

A decorative horizontal line with a step-like drop on the left side, spanning the width of the slide.

# Bioprzeptywy / Bioreologia

Krzysztof Tesch

WIMiO  
Politechnika Gdańska

# Spis zagadnień

**Podstawowe równania**

Podstawowe  
równania

**Bioreologia**

Bioreologia

**Przykładowe rozwiązania analityczne**

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

**Analogia mechaniczno-elektryczna**

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

**Sieci naczyń**

Sieci naczyń

**Prawa Murraya**

Prawa Murraya

**Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi**

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

**Urządzenia do wspomagania krążenia**

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

**Przepływy w układzie oddechowym**

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

**Laboratorium**

Laboratorium

**Literatura**

Literatura

- Znaczenie bioprzepływów
  - ◆ Praktyczne (choroby, testowanie urządzeń, wybór metod, transport leków)
  - ◆ Poznawcze (wyodrębnienie i zrozumienie zjawisk)
- Rodzaje bioprzepływów
  - ◆ Krew i inne ciecze
  - ◆ Powietrze (w tym układ oddechowy)
- Wyzwania i trudności
  - ◆ Złożoność geometrii przepływu (1D, 3D, MRI, DU, DSA, CT)
  - ◆ Złożone i nieliniowe własności naczyń układu krwionośnego
  - ◆ Niestacjonarny charakter przepływu
  - ◆ Nienewtonowskie cechy krwi

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Podstawowe równania

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} + u_z \hat{\mathbf{k}} \quad (1)$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

$$\nabla f = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (6)$$

Podstawowe  
równania

---

Bioreologia

---

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

---

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

---

Sieci naczyń

---

Prawa Murraya

---

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

---

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

---

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

---

Laboratorium

---

Literatura

---

# Równanie zachowania masy

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

lub

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (8)$$

lub

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Niewiadome  $\rho, u_x, u_y, u_z$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Równanie zachowania masy – uproszczenia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (10)$$

■  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (11)$$

Niewiadome  $\rho, u_x, u_y, u_z$

■  $\rho = \text{const}$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (12)$$

Niewiadome  $u_x, u_y, u_z$

■  $\rho = \text{const}$  i potencjalność

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi \iff \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (13)$$

Niewiadoma  $\varphi$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Równanie zachowania pędu

Dwa rodzaje sił

■ masowe

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{F}_V}{dV} \quad (14)$$

■ powierzchniowe

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \frac{d\mathbf{F}_S}{dS} \quad (15)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Równanie zachowania pędu

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (18)$$

Trzy równania skalarne, które odpowiadają

$$m \mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (19)$$

Niewiadome  $\rho, u_x, u_y, u_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy},$

$\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$

Zwykle  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Równanie zachowania momentu pędu

Z równanie tego wynika, że

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Pozwala to zredukować liczbą niewiadomych o trzy  $\rho$ ,  
 $u_x, u_y, u_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Równanie zachowania energii

Energia całkowita

$$e_c = \frac{u^2}{2} + e + \Pi + \frac{p}{\rho} \quad (21)$$

Równanie zachowania energii

$$\rho \frac{de_c}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}^D \cdot \mathbf{u}) + \lambda \nabla^2 T \quad (22)$$

Jeżeli  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\lambda = 0$  to  $\frac{de_c}{dt} = 0$

$$\frac{u^2}{2} + e + \Pi + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (23)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Równanie energii wewnętrznej

Energia wewnętrzna  $de = c_v dT$

$$c_v \rho \frac{dT}{dt} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \lambda \nabla^2 T \quad (24)$$

Funkcja dyssypacji

$$\phi_\mu = 2\mu \mathbf{D}^{\mathbf{D}^2} \geq 0 \quad (25)$$

Niewiadome  $\rho, u_x, u_y, u_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}, T$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Hipoteza Newtona

Dekompozycja na część odwracalną  $p\delta$  i nieodwracalną (lepką)  $\tau$  w postaci

$$\sigma = p\delta + \tau \quad (26)$$

Dla płynów newtonowskich

$$\sigma = p\delta + 2\mu\mathbf{D}^D \quad (27)$$

gdzie

$$\mathbf{D}^D = \mathbf{D} - \frac{1}{3}\delta \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad (28)$$

