek x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{kierunek y}$$

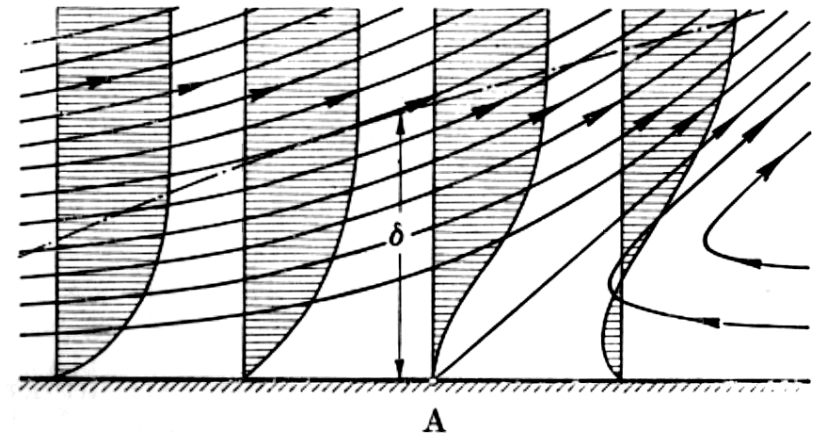
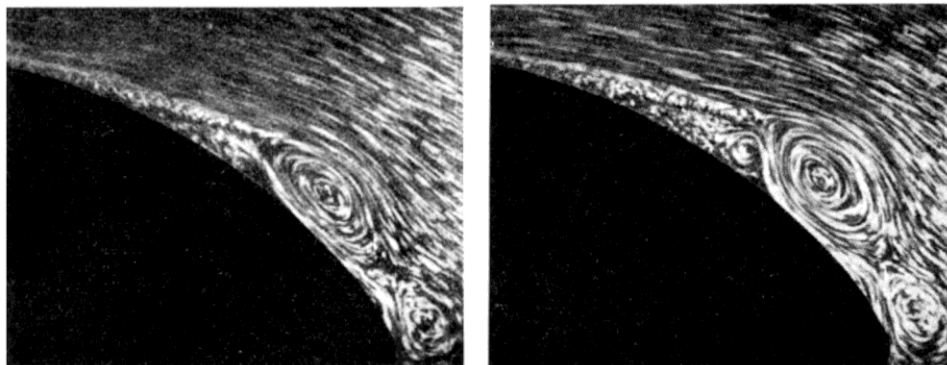
Podobnie jak w przypadku laminarnej warstwy przyściennej **średnie ciśnienie** pozostaje stałe w poprzek warstwy. Człon turbulentnych naprężeń Reynoldsa wymaga zastosowanie odpowiedniego **modelu turbulencji** dla zamknięcia powyższego układu równań.

Wystąpienie  **dodatniego gradientu ciśnienia wzdłuż warstwy przyściennej** (czyli wzrostu ciśnienia w kierunku przepływu), może prowadzić do tzw. **oderwania warstwy przyściennej**. Element płynu przy samej ścianie jest hamowany siłami lepkości i siłami ciśnienia, co powoduje jego zatrzymanie, a następnie ruch w kierunku przeciwnym do przepływu.



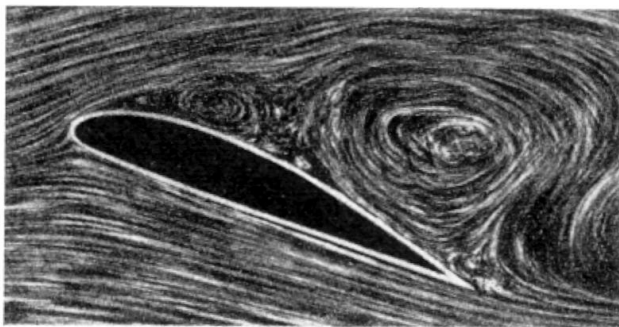
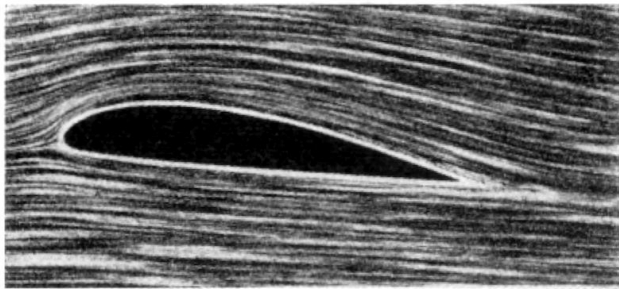
W punkcie oderwania A mamy:  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$

