

J. Szantyr – Wykład 6 – Oddziaływanie ciał stałych z płynem - masa towarzysząca

W roku 1828 Friedrich Bessel zauważył, że wahadło zanurzone w wodzie zmienia (wydłuża) okres wahań w porównaniu do wartości w powietrzu. Można to zinterpretować jako pozorny przyrost masy wahadła. Bessel wprowadził pojęcie **masy wody towarzyszącej**, czyli pewnej umownej masy wody (płynu), wykonującej **ruch niejednostajny** wraz z zanurzonym w tym płynie obiektem i zmieniającej charakterystyki tego ruchu. Masa towarzysząca powiększa bezwładność obiektu, wprowadzając do opisu jego ruchu dodatkowe siły.



Friedrich Wilhelm Bessel
1784 - 1846



Alfred Barnard Basset
1854 - 1930

Dodatkowe siły występujące na obiekcie wykonującym ruch przyspieszony w rzeczywistym płynie lepkim (w porównaniu do ruchu w próżni) można podzielić na dwie części: część związaną z przyspieszeniem pewnej masy płynu (efekt w zasadzie czysto potencjalny) oraz część wynikającą ze zjawisk lepkościowych w niestacjonarnej warstwie przyściennej formującej się na obiekcie. Ta druga część nosi nazwę **siły Basseta (1888)**.

Siła Basseta jest ważna przede wszystkim dla małych cząstek ciał stałych poruszających się w płynie. Jej wielkość zależy od historii ruchu cząstki i w przypadku cząstki kulistej może być opisana wzorem:

$$F(t) = \frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi \rho_c \mu_c} \int_0^t \frac{\frac{D\bar{u}}{Dt'} - \frac{D\bar{v}}{Dt'}}{\sqrt{t-t'}} dt'$$

gdzie:

D – średnica cząstki

t – bieżąca chwila czasu

ρ_c - gęstość płynu

μ_c - dynamiczny współczynnik lepkości płynu

$\bar{u}$ - prędkość cząstki

$\bar{v}$ - prędkość płynu

W sensie fizycznym siła Basseta wynika z opóźnionego procesu formowania się warstwy przyściennej i śladu za cząstką ciała stałego poruszającą się w płynie ruchem przyspieszonym.

Najprostsza interpretacja: **masa towarzysząca** określa pracę konieczną do zmiany energii kinetycznej płynu w ruchu przyspieszonym obiektu zanurzonego w płynie. Energia kinetyczna ruchu płynu wywołanego ruchem ciała stałego w płynie może być zapisana jako:

$$E = \frac{\rho}{2} \int_V (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dV \quad \text{gdzie } V - \text{cała objętość płynu}$$

W ustalonym ruchu prostoliniowym jest $E = \text{const}$ oraz $E \propto U^2$

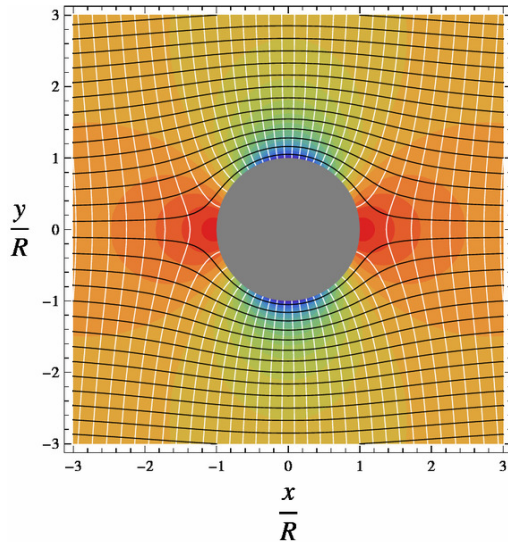
Wtedy można napisać: $E = \frac{\rho}{2} I U^2$ gdzie: $I = \int_V \left[\left(\frac{u_1}{U} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{U} \right)^2 + \left(\frac{u_3}{U} \right)^2 \right] dV$

Jeżeli obiekt przyspiesza lub hamuje to energia E zmienia się wraz z prędkością U . Zmiana energii E może być dokonana jedynie poprzez pracę dodatkowej siły hydrodynamicznej F , jaka się pojawi na obiekcie w ruchu przyspieszonym, zgodnie z zależnością:

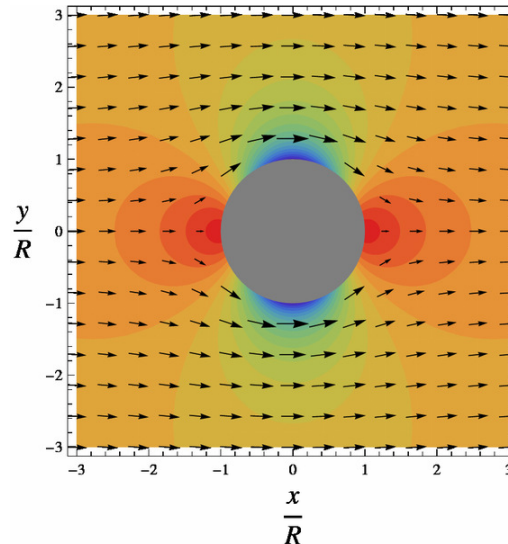
$$F = -\frac{1}{U} \frac{dE}{dt} = -\rho I \frac{dU}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{siła } F \text{ ma postać podobną do siły potrzebnej do} \\ \text{przyspieszenia obiektu o masie } m \text{ czyli } m dU/dt \end{array}$$

Dogodnie jest przedstawić siłę F jako dodatkową masę płynu $M = \rho I$ przyspieszanego wraz z obiektem. W rzeczywistości każda cząsteczka płynu wokół obiektu doznaje innego przyspieszenia, czyli masa towarzysząca M jest pewną „masą wirtualną”.

Prosty przykład – prostoliniowy ruch przyspieszony kuli lub cylindra w przepływie płaskim (2D)

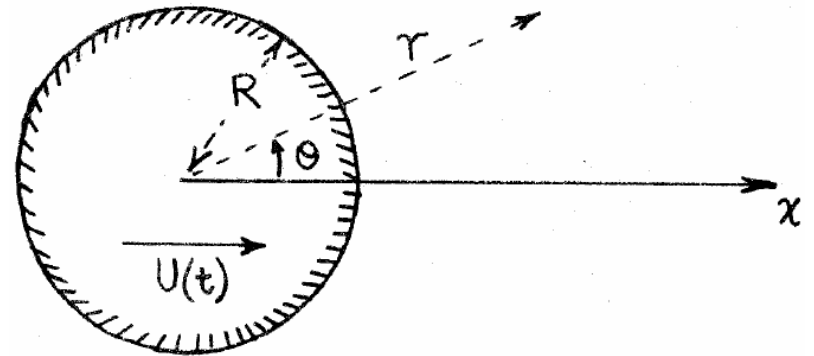


Linie prądu i linie ekwipotencjalne



Wektory prędkości i pole ciśnienia

Stosujemy opis potencjalnego ruchu płynu



Uzyskujemy odpowiednio następujące potencjały prędkości:

Dla kuli:
$$\Phi(r, \vartheta) = -\frac{UR^3}{2r^2} \cos \vartheta$$

Dla cylindra:
$$\Phi(r, \vartheta) = -\frac{UR^2}{r} \cos \vartheta$$

Wtedy całki I określające masy towarzyszące można wyliczyć:

Dla kuli:

$$I = \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{U} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{Ur} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr = \frac{2}{3} \pi R^3$$

czyli jest równa połowie masy płynu wypartego przez kulę

Dla cylindra (na jednostkę długości):

$$I = \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{U} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{Ur} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] r d\vartheta dr = \pi R^2$$

czyli jest równa masie płynu wypartego przez walec

W ogólnym przypadku ruchu obiektu o sześciu stopniach swobody zmiana każdej składowej prędkości może spowodować powstanie dodatkowych składowych sił we wszystkich sześciu współrzędnych. Mamy wtedy do czynienia z macierzą M_{ij} (tensorem) mas towarzyszących:

$$F_i = -M_{ij} \ddot{u}_j \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Można udowodnić, że w przepływie potencjalnym macierz mas towarzyszących jest symetryczna, czyli w ogólnym przypadku możemy mieć 21 mas towarzyszących. Symetria obiektu prowadzi do zmniejszenia liczby mas towarzyszących.

Tensor mas towarzyszących

Symetria:

$$M_{ij} = M_{ji}$$

Wymiary: $F=$

kg

kgm

kgm^2

M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	$\dot{u}_1$
M_{21}	M_{22}	M_{23}	M_{24}	M_{25}	M_{26}	$\dot{u}_2$
M_{31}	M_{32}	M_{33}	M_{34}	M_{35}	M_{36}	$\dot{u}_3$
M_{41}	M_{42}	M_{43}	M_{44}	M_{45}	M_{46}	$\dot{u}_4$
M_{51}	M_{52}	M_{53}	M_{54}	M_{55}	M_{56}	$\dot{u}_5$
M_{61}	M_{62}	M_{63}	M_{64}	M_{65}	M_{66}	$\dot{u}_6$

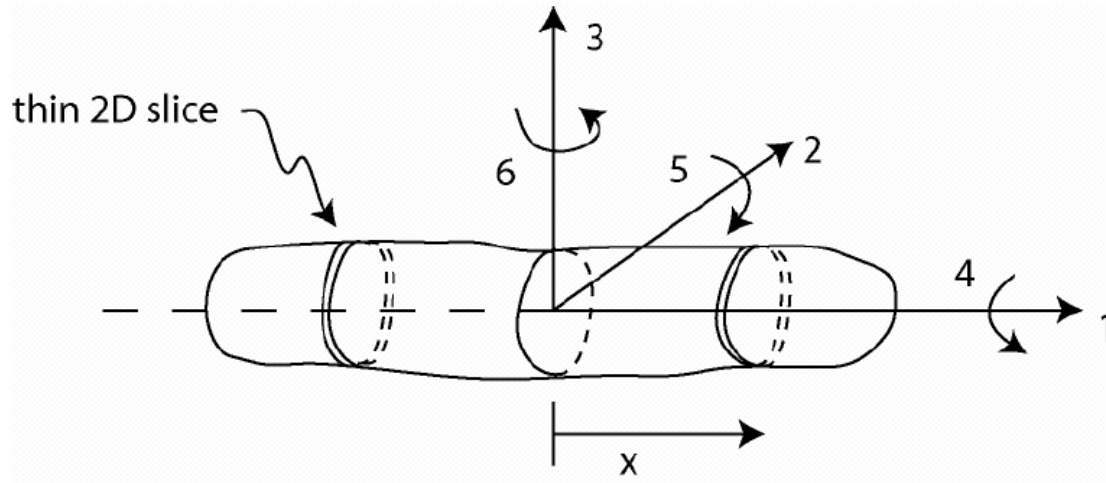
pierwszy indeks – kierunek siły, drugi indeks – kierunek ruchu

$i=1,2,3$ – siły; $i=4,5,6$ - momenty

$j=1,2,3$ – przyspieszenia liniowe; $j=4,5,6$ – przyspieszenia kątowe

Niekiedy przedstawia się masy towarzyszące w postaci bezwymiarowej, czyli odniesione do jednostkowych przyspieszeń. Bezwymiarowe współczynniki mas towarzyszących oznaczamy jako m_{ij}

Obliczenie współczynników mas towarzyszących dla ciała trójwymiarowego o dowolnym kształcie jest trudne. Jeżeli jeden wymiar ciała jest wyraźnie większy od pozostałych, wtedy można zastosować tzw. model ciała smukłego.



Wtedy można pociąć ciało na „plasterki” i scałkować wzdłuż ciała współczynniki mas towarzyszących dla odpowiednich przekrojów dwuwymiarowych:

$$m_{22} = \int_L a_{22} dx$$

$$m_{23} = - \int_L a_{23} dx$$

$$m_{24} = \int_L a_{24} dx$$

$$m_{26} = \int_L x a_{22} dx$$

$$m_{33} = \int_L a_{33} dx$$

$$m_{35} = - \int_L x a_{33} dx$$

$$m_{44} = \int_L a_{44} dx$$

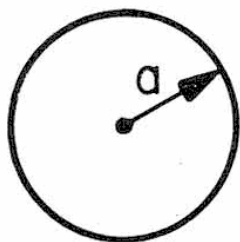
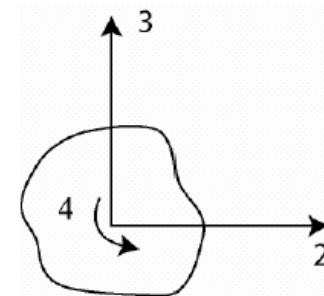
$$m_{46} = \int_L x a_{24} dx$$

$$m_{55} = \int_L x^2 a_{33} dx$$

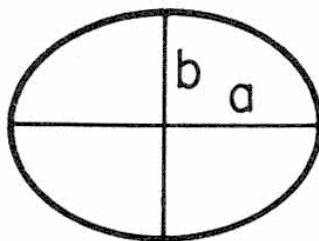
$$m_{66} = \int_L x^2 a_{22} dx$$

W przypadkach bardziej złożonych korzysta się z programów CFD

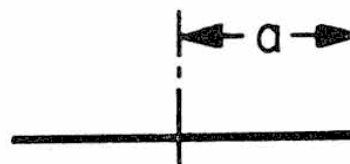
Współczynniki mas towarzyszących dla wybranych przekrojów dwuwymiarowych podano poniżej:



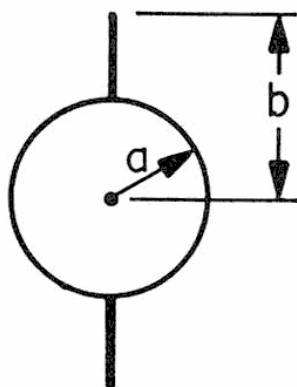
$$\begin{aligned} m_{11}: & \pi \rho a^2 \\ m_{22}: & \pi \rho a^2 \\ m_{66}: & 0 \end{aligned}$$



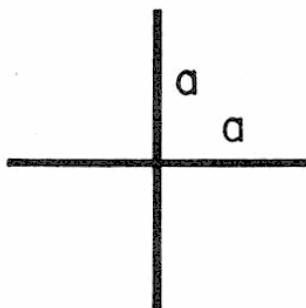
$$\begin{aligned} & \pi \rho b^2 \\ & \pi \rho a^2 \\ & \frac{1}{8} \pi \rho (a^2 - b^2)^2 \end{aligned}$$



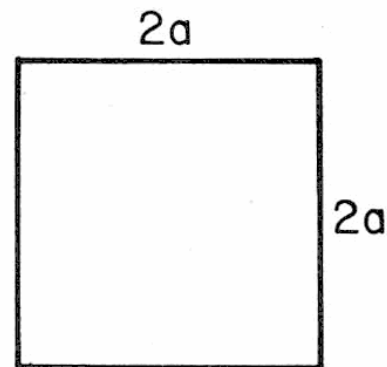
$$\begin{aligned} & 0 \\ & \pi \rho a^2 \\ & \frac{1}{8} \pi \rho a^4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m_{11}: & \pi \rho [a^2 + (b^2 - a^2)^2 / b^2] \\ m_{22}: & \pi \rho a^2 \\ m_{66}: & * \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \pi \rho a^2 \\ & \pi \rho a^2 \\ & \frac{2}{\pi} \rho a^4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & 4.754 \rho a^2 \\ & 4.754 \rho a^2 \\ & 0.725 \rho a^4 \end{aligned}$$

W niestacjonarnym ruchu obiektu (ciała stałego) zanurzonego w płynie **masa towarzysząca** jest to umowna masa płynu, wykonująca ruch z tą samą prędkością z jaką porusza się obiekt. Masa towarzysząca zwiększa bezwładność obiektu i przez to wpływa na charakterystyki jego ruchu

W rzeczywistości ruch obiektu zanurzonego w płynie wywołuje ruch **innej** masy płynu ze zróżnicowanymi prędkościami – większymi blisko obiektu i mniejszymi w większej odległości od niego. Ta **rzeczywista** masa płynu w taki sam sposób zwiększa bezwładność obiektu jak **umowna** masa towarzysząca.

Przy ruchu ciał stałych w gazach z reguły nie uwzględnia się masy towarzyszącej ze względu na niewielką gęstość gazów.

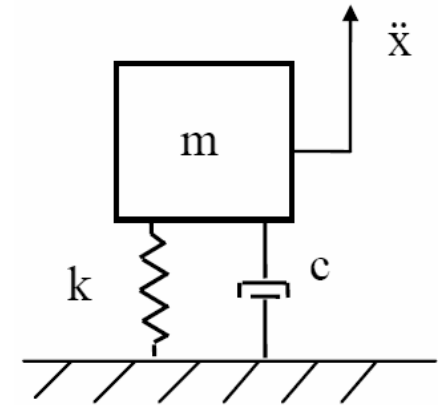
Wpływ masy towarzyszącej na oscylacje ciała sztywnego zanurzonego w płynie – prosty przykład jednowymiarowy.

m – masa ciała

c – współczynnik tłumienia (efekt lepkości płynu)

k – współczynnik sztywności

x – przemieszczenie ciała



Masa towarzysząca zwiększa bezwładność ciała, czyli przeciwdziała oscylacjom. Wobec tego równanie drgań swobodnych ma postać:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m_a\ddot{x}$$

$$(m + m_a)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$m_e\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

gdzie:

m_a - masa towarzysząca

m_e - masa „efektywna”

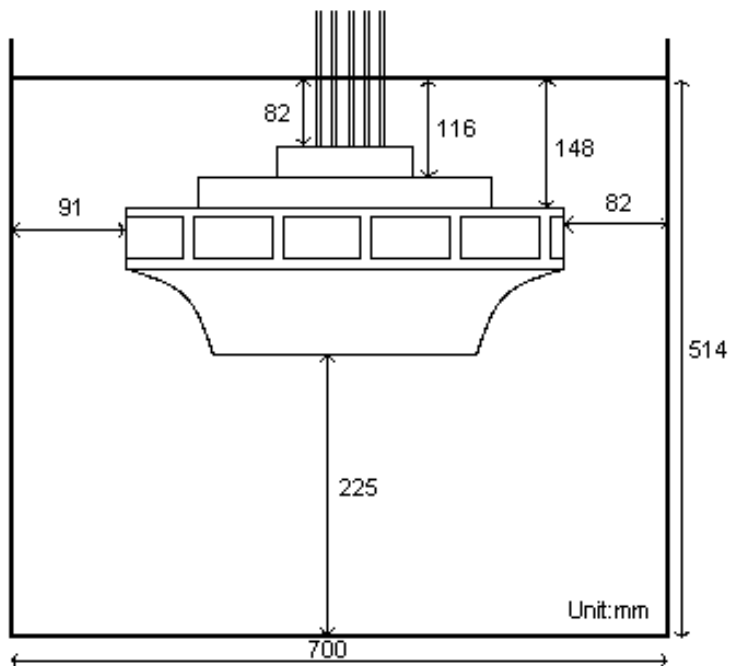
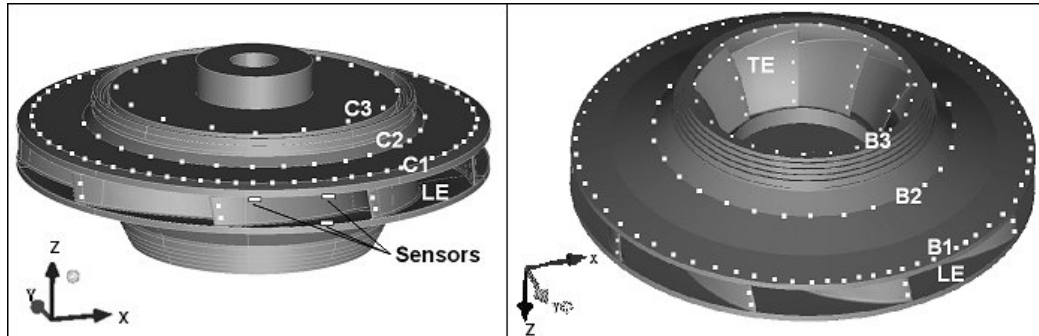
Częstość własną drgań układu w płynie można wyznaczyć jako:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_e}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4m_e k}}$$

Jak widać, zanurzenie obiektu drgającego w płynie powoduje zmniejszenie częstości własnej drgań

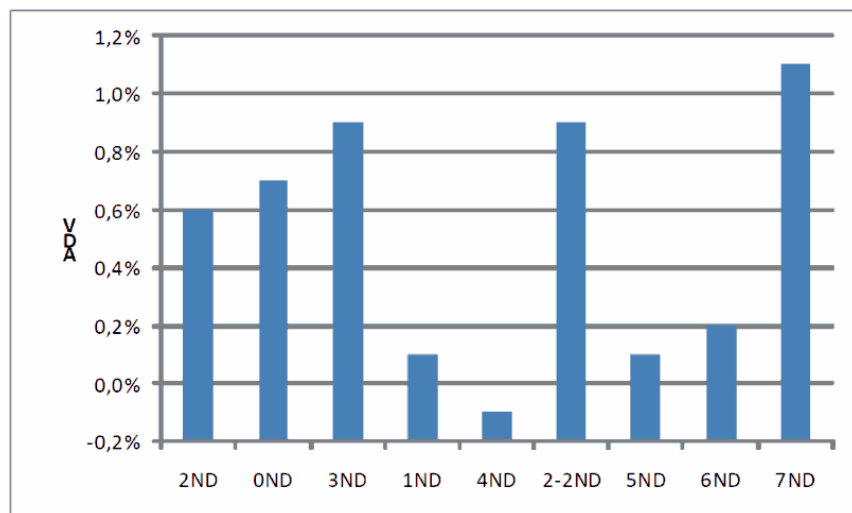
Wpływ mas wody towarzyszącej na drgania wirnika pompy-turbiny

Eksperymentalne badania modelowe

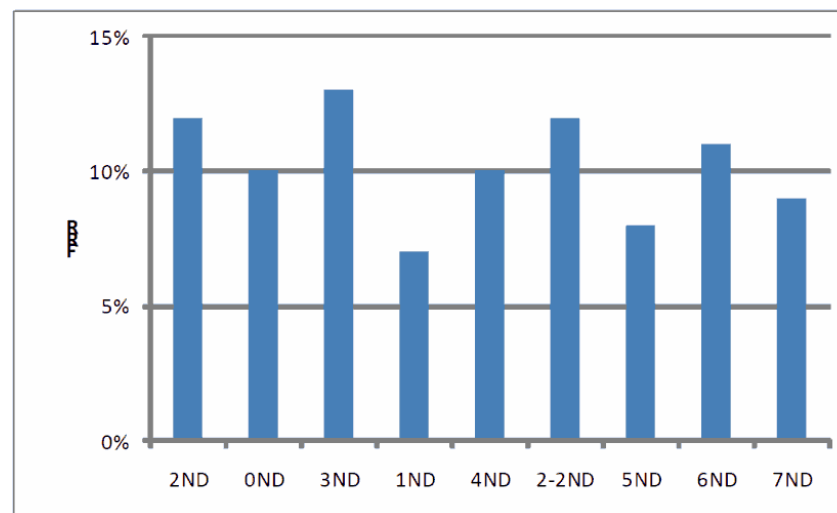


Model wirnika maszyny odwracalnej (pompy – turbiny) był badany w powietrzu i w wodzie. Model pobudzano do drgań przy pomocy wzbudnika w 384 punktach pokazanych na rysunku. Odpowiedzi dla poszczególnych postaci drgań własnych były rejestrowane.

Zmiana współczynników tłumienia



Zmiana mas towarzyszących



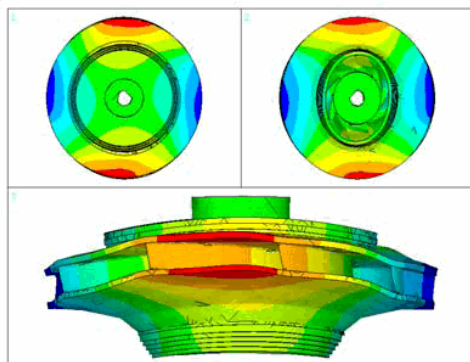
Częstości drgań własnych i współczynniki tłumienia w powietrzu i w wodzie

Table 1 Averaged natural frequencies, damping ratios, FRR's and ADV's in air and in water.

Mode (ND)	f_a	f_w	FRR	ζ_a	ζ_w	ADV
2ND	838	735	0,12	0,034	0,040	0,006
0ND	1111	1006	0,10	0,030	0,037	0,007
3ND	1463	1279	0,13	0,032	0,041	0,009
1ND	1439	1342	0,07	0,030	0,031	0,001
4ND	1811	1630	0,10	0,032	0,031	-0,001
2-2ND	1861	1630	0,12	0,022	0,031	0,009
5ND	2282	2103	0,08	0,025	0,026	0,001
6ND	2769	2464	0,11	0,014	0,016	0,002
7ND	3003	2741	0,09	0,015	0,026	0,011

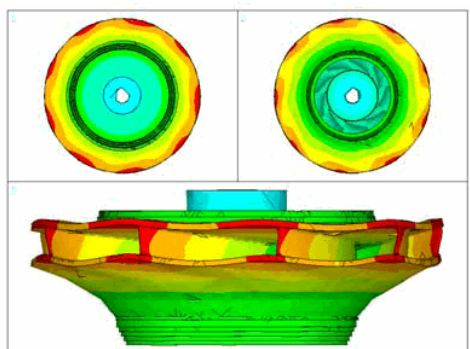
Wpływ mas wody towarzyszącej na drgania wirnika pompy

Obliczenia numeryczne

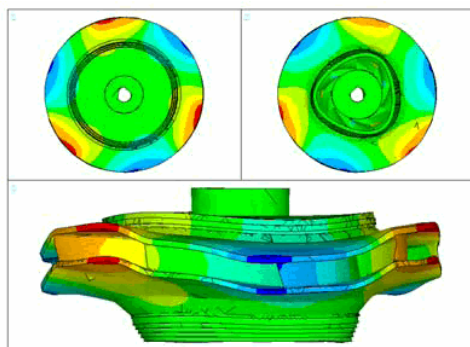


Podstawowe formy
drgań własnych

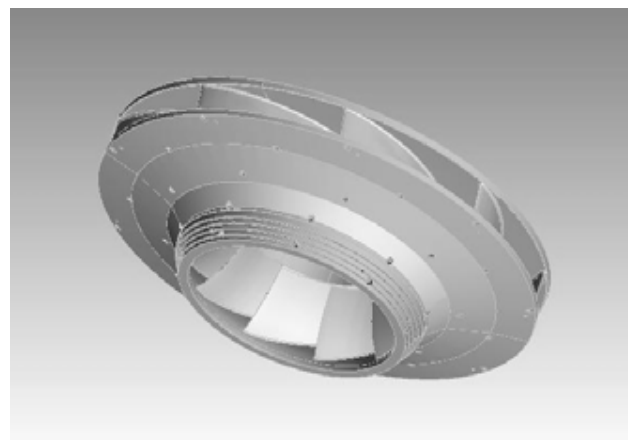
2ND



0ND

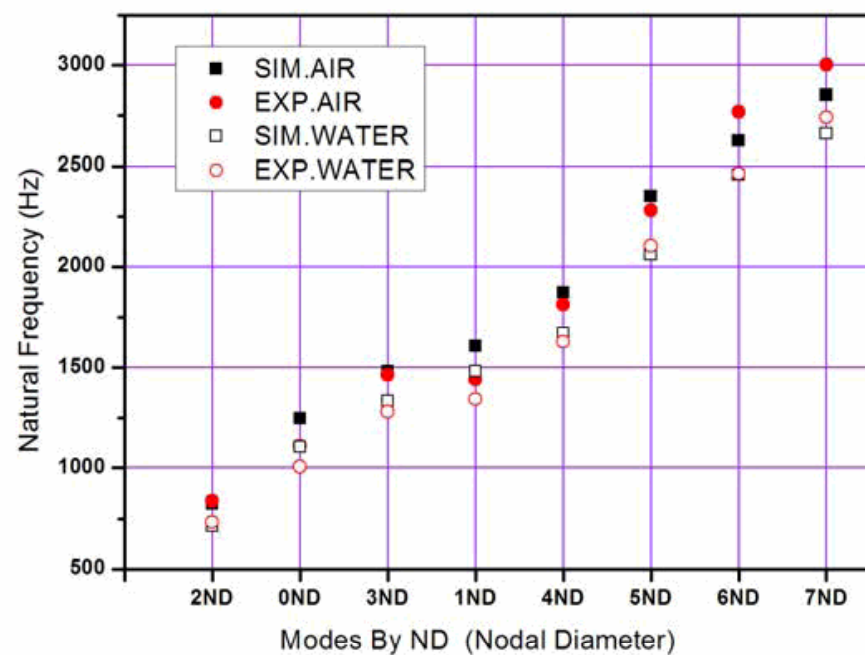


3ND



Model wirnika

Obliczenia wykonano metoda elementów skończonych. Model obliczeniowy wirnika utworzono ze 165000 elementów czworościennych, a model otaczającego płynu ze 342676 takich elementów.

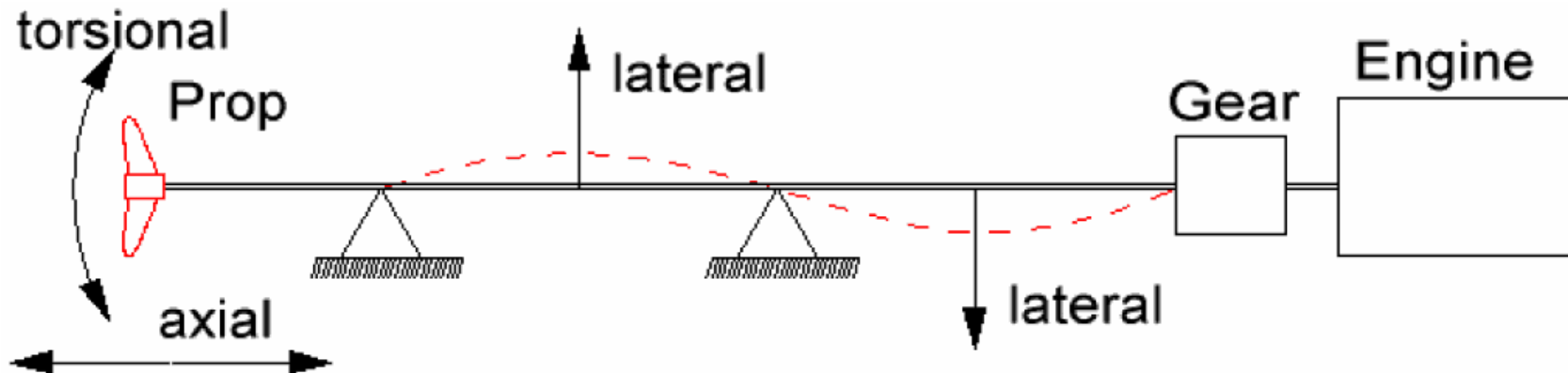


Porównanie obliczonych (SIM) i zmierzonych (EXP) częstości drgań własnych wirnika w powietrzu i w wodzie

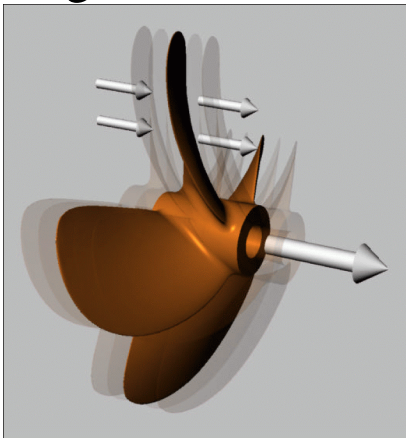
	SIM.AIR	EXP.AIR	SIM.WATER	EXP.WATER	SIM.RATIO	EXP.RATIO
2ND	825.26	838.00	714.11	734.50	0.87	0.88
0ND	1247.40	1111.00	1103.80	1006.00	0.88	0.90
3ND	1479.75	1463.00	1332.90	1279.00	0.90	0.87
1ND	1605.55	1439.00	1482.05	1342.00	0.92	0.93
4ND	1871.80	1811.00	1668.90	1629.00	0.89	0.90
5ND	2350.15	2282.00	2062.05	2103.60	0.88	0.92
6ND	2624.25	2769.00	2458.80	2464.00	0.94	0.89
7ND	2852.00	3002.50	2661.15	2741.50	0.93	0.91

Table 3. Results of modal analysis of pump-turbine runner

Wpływ wody towarzyszącej na drgania układu napędowego okrętu

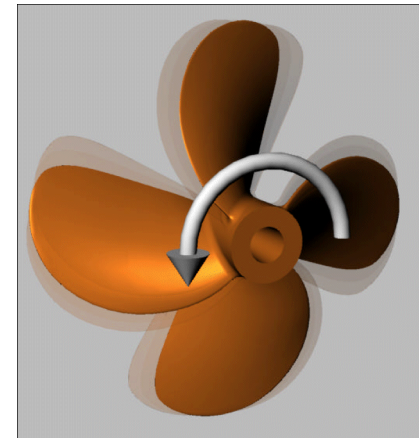


Schemat układu napędowego okrętu. Za najgroźniejsze uznaje się drgania skrętne i drgania wzdłużne (osiowe). Ważnym elementem systemu jest śruba napędowa jako obiekt o dużej masie, zanurzony w wodzie. Na śrubie powstają zmienne siły hydrodynamiczne będące podstawowym źródłem drgań układu



← Zmienna siła naporu

Zmienny moment obrotowy -->



Dla prawidłowej analizy drgań układu napędowego okrętu konieczne jest określenie odpowiednich mas wody towarzyszącej. Istnieje wiele metod wyznaczania tych mas. Najprostszymi są wzory przybliżone:

Dla drgań wzdluznych:

$$M_{11} = (0,1 - 0,2)M_p$$

lub:

$$M_{11} = C_{11}\rho D^3$$

Dla drgań skretnych:

$$M_{44} = K_1 \frac{M_p D}{K_2}$$

lub:

$$M_{44} = C_{44}\rho D^5$$

M_p - masa śruby napędowej

D - średnica śruby napędowej

$$K_1 = 0,25 - 0,30$$

$$K_2 = 19 - 28$$

$$C_{11} = \frac{0,2 \left(\frac{P}{D} \right)^2 A^2}{z}$$

$$C_{44} = \frac{0,0224 \left(\frac{P}{D} \right)^2 A^2}{z}$$

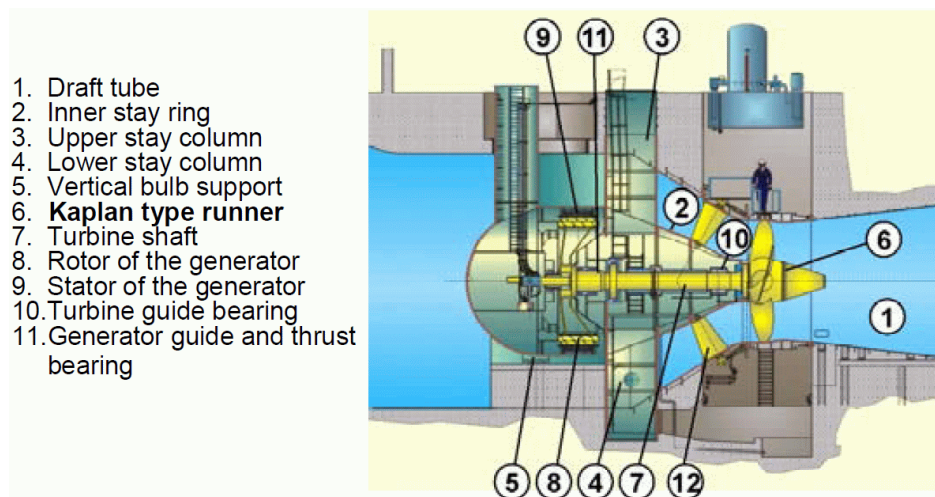
P – skok śruby

z – liczba skrzydeł śruby

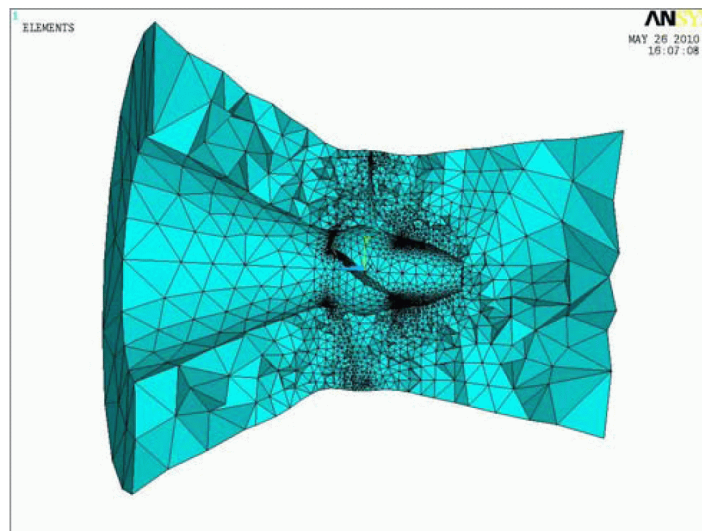
A – współczynnik powierzchni śruby

ρ - gęstość wody

Obliczeniowe wyznaczenie mas wody towarzyszącej turbinie wodnej Kaplana



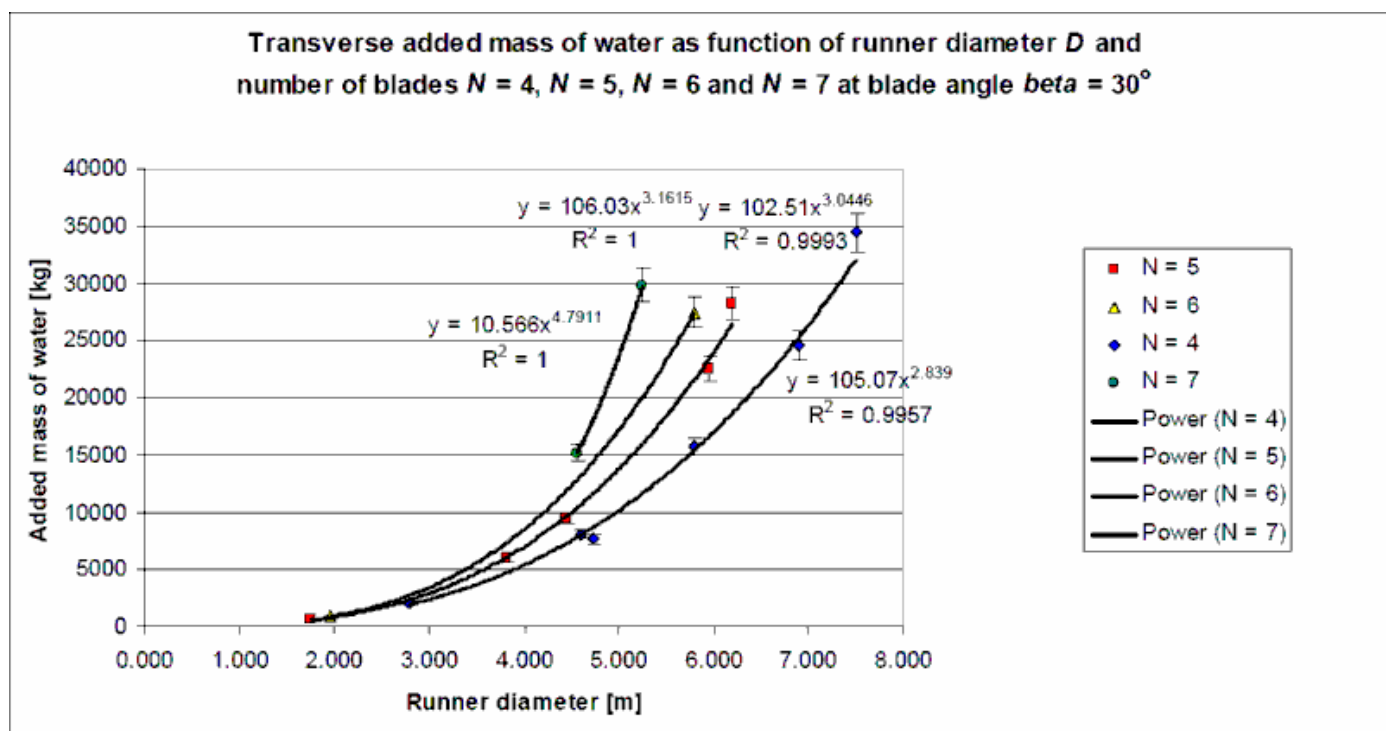
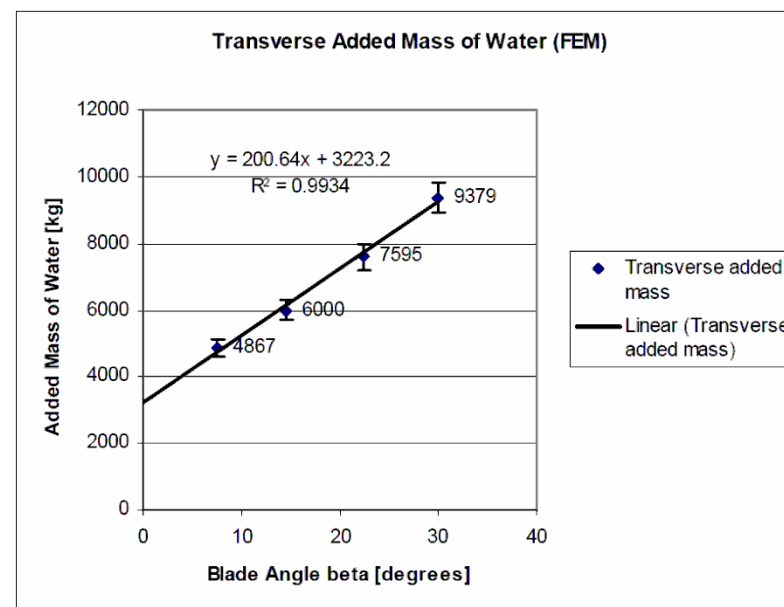
Schemat turbiny Kaplana



Model wirnika w metodzie elementów skończonych (FEM)

Celem obliczeń było wyznaczenie mas wody towarzyszącej dla różnych wielkości wirników, różnych liczb łopat i dla różnych nastaw kątowych łopat turbiny. Wykonano obliczenia dla turbin o mocach od 3 [MW] do 75 [MW] i o średnicach wirnika od 1,75 [m] do 7,5 [m].

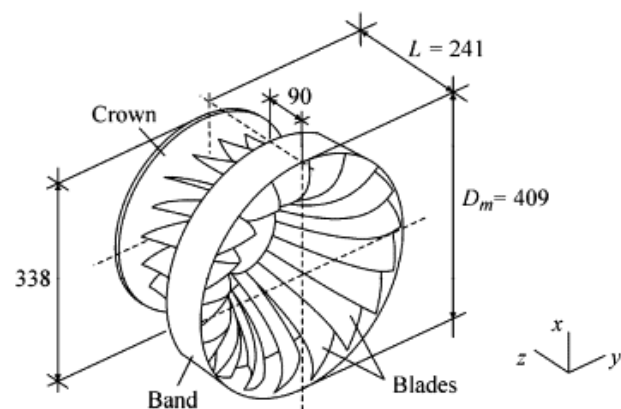
Masa towarzysząca w kierunku poprzecznym M_{22} dla wirnika o średnicy 4,5 [m] przy różnych nastawach kątowych łopatek



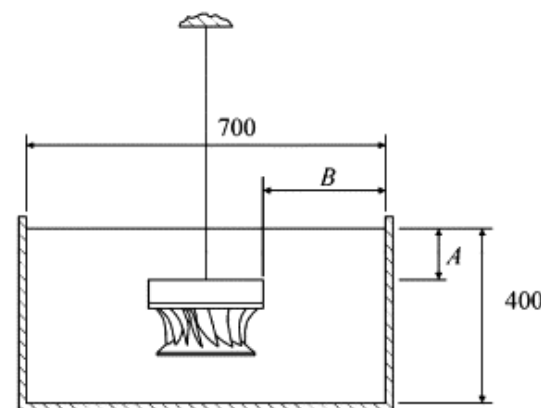
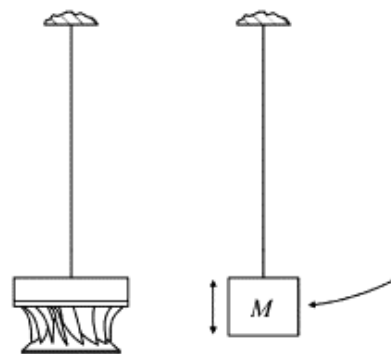
Masa towarzysząca M_{22} dla wirników o różnych średnicach i liczbach skrzydeł przy stałym kącie nastawy β

Wpływ mas wody towarzyszącej na drgania turbiny wodnej Francisa

Eksperymentalne badania modelowe



Model wirnika



Stanowisko pomiarowe w powietrzu i w wodzie

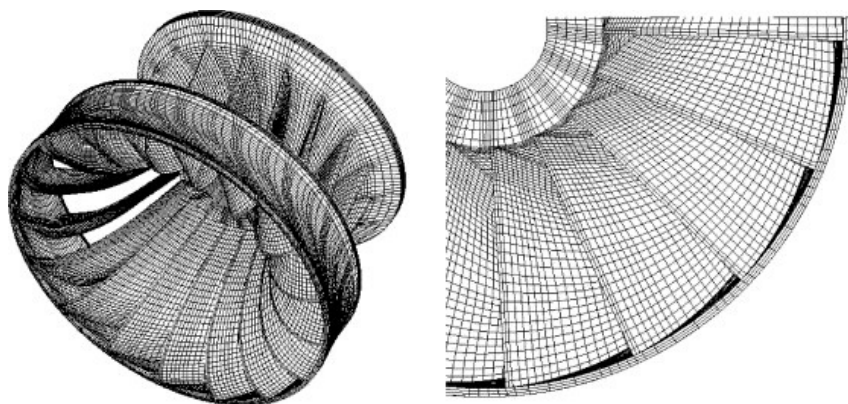
Model wirnika był pobudzany do drgań specjalnym wzbudnikiem (młotem), w 118 wybranych punktach i pobudzającym różne formy drgań własnych w powietrzu i w wodzie. Drgania były mierzone specjalnymi czujnikami i rejestrowane. Drgania wirnika o jednym stopniu swobody w wodzie opisuje równanie:

$$(M_W + M_A)\ddot{X} + (C_W + C_A)\dot{X} + (K_W + K_A)X = F(t)$$

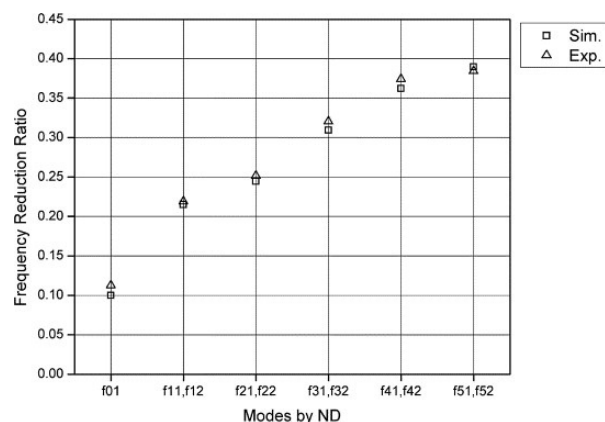
Indeks A oznacza efekt zanurzenia wirnika w wodzie w odniesieniu do masy M, współczynnika tłumienia C i sztywności K.

Wpływ mas wody towarzyszącej na drgania wirnika turbiny wodnej Francisa

Obliczenia numeryczne

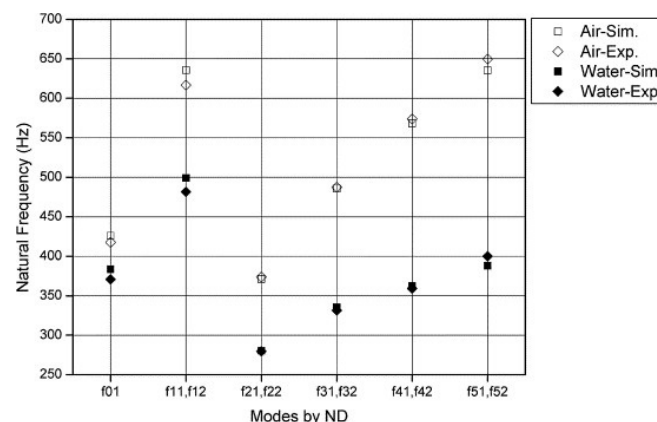


Model wirnika do obliczeń metodą elementów skończonych (FEM)



Zmierzony i obliczony stopień redukcji częstości różnych form drgań własnych w wodzie

Każdy geometrycznie powtarzalny sektor wirnika był modelowany przez 6133 sześciokątne elementy skończone. Wyniki obliczeń porównano z pomiarami z poprzedniego slajdu. We wszystkich przypadkach zanurzenie w wodzie zmniejszyło częstości własne drgań wirnika.



Porównanie obliczonych i zmierzonych częstości różnych form drgań własnych w powietrzu i w wodzie