Zamiast sześciu niewiadomych  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$  mamy teraz tylko dwie  $p$ ,  $\mu$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Równania Naviera-Stokesa i Eulera

- $\rho = \text{var}, \mu = \text{var}$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}^D) \quad (29)$$

- $\rho = \text{const}, \mu = \text{var}$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (30)$$

- $\rho = \text{var}, \mu = \text{const}$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (31)$$

- $\rho = \text{const}, \mu = \text{const}$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (32)$$

- $\mu = 0$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p \quad (33)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego  $\rho = \text{const}$  i  $\mu = \text{const}$  mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (34)$$

i równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (35)$$

Daje to cztery równania skalarne i cztery niewiadome  $p, u_x, u_y, u_z$ .

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego  $\rho = \text{const}$  i  $\mu = f(T)$  mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (36)$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (37)$$

i równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{dT}{dt} = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T \quad (38)$$

Daje to pięć równań skalarnych i pięć niewiadomych  $T, p, u_x, u_y, u_z$ .

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Domknięte układy równań

Dla płynu ściśliwego  $\rho = \text{var}$ ,  $\mu = \text{const}$  i  $c_v = \text{const}$  mamy równanie zachowania masy

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (39)$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (40)$$

równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{dT}{dt} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \lambda \nabla^2 T \quad (41)$$

i równanie stanu  $p = \rho RT$ . Daje to sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ .

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Domknięte układy równań

Dla płynu ściśliwego  $\rho = \text{var}$ ,  $\mu = f_1(T)$  i  $c_v = f_2(T)$  mamy równanie zachowania masy

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (42)$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}^D) \quad (43)$$

równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{dT}{dt} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \lambda \nabla^2 T \quad (44)$$

i równanie stanu  $p = \rho RT$ . Daje to osiem równań skalarnych i niewiadomych  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $\mu$ ,  $c_v$ .

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Domknięte układy równań

Płyn nienewtonowski.

Równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (45)$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (46)$$

Wzór na lepkość według wybranego modelu

$$\mu = f(\gamma) \quad (47)$$

Daje to pięć równań skalarnych i pięć niewiadomych  $p$ ,

$u_x, u_y, u_z, \mu$ .

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Warunki na konturach opływanych

- Warunek nieprzenikalności  $u_n = 0$  na brzegu dla przepływów lepkich i nielepkich
- Warunek adhezji  $u_l = 0$  dla płynów lepkich (dodatkowy). Czyli  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  na brzegu
- Jeżeli mamy przepływ z wymianą ciepła, to możemy zadać jeden z warunków:
  - ◆ Dirichleta  $T = f(x, y, z, t)$
  - ◆ Neumanna  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f(x, y, z, t)$  lub  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  (adiabatyczność)
  - ◆ mieszany  $\alpha T - \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f(x, y, z, t)$  (Dirichlet + Neumann)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Pozostałe warunki brzegowe

- Na wlocie podajemy rozkład prędkości  $\mathbf{u} = f(x, y, z, t)$  i temperatury  $T = f(x, y, z, t)$  jeżeli mamy wymianę ciepła. Dla przepływów ściśliwych dodatkowo ciśnienie  $p$  lub gęstość  $\rho$ .
- Na wylocie powinno się zadawać składowe normalną  $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$  i styczną  $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \hat{\mathbf{l}}$  wektora naprężenia  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ . Te informacje są na ogół niedostępne. Uproszczone warunki na wylocie mają postać:  $p = f(x, y, z, t)$ . Jeżeli jest wymiana ciepła, to na ogół zakłada się, że  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ .
- warunek symetryczności  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  dla wszystkich skalarów  $\varphi$
- warunek periodyczności  $\varphi_A(P) = \varphi_B(P')$  dla periodycznych powierzchni A i B

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Bioreologia

Podstawowe  
równania

**Bioreologia**

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

- Lepkość plazmy
- Hematokryt
- Odkształcalność
- Agregacja czerwonych krwinek
- Wpływ temperatury na lepkość krwi
- Granica płynięcia  $\tau_0$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Przepływy nienewtonowskie

$$\sigma = -p