Ponadto zeruje się tam napężenie lepkościowe na ścianie  $\tau_w = 0$

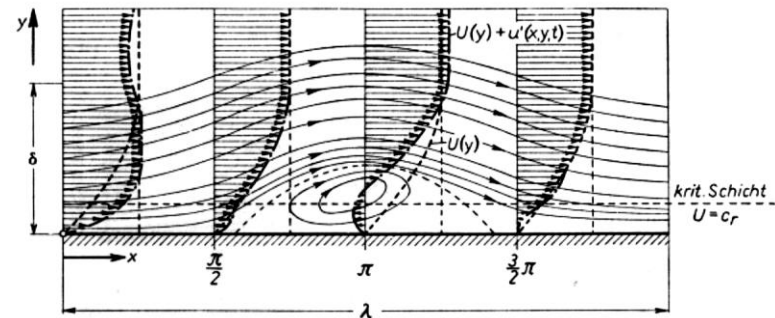


Rozwój oderwania w czasie

Oderwanie może wystąpić zarówno w laminarnej jak i w turbulentnej warstwie przyściennej (w turbulentnej występuje później, czyli przy wyższym dodatnim gradiencie ciśnienia). Oderwanie warstwy przyściennej jest zjawiskiem niekorzystnym, zakłóca pracę maszyn i urządzeń przepływowych oraz obniża ich sprawność. Maszyny i urządzenia przepływowe powinny być projektowane w taki sposób, aby unikać oderwania przepływu przynajmniej w ich projektowych warunkach pracy.



## Pęcherz oderwaniowy



<Oderwanie warstwy przyściennej na profilu lotniczym przy dużym kącie natarcia (rysunek dolny)

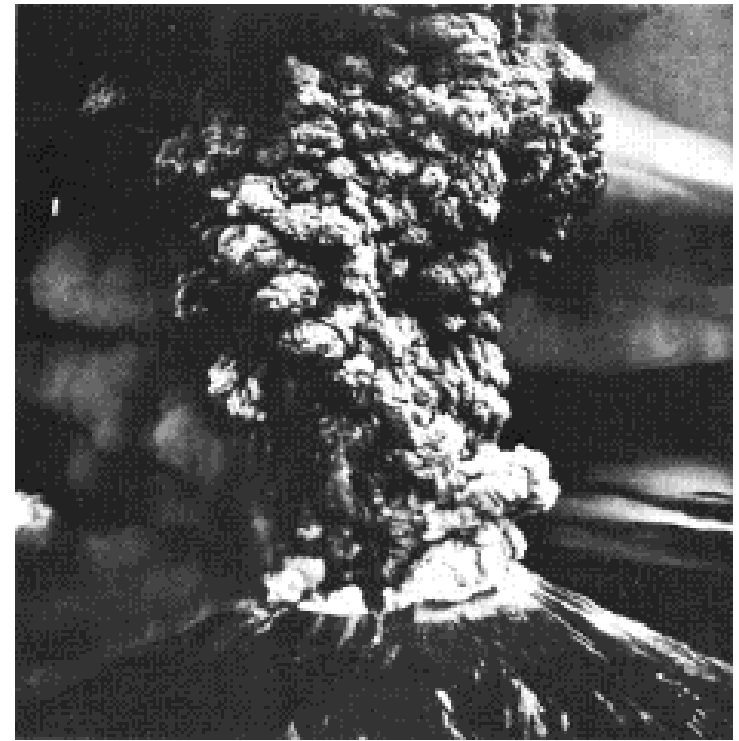
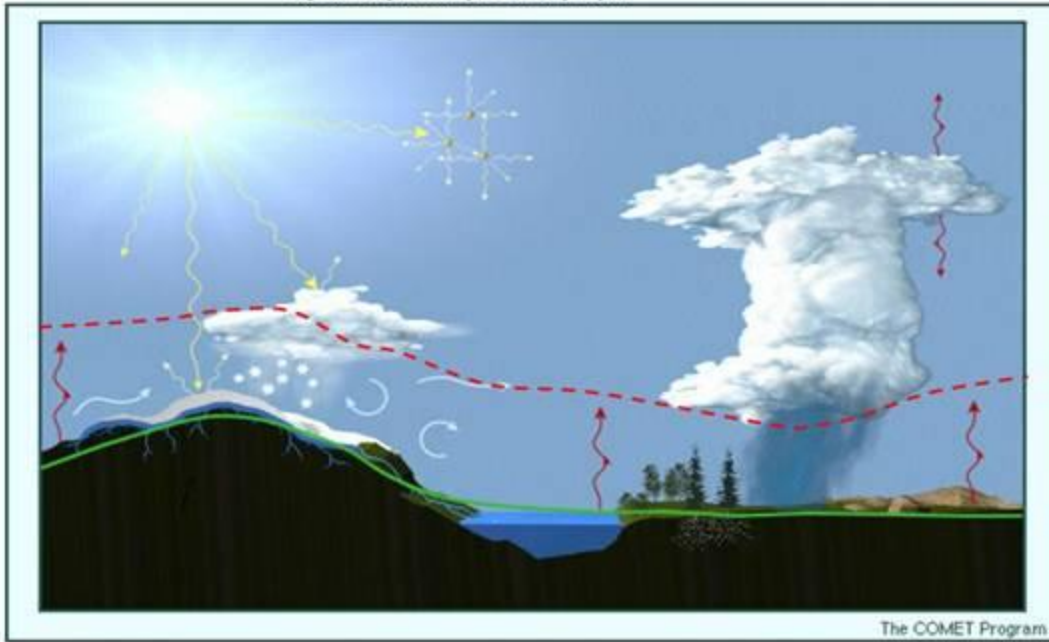


