

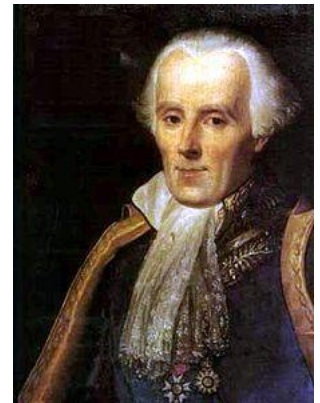
J. Szantyr – Wykład nr 9 – Wyznaczanie przepływów potencjalnych

Jeżeli przepływ płynu jest bezwirowy, czyli wszędzie lub prawie wszędzie w polu przepływu jest $\text{rot} \bar{u} = 0$ to oznacza, że istnieje funkcja skalarna $\varphi(x, y, z, t)$, taka że $\bar{u} = \text{grad} \varphi$. Przepływ taki nazywamy przepływem potencjalnym, a funkcję φ nazywamy potencjałem prędkości.

Mamy: $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

W przypadku przepływu potencjalnego płynu nieściśliwego równanie zachowania masy przekształca się w równanie Laplace'a:

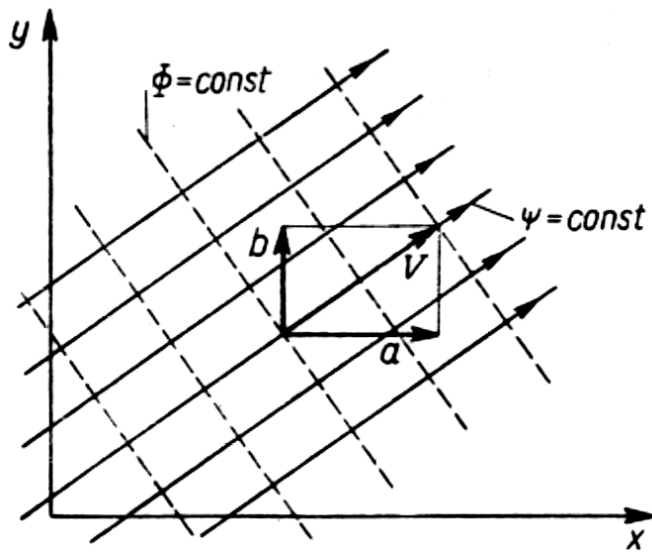
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0 \rightarrow \text{div grad} \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$



Pierre Laplace
1749 - 1827

Równanie Laplace'a jest liniowe, co oznacza, że suma jego rozwiązań jest również rozwiązaniem. W praktyce więc można składać bardzo skomplikowane funkcje potencjału, opisujące złożone przepływy, z funkcji opisujących tzw. przepływy elementarne.

Przepływy elementarne – przepływ jednorodny



$$u_x = a = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad u_y = b = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Potencjał prędkości:

$$\phi(x, y) = a \cdot x + b \cdot y = u_x \cdot x + u_y \cdot y$$

Linie ekwipotencjalne:

$$y = -\frac{a}{b}x + C = -\frac{u_x}{u_y}x + C$$

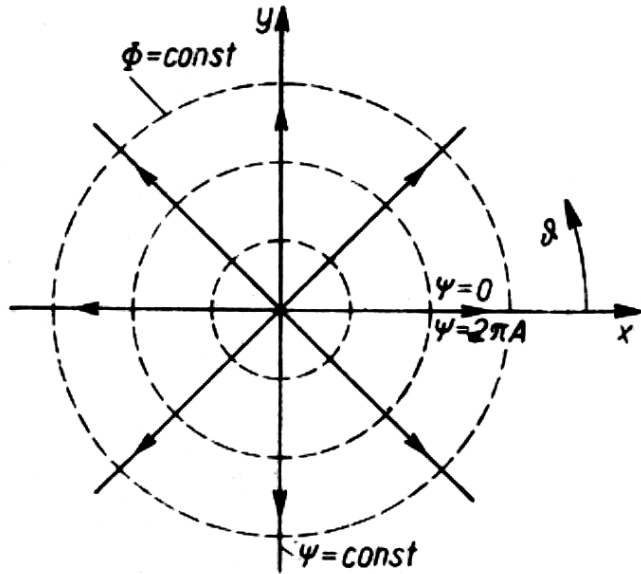
Funkcja prądu:

$$\psi(x, y) = a \cdot y - b \cdot x = u_x \cdot y - u_y \cdot x$$

Linie prądu:

$$y = \frac{b}{a}x + C = \frac{u_y}{u_x}x + C$$

Przepływy elementarne - źródło (dodatnie lub ujemne)



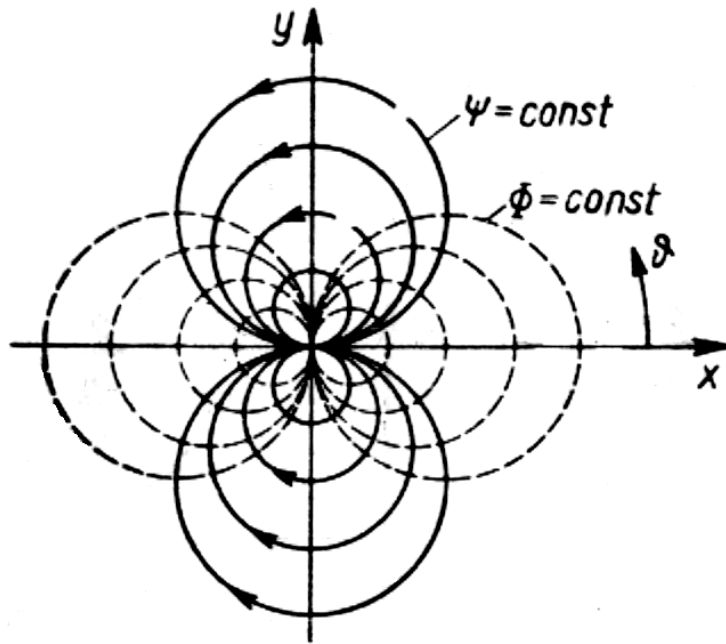
Źródło jest punktem osobliwym w polu przepływu, w którym następuje wypływ płynu o określonym natężeniu objętościowym Q . Wypływ ten odbywa się jednakowo we wszystkich kierunkach. W przypadku źródła ujemnego (czyli ujścia), płyn dopływa do źródła i w nim „znika”. Mamy więc:

$$Q = \pm 2\pi r u_r \text{ lub: } u_r = \pm \frac{Q}{2\pi r} \text{ gdzie: } u_r - \text{prędkość promieniowa}$$

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \pm \frac{Q}{2\pi r} \rightarrow \varphi = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

Stałe wartości potencjału φ występują dla stałych wartości promienia r , czyli linie ekwipotencjalne są współśrodkowymi okręgami.