# Przykłady przepływów laminarnych i turbulentnych w warstwach przyściennych i śladach



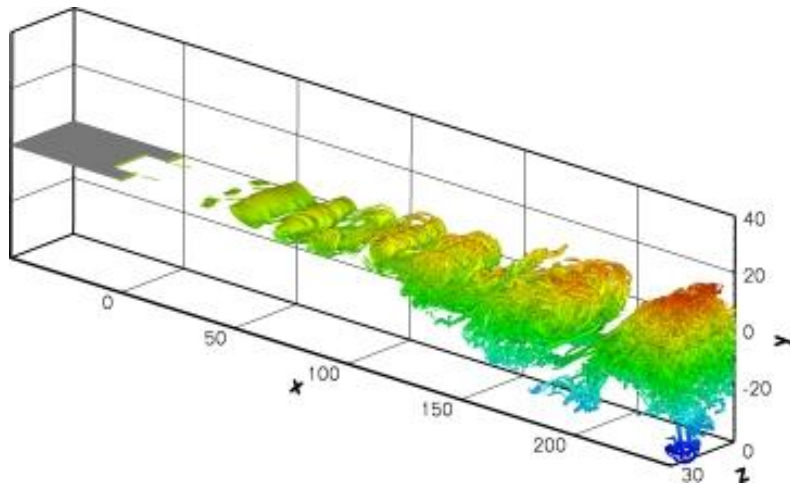
### Depiction of various surfaces and PBL processes

--- Top of the planetary boundary layer



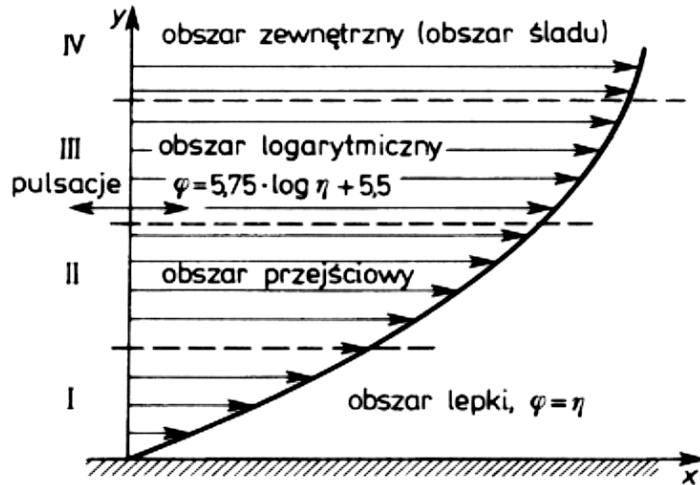
Warstwa przyścienna w atmosferze Ziemi

Wyływ turbulentny z krateru wulkanu



<- Ślad turbulentny za płaską płytą obliczony metodą LES (Large Eddy Simulation)

# Struktura turbulentnej warstwy przyściennej



W turbulentnej warstwie przyściennej można wydzielić kilka stref różniących się dominującymi mechanizmami kształtującymi przepływ.

Ogólnie warstwę można podzielić na obszar wewnętrzny o grubości około  $0,2\delta$  oraz obszar zewnętrzny. W obszarze zewnętrznym dominują siły bezwładności. Obszar wewnętrzny dzieli się na podwarstwę lepka o grubości około  $0,02\delta$ , gdzie siły lepkości i bezwładności są podobnego rzędu i funkcjonuje przede wszystkim lepkościowy mechanizm wymiany pędu i energii, oraz obszar przejściowy i „logarytmiczny”, gdzie dominują naprężenia turbulentne i turbulentny mechanizm wymiany masy, pędu i energii.

Theodore von Karman wprowadził do opisu przepływu w warstwie przyściennej bezwymiarową prędkość przepływu i bezwymiarową odległość od ściany:

$$y^+ = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu} \quad \text{bezwymiarowa odległość od ściany}$$

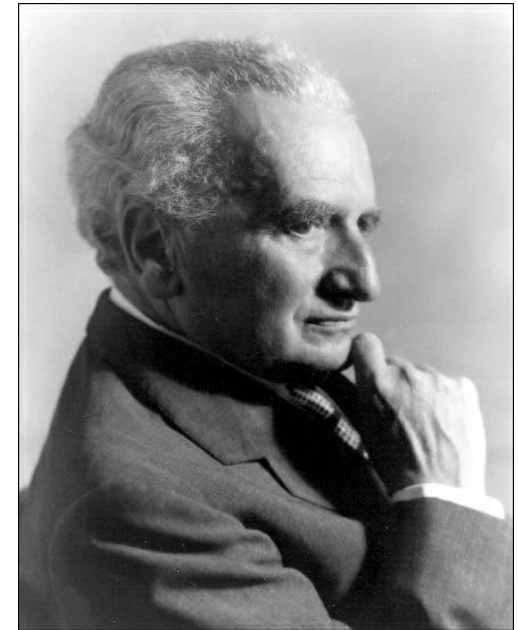
gdzie:  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad \text{bezwymiarowa prędkość przepływu}$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość płynu

$\nu$  - kinematyczny współczynnik lepkości płynu

$\tau_w$  - naprężenia lepkościowe na ścianie



**Theodore von Karman**  
1881 - 1963

W podwarstwie lepkiej mamy wtedy:  $u^+ = \varphi = y^+ = \eta$

W obszarze „logarytmicznym” mamy wtedy:  $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$

Von Karman pierwotnie ustalił eksperymentalnie wartości stałych:

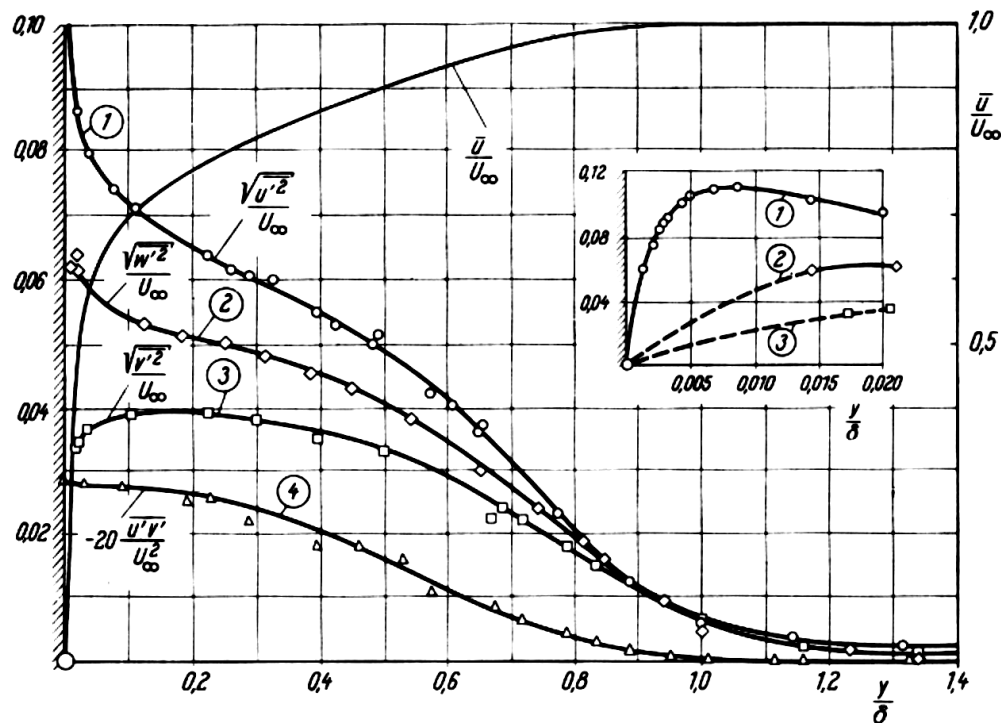
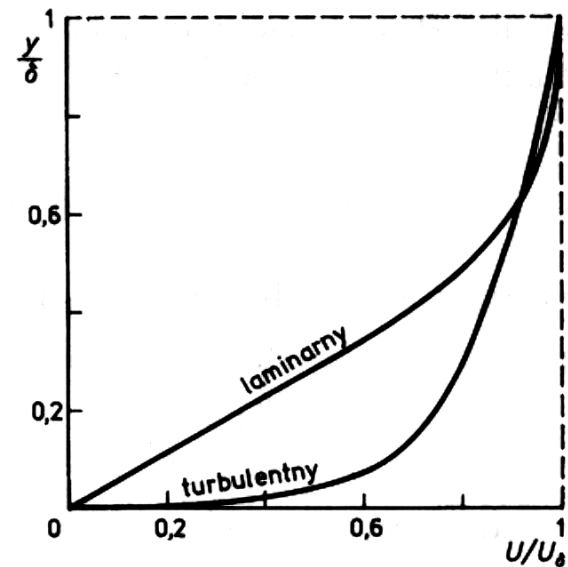
$$\kappa = 0,41 \quad C \approx 5,0 \quad (\text{dla ścian gładkich})$$

W obszarze przejściowym żadna z powyższych relacji nie zgadza się z rzeczywistością. Graniczną wartością bezwymiarowej odległości od ściany jest:

$$y^+ = 11,0$$

Poniżej tej wartości lepiej oddaje rzeczywistość wzór dla podwarstwy lepkiej, powyżej tej wartości – wzór logarytmiczny. Powyższe zależności są podstawą tzw. prawa ściany, używanego do korygowania stosowanych w obliczeniach numerycznych modeli turbulencji w obszarze bezpośrednio przylegającym do opływanych obiektów.

Na skutek łącznego działania lepkościowego i turbulentnego mechanizmu wymiany pędu profil prędkości w warstwie turbulentnej jest „pełniejszy” niż w warstwie laminarnej.



W turbulentnej warstwie przyściennej występują silne trójwymiarowe fluktuacje prędkości, które osiągają maksimum w pobliżu ściany, czyli w obszarze maksymalnego gradientu prędkości średniej.

Na drodze teoretyczno-empirycznej wyprowadzono szereg praktycznie użytecznych wzorów:

$$\delta_{turb} = \frac{0,37 \cdot L}{\sqrt[5]{Re}}$$

$$C_{fturb} = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} \quad \text{dla liczb Reynoldsa} \quad 5 \cdot 10^5 < Re < 10^6$$

$$C_{fturb} = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} - \frac{A}{Re} \quad \text{dla} \quad 3 \cdot 10^5 < Re < 10^9$$

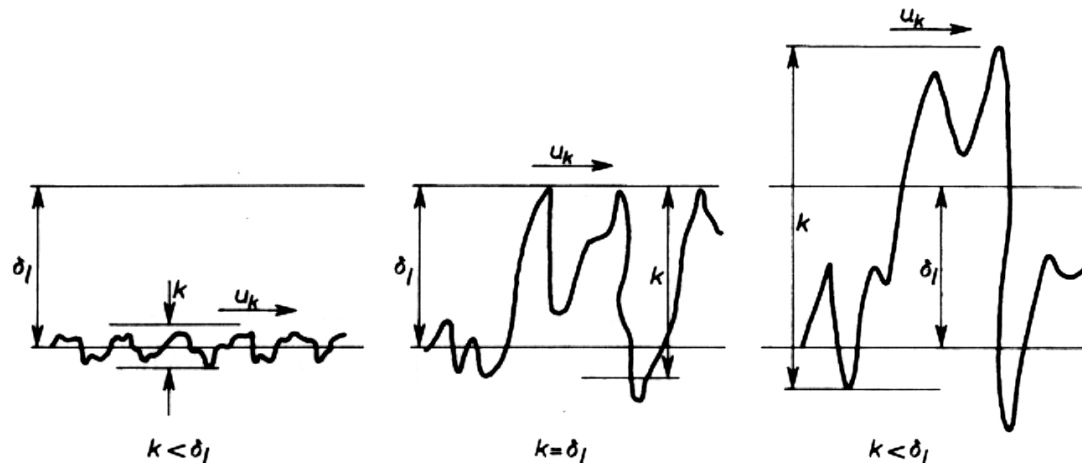
gdzie stałą A określa się na podstawie (górnej) wartości krytycznej liczby Reynoldsa według tabeli:

| $Re_{kryt}$    | A    |
|----------------|------|
| $3 \cdot 10^5$ | 1050 |
| $5 \cdot 10^5$ | 1700 |
| $10^6$         | 3300 |
| $5 \cdot 10^6$ | 5700 |

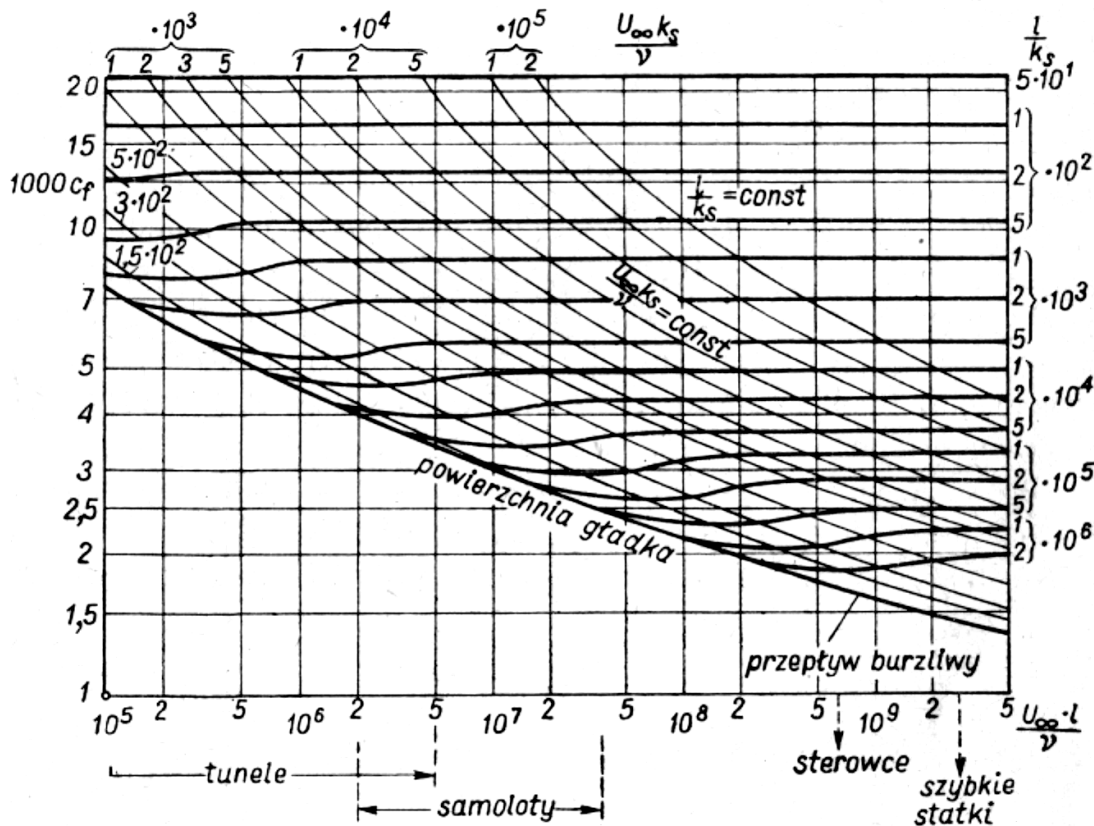
Podane wyżej wzory na współczynnik tarcia obowiązują dla ściany gładkiej. W przepływie turbulentnym współczynnik ten zależy również od chropowatości ściany

Miarą chropowatości powierzchni jest średnia wysokość chropowatości  $k_s$

Z punktu widzenia oporu tarcia istotna jest relacja średniej wysokości chropowatości do grubości podwarstwy lepkiej w turbulentnej warstwie przyściennej. Jeżeli chropowatość mieści się w tej podwarstwie, to chropowatość nie wywołuje zmiany profilu prędkości w warstwie i nie wpływa na opór tarcia - powierzchnię nazywamy hydrodynamicznie gładką. Natomiast jeżeli wysokość chropowatości wykracza poza tę podwarstwę, to jej obecność zmienia profil prędkości w warstwie i wpływa na wzrost oporu tarcia.







Wykres pokazuje zależność współczynnika oporu tarcia od odwrotności chropowatości względnej (czyli odniesionej do charakterystycznego wymiaru liniowego  $L$ ). Naniesiono również liczby Reynoldsa oparte na wysokości chropowatości.

Istnieją zależności empiryczne pozwalające wyznaczyć współczynnik oporu tarcia na powierzchni chropowatej w turbulencji przyściennej, np.:

gdzie:

$$C_{fchrop} = \left( 1,89 + 1,62 \log \frac{l}{k_s} \right)^{-2,5} \quad \text{przy} \quad 10^2 < \frac{l}{k_s} < 10^6$$

## Przykład nr 1

Cienka płaska płyta o wymiarach  $0,1 \cdot 0,5$  [m] została umieszczona z zerowym kątem natarcia w przepływie wody o prędkości  $10,0$  [m/s]. Wyznaczyć opór tarcia płyty w dwóch przypadkach: a) gdy dłuższy bok jest prostopadły do kierunku prędkości, b) gdy krótszy bok jest prostopadły do prędkości.

**Dane:** kinematyczny współczynnik lepkości  $\nu = 0,000001$  [m<sup>2</sup> / s]  
gęstość wody  $\rho = 1000$  [kg / m<sup>3</sup>]

### Przypadek a

$$Re = \frac{u \cdot L}{\nu} = \frac{10,0 \cdot 0,1}{0,000001} = 1000000 \quad C_f = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} = \frac{0,074}{\sqrt[5]{1000000}} = 0,00467$$

$$R_f = C_f \frac{1}{2} \rho S V^2 = 0,00467 \cdot 0,5 \cdot 1000,0 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 10,0^2 = 23,35 [N]$$

## Przypadek b

$$\text{Re} = \frac{u \cdot L}{\nu} = \frac{10,0 \cdot 0,5}{0,000001} = 5000000 \quad C_f = \frac{0,074}{\sqrt[5]{\text{Re}}} = \frac{0,074}{\sqrt[5]{5000000}} = 0,00338$$

$$R_f = C_f \frac{1}{2} \rho V^2 S = 0,00338 \cdot 0,5 \cdot 1000,0 \cdot 0,1 \cdot 10,0^2 = 16,9[N]$$

**Wniosek:** zmiana ustawienia płytki względem przepływu, przy zachowaniu pozostałych parametrów, może spowodować **istotną zmianę oporu tarcia**

## Przykład nr 2

Cienką płytę o wymiarach 1,0\*1,0 [m] umieszczono pod zerowym kątem natarcia w przepływie wody o prędkości 10 [m/s]. Wyznaczyć wielkość oporu tarcia w dwóch przypadkach: a) dla płyty gładkiej, b) dla płyty o chropowatości względnej 0,0001.

**Dane:** współczynnik lepkości kinematycznej  $\nu=0,000001 \left[ \frac{m^2}{s} \right]$   
gęstość wody  $\rho=1000,0 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$

### Przypadek a

$$Re = \frac{uL}{\nu} = \frac{10,0 \cdot 1,0}{0,000001} = 10000000$$

Wysoka wartość liczby Reynoldsa wymaga wykorzystania bardziej złożonego wzoru

$$C_{fturb} = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} - \frac{A}{Re} = \frac{0,455}{(\log 10^7)^{2,58}} - \frac{1050}{10^7} = 0,00263$$

$$R_{fturb} = C_{fturb} \frac{1}{2} \rho u^2 S = 0,00264 \cdot 0,5 \cdot 1000,0 \cdot 10,0^2 \cdot 2,0 = 264[N]$$

## Przypadek b

$$C_{fchrop} = (1,89 + 1,62 \log 10000)^{-2,5} = 0,00494$$

$$R_{fchrop} = C_{fchrop} \frac{1}{2} \rho u^2 S = 0,00494 \cdot 0,5 \cdot 1000,0 \cdot 10,0^2 \cdot 2,0 = 494[N]$$

**Wniosek:** chropowatość powierzchni ma poważny wpływ na wielkość oporu tarcia w turbulentnej warstwie przyściennej i może doprowadzić do nawet ponad dwukrotnego wzrostu oporu w stosunku do powierzchni gładkiej.

## Przykład nr 3

Na płycie o długości  $L=1$  [m] w przepływie przy  $Re=100000$  występuje alternatywnie laminarna i turbulenta warstwa przyścienna. Jakie są grubości obu typów warstwy na końcu płyty?

Warstwa laminarna: 
$$\delta_{lam} = \frac{5L}{\sqrt{Re}} = \frac{5 \cdot 1}{\sqrt{100000}} = 0,0158[m]$$

Warstwa turbulenta: 
$$\delta_{turb} = \frac{0,37L}{\sqrt[5]{Re}} = \frac{0,37 \cdot 1}{\sqrt[5]{10^5}} = 0,037[m]$$

**Wniosek:** przy porównywalnych warunkach przepływu turbulenta warstwa przyścienna jest ponad dwukrotnie grubsza od warstwy laminarnej. Jest to konsekwencją bardziej intensywnej wymiany pędu i energii płynu w warstwie turbulentej.

## Temperaturowa warstwa przyścienna

W niektórych problemach (np. w wymiennikach ciepła) istotne jest wyznaczenie rozkładu temperatury w warstwie przyściennej. Przy założeniu, że przepływ jest stacjonarny i liczba Reynoldsa jest większa od 1000, można wyprowadzić zależność:

$$\theta = \frac{T_w - T(y)}{T_w - T_\infty} = \frac{u(y)}{u_\infty} \quad \text{przy} \quad \text{Pr} = \frac{c\mu}{\lambda} = 1,0 \quad (\text{liczba Prandtla})$$

gdzie:

- $\theta$  – bezwymiarowa temperatura
- $T_w$  - temperatura na ścianie
- $T_\infty$  - temperatura daleko od ściany

Jeżeli w przepływie stacjonarnym liczba Prandtla jest równa 1, to profil bezwymiarowej temperatury  $\theta$  w warstwie przyściennej jest identyczny z profilem bezwymiarowej prędkości. Przy  $\text{Pr} > 1$  gradient temperatury w wewnętrznym obszarze warstwy jest większy od gradientu prędkości, a przy  $\text{Pr} < 1$  – mniejszy.