Przepływy elementarne - źródło podwójne (dipol)



Dipol jest efektem nałożenia źródła dodatniego i ujemnego o takim samym module natężenia wypływu. Miarą natężenia dipola jest tzw. moment dipola $M=2aQ$. W odróżnieniu od źródła dipol ma własności kierunkowe, gdyż „wyrzuca” płyn w określonym kierunku i „wsysa” go z przeciwnej strony. Istotna jest więc orientacja dipola w przestrzeni.

Dla dipola w $x=0, y=0$ skierowanego w dodatnim kierunku osi x mamy:

Potencjał dipola:

$$\varphi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

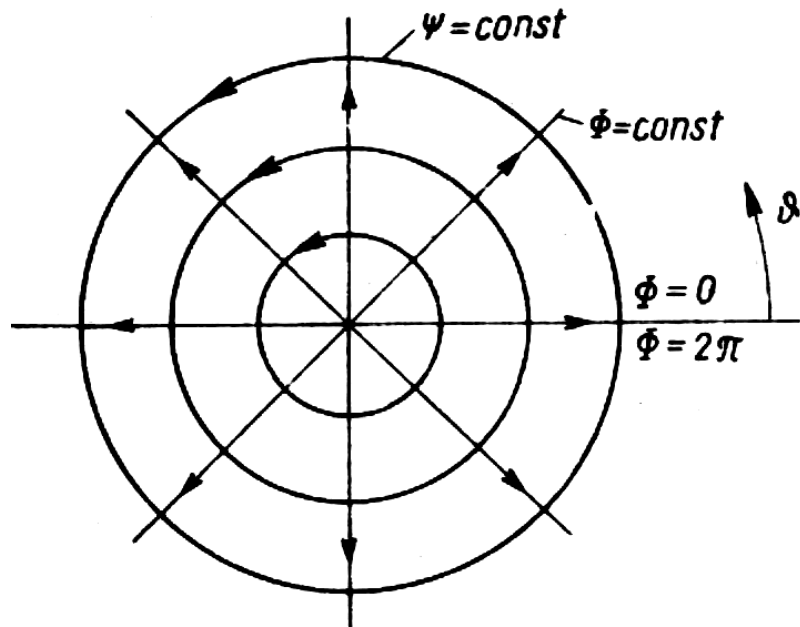
Funkcja prądu dipola:

$$\psi = \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Aby wytworzyć w przepływie potencjalnym siły hydrodynamiczne na opływanych ciałach konieczne jest uzyskanie przepływu asymetrycznego. Jest to możliwe przy wykorzystaniu kolejnego przepływu elementarnego zwanego wirem.

Przepływy elementarne - wir

Wir jest punktem osobliwym generującym w swoim otoczeniu ruch płynu po torach kołowych.



Wir jest nazywany przepływem sprzężonym w stosunku do źródła, gdyż linie prądu wiru pokrywają się z liniami ekwipotencjalnymi źródła, a linie ekwipotencjalne wiru pokrywają się z liniami prądu źródła.

Potencjał wiru: $\varphi = A \cdot \theta$ Funkcja prądu wiru: $\psi = A \cdot \ln r$

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \qquad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{A}{r}$$

Stała A jest związana z cyrkulacją prędkości po konturze C obejmującym wir:

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{u} \bullet d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{u} \bullet d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{A}{r} \bullet r d\theta = \int_0^{2\pi} A d\theta = 2\pi A \rightarrow A = \frac{\Gamma_C}{2\pi}$$

Czyli otrzymujemy: $u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

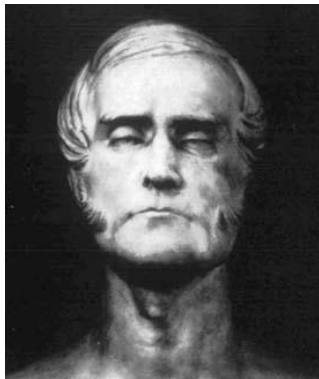
Należy zwrócić uwagę, że ruch wywołany działaniem wiru jest bezwirowy w całej przestrzeni z wyjątkiem samego wiru. Obliczenie cyrkulacji po konturze nie obejmującym wiru daje wynik zerowy. Czyli mamy do czynienia z wirem izolowanym w $x=0, y=0$ oraz przepływem bezwirowym w jego otoczeniu. Daje to możliwość traktowania całego przepływu jako potencjalnego.

W praktycznym modelowaniu przepływu można podzielić na obszar o ruchu wirowym i obszar o ruchu bezwirowym. Oba te obszary są wzajemnie współzależne. Obszar o ruchu wirowym może być modelowany włóknami wirowymi. Istotne staje się wtedy wyznaczanie pola prędkości generowanego przez pole wirowości, czyli operacja odwrotna do obliczania rotacji pola prędkości.

Wzór Biota-Savarta



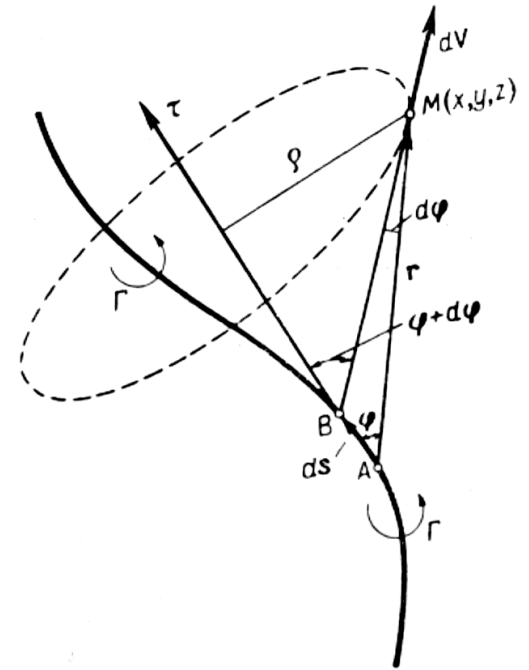
Jean Baptiste Biot
1774 - 1862



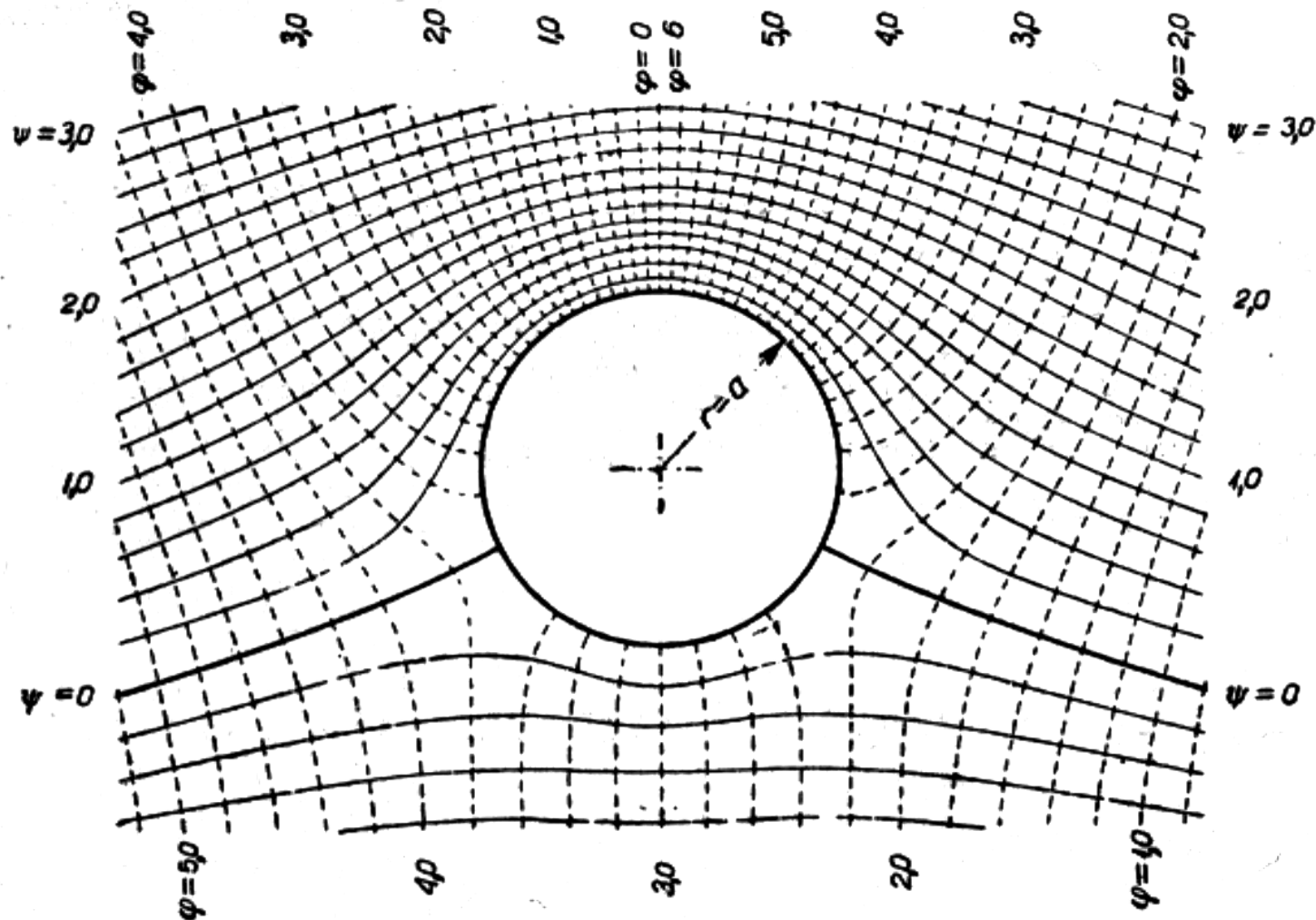
Felix Savart
1791 - 1841

$$d\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\bar{s} \times \bar{r}}{r^3}$$

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{s} \times \bar{r}}{r^3}$$



Przykład: wirowy (cyrkulacyjny) opływ walca kołowego



Superpozycja przepływu jednorodnego oraz dipola i wiru umieszczonego w początku układu współrzędnych.

Potencjał: $\varphi = u_{\infty} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ gdzie: $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Funkcja prądu: $\psi = u_{\infty} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$

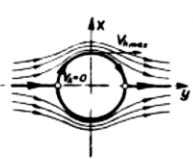
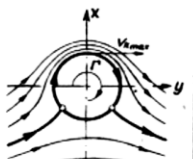
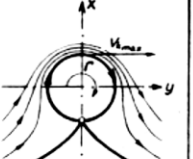
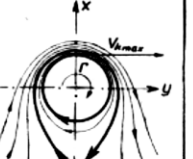
Składowe prędkości: $u_r = u_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$

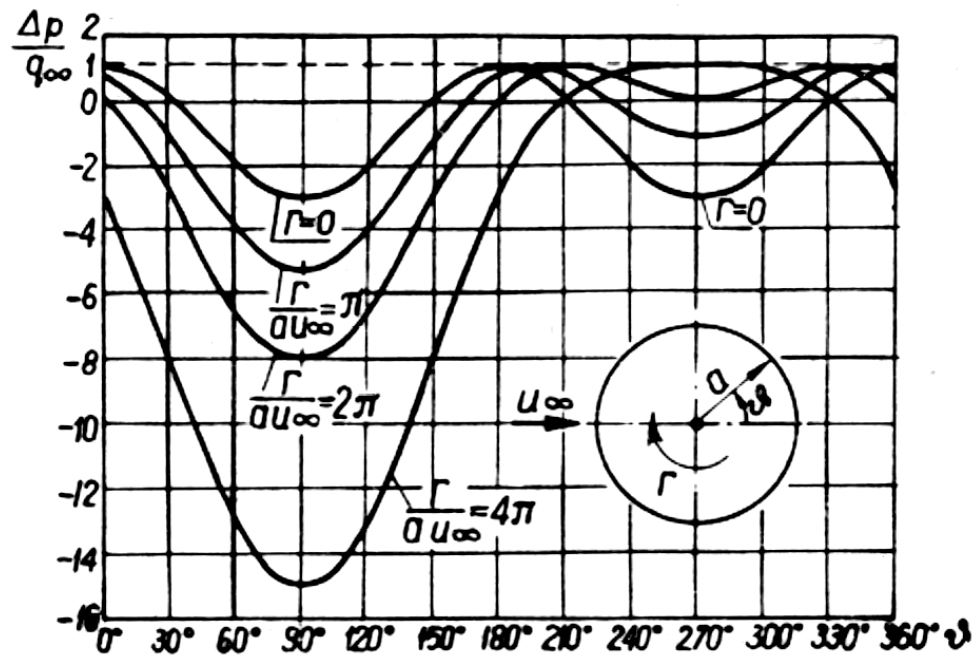
$$u_{\theta} = -u_{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Na powierzchni walca mamy: $u_r = 0$ $u_{\theta} = -u_{\infty} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a u_{\infty}} \right)$

Rozkład ciśnienia na walcu według równania Bernoulliego:

$$p_{\theta} = p_{\infty} + \frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \left(1 - \frac{u_{\theta}^2}{u_{\infty}^2} \right)$$

Γ	0	$2\pi u_\infty$	$4\pi u_\infty$	$> 4\pi u_\infty$
$V_{k_{max}}$	$2u_\infty$	$3u_\infty$	$4u_\infty$	
$\sin \psi = -\frac{r}{4\pi u_\infty}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	
ψ $\frac{d\psi}{d\alpha} = 0$	0 π	$\frac{7}{6}\pi$ $\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	
				



Asymetryczny rozkład ciśnienia wokół walca w zależności od wartości cyrkulacji. Dla określenia wartości cyrkulacji konieczny jest dodatkowy warunek, definiujący położenie punktu spiętrzenia na walcu.

Rozkład ciśnienia na powierzchni walca może być określony w postaci bezwymiarowego współczynnika:

$$C_p = \frac{p_\theta - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = 1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a u_\infty} \right)^2$$

Na podstawie rozkładu ciśnienia można obliczyć składowe wypadkowej siły hydrodynamicznej na walcu:

$$P_x = -a \int_0^{2\pi} p_\theta \cos \theta d\theta = 0 \quad - \text{ siła oporu}$$

$$P_y = -a \int_0^{2\pi} p_\theta \sin \theta d\theta = \rho u_\infty \Gamma \quad - \text{ siła nośna}$$

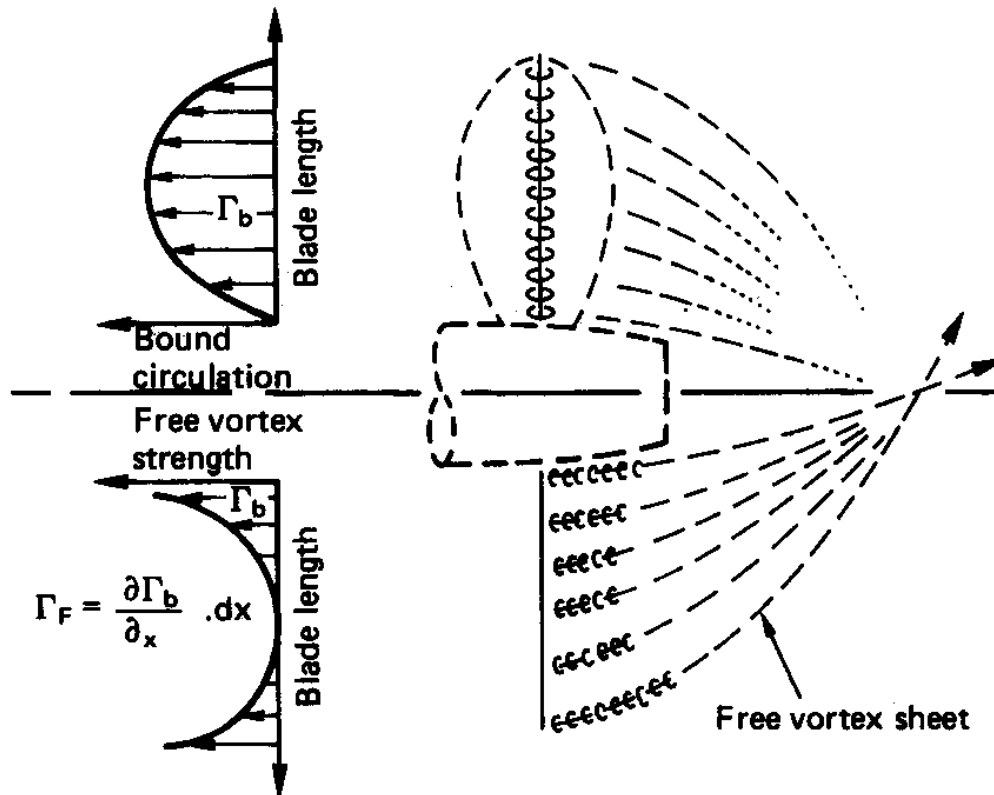


Nikołaj Żukowskij
1847 - 1921

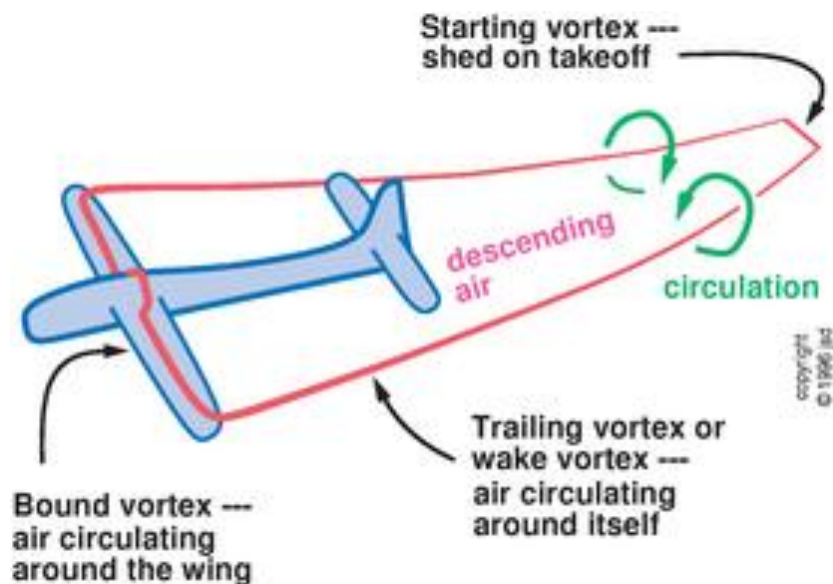
Prawo Żukowskiego: siła nośna działająca na jednostkę długości walca równa się iloczynowi gęstości płynu prędkości przepływu niezakłóconego oraz cyrkulacji prędkości wokół walca.

Współczesne metody wyznaczania przepływów potencjalnych

- metoda linii nośnej
- metoda powierzchni nośnej
- metoda elementów brzegowych



Metoda linii nośnej polega na zastąpieniu płata nośnego pojedynczą linią wirową, tzw. wirem związanym, który generuje siłę nośną zgodnie z prawem Żukowskiego. Wir ten musi być uzupełniony układem wirów swobodnych. Metoda linii nośnej dobrze nadaje się do modelowania opływów płatów o dużym wydłużeniu, np. skrzydeł samolotów i łopat śmigieł.

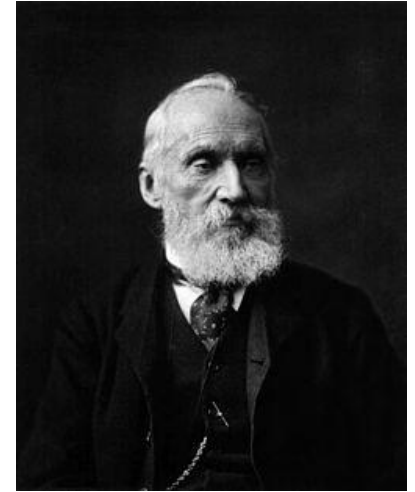


Prawo Żukowskiego może być wykorzystane do wyznaczenia siły nośnej np. na skrzydle samolotu, zgodnie z zależnością:

$$\bar{L} = \rho \bar{U}_{\infty} \times \bar{\Gamma}$$

Powyższa zależność określa nie tylko wartość ale i kierunek siły nośnej. W przepływie potencjalnym linie wirowe nie mogą się kończyć w płynie (por. twierdzenia na następnej stronie). Stąd wynika konieczność uzupełnienia wiru nośnego układem śladu wirowego, który bierze udział w wyznaczaniu pola prędkości (por. wzór Biota-Savarta).

Twierdzenie Thomsona: w przepływie idealnego płynu barotropowego znajdującego się pod działaniem potencjalnego pola sił masowych cyrkulacja prędkości wzdłuż dowolnej zamkniętej linii płynnej nie zmienia się w czasie



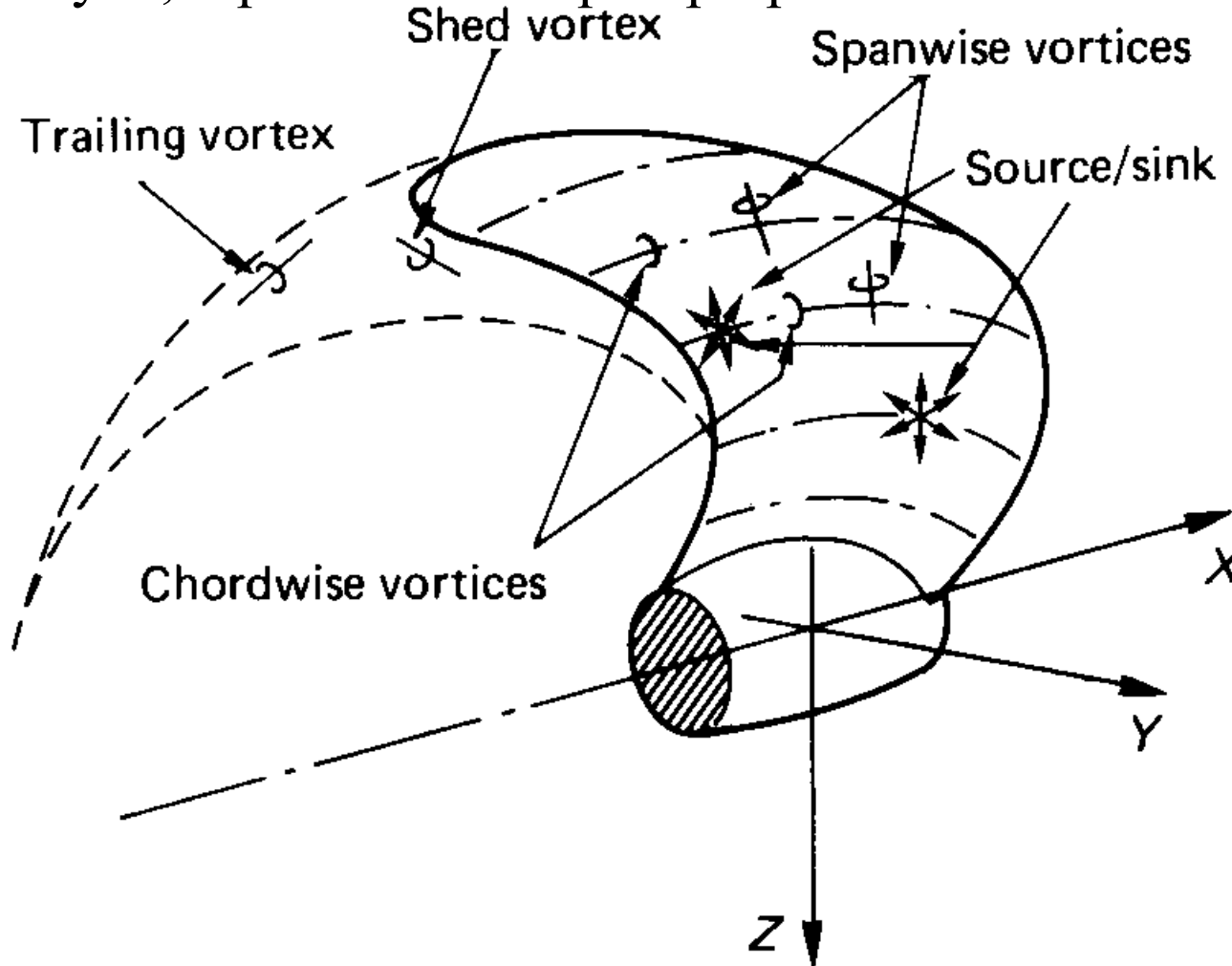
William Thomson lord Kelvin
1824 - 1907

Drugie twierdzenia Helmholtza: w przepływie idealnego płynu barotropowego znajdującego się pod działaniem potencjalnego pola sił masowych natężenie włókna wirowego nie zmienia się wzdłuż jego długości i jest stałe w czasie.

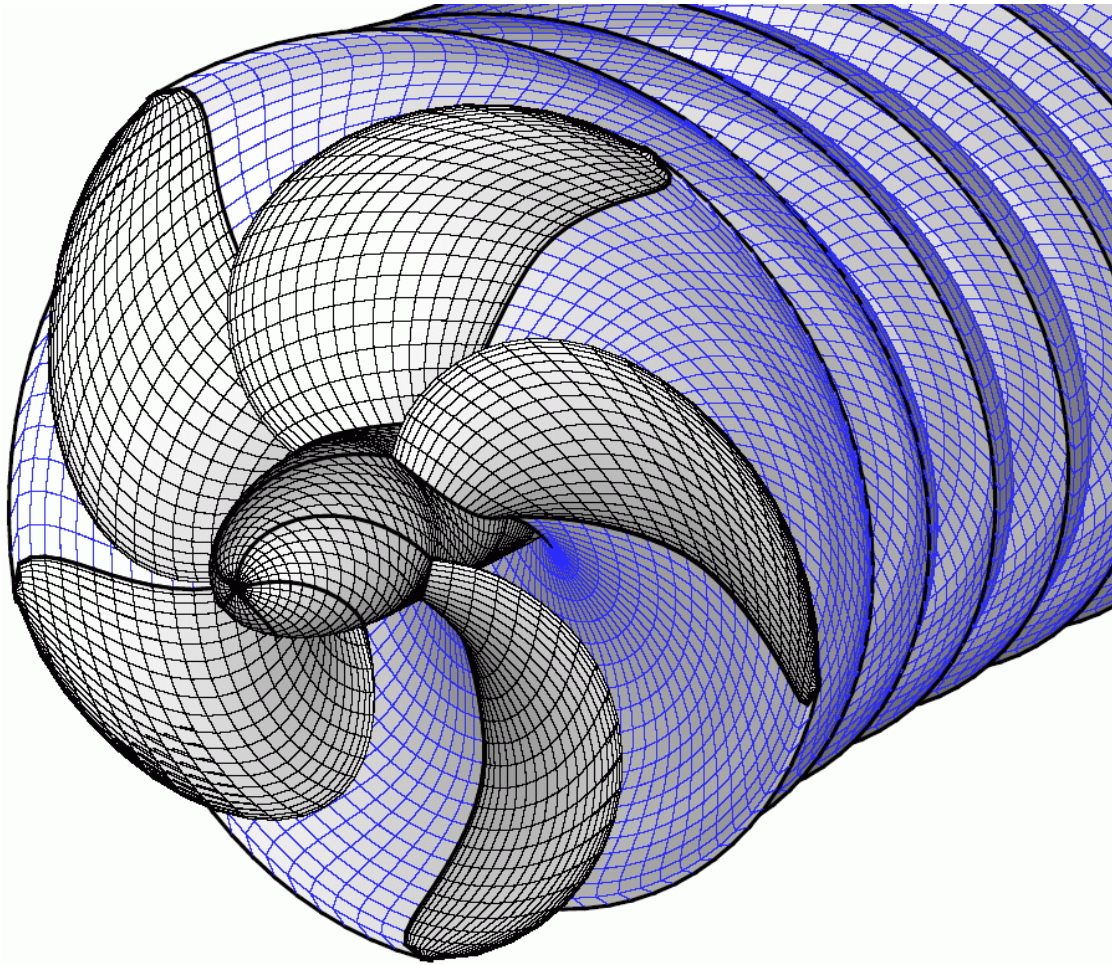


Hermann von Helmholtz
1821 - 1894

Metoda powierzchni nośnej polega na rozmieszczeniu wirów, źródeł i dipoli na nieskończenie cienkiej powierzchni ograniczonej rzeczywistym obrysem płata. Metoda ta dobrze się nadaje do modelowania płatów o małym wydłużeniu, np. skrzydeł śrub okrętowych, łopatek turbin i pomp itp.



Metoda elementów brzegowych polega na rozmieszczeniu wirów, źródeł i dipoli na rzeczywistej powierzchni opływwanego obiektu, czyli np. po obu stronach skrzydła samolotu czy łopatk turbiny. Metoda ta dobrze nadaje się do wyznaczania opływu obiektów o skomplikowanych kształtach, np. całych samolotów, pojazdów czy okrętów. Do modelowania takich opływów używa się wielu tysięcy elementów.

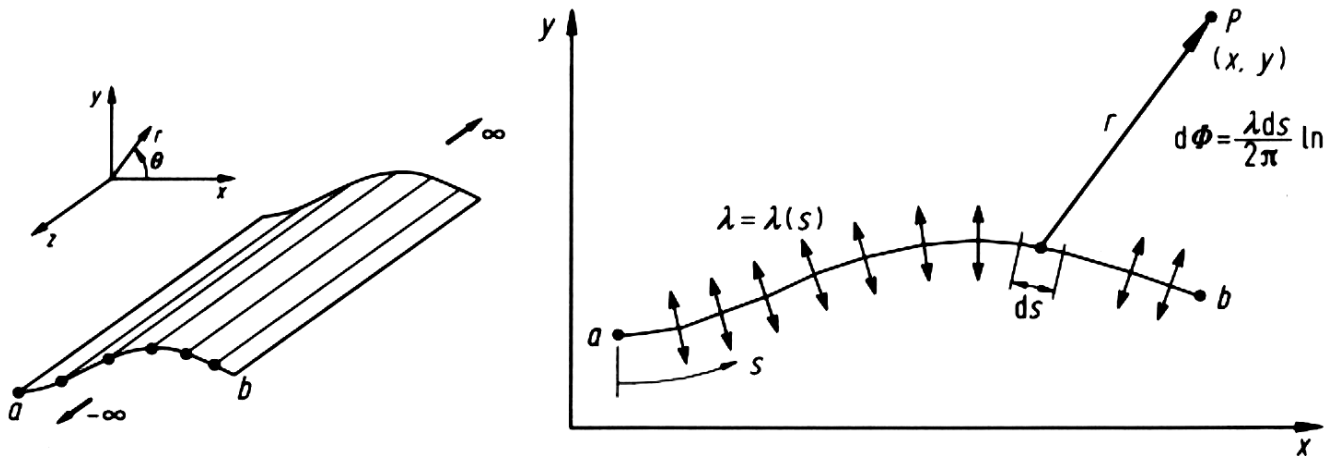




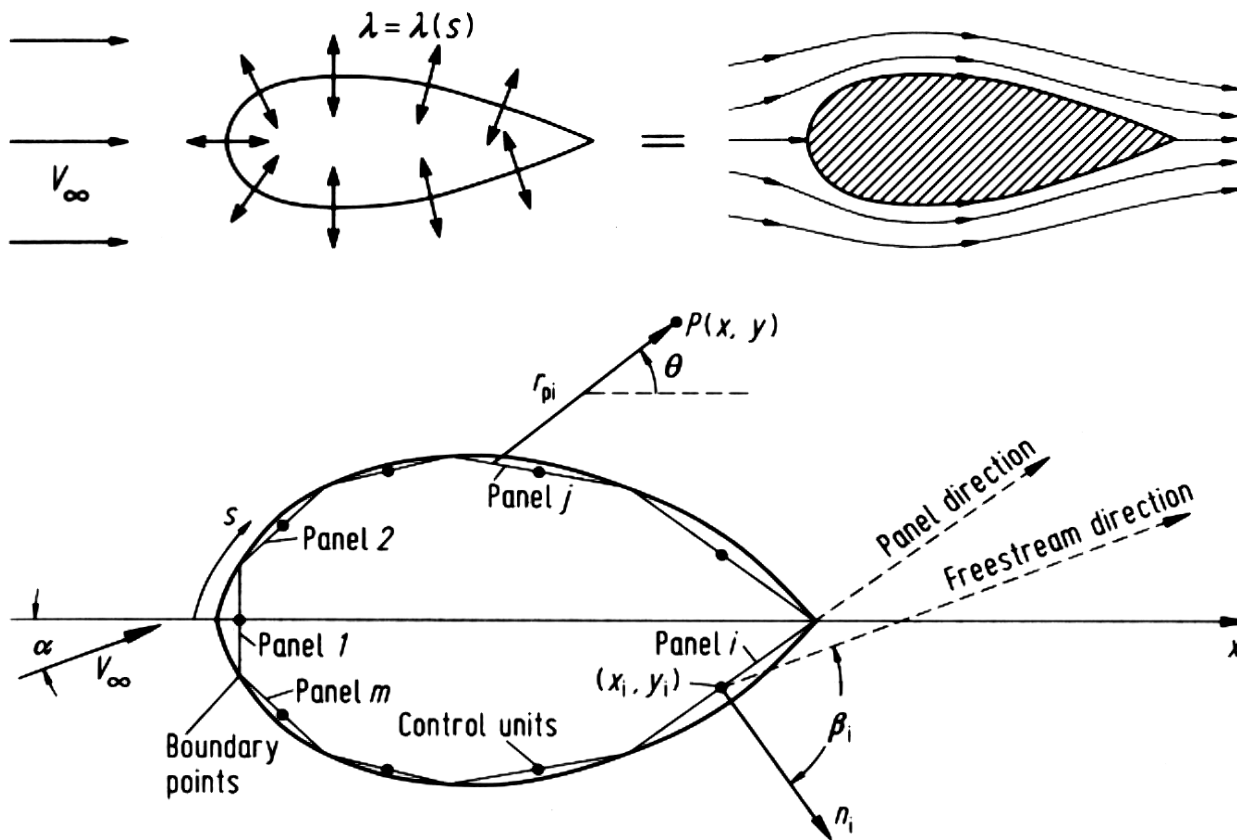
Rozkład ciśnienia na
śrubie okrętowej
wyznaczony metodą
elementów
brzegowych

Skomplikowane kształty opływanych obiektów mogą być modelowane ciągłymi rozkładami źródeł, wirów i dipoli. Na przykład ciągły rozkład źródeł wzdłuż krzywej a-b może być opisany przez potencjał:

$$\varphi(x, y) = \int_a^b \frac{\lambda ds}{2\pi} \ln r \quad \text{gdzie: } \lambda [m/s] \text{ - ciągły rozkład źródeł}$$



W praktyce skomplikowana geometrycznie powierzchnia opływającego obiektu jest dzielona na szereg elementów, tzw. paneli. W przepływie dwuwymiarowym panele są najczęściej odcinkami prostej, a w przepływie trójwymiarowym – fragmentami płaszczyzn.

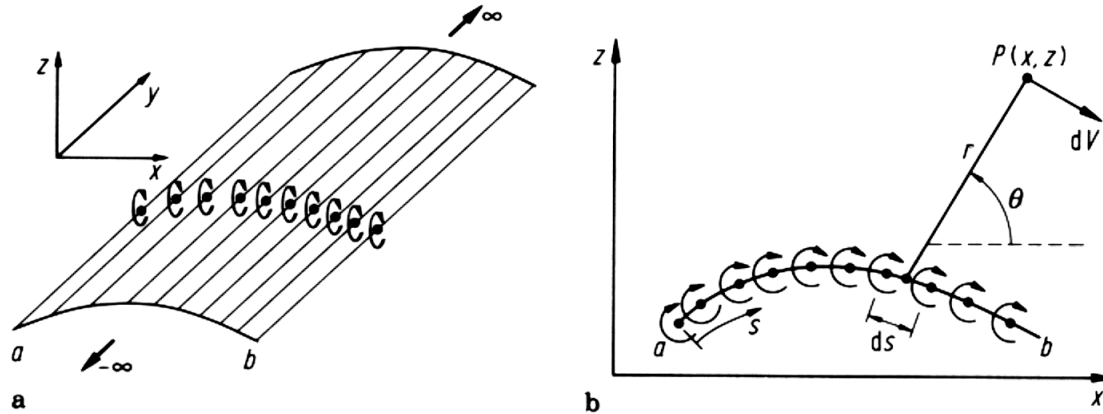


W rozwiązaniu takiego opływu główną rolę odgrywa warunek brzegowy, który postuluje brak przepływu przez powierzchnię obiektu, czyli zerowanie się normalnej składowej wypadkowej prędkości co daje równanie:

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_j} (\ln r_{ij}) ds_j + V_\infty \cos \beta_i = 0$$

Ułożenie takiego równania dla każdego panelu prowadzi do układu równań liniowych dla nieznanych natężeń rozkładu źródeł λ .

Modelowanie przepływów, w których występują siły nośne wymaga wykorzystania rozkładów wirów lub dipoli. W przypadku ciągłego rozkładu wirów o natężeniu γ mamy:

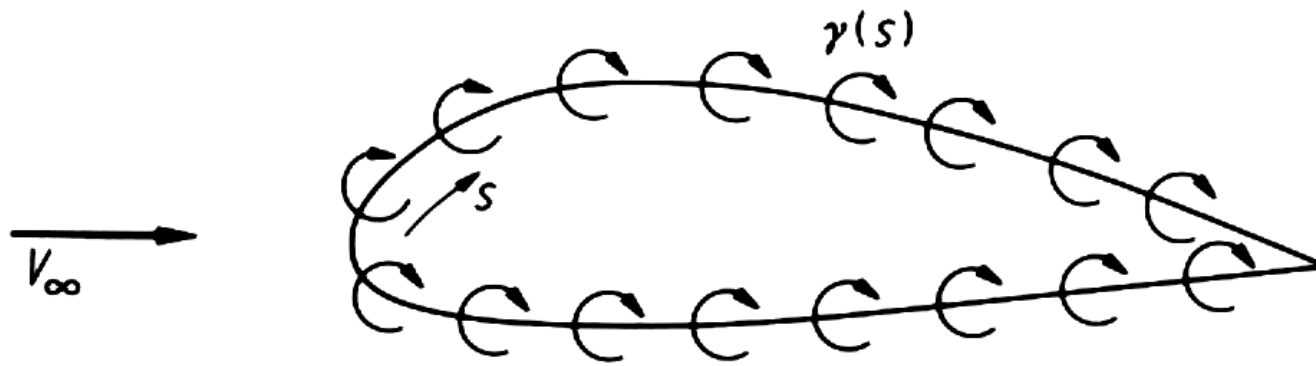


W tym przypadku przepływ jest opisany potencjałem:

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta \gamma ds \quad \text{gdzie: } \gamma [m/s] \quad - \text{ciągły rozkład wirów}$$

Po podziale obiektu na panele otrzymujemy równanie:

$$V_\infty \cos \beta_i - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j = 0$$



W przypadku modelowania opływu obiektu generującego siłę nośną przy pomocy rozkładu wirów konieczne jest wprowadzenie dodatkowego warunku pozwalającego na jednoznaczne określenie natężenia wirów. Dla profilu jest to najczęściej tzw. warunek Kutty, postulujący spływ płynu dokładnie z krawędzi spływu. Po rozwiązaniu układu równań i obliczeniu natężenia wirów na poszczególnych panelach siła nośna może być wyznaczona z równania Żukowskiego:

$$L = \rho V_\infty \sum_{j=1}^n \gamma_j s_j$$

Martin Kutta
1867 - 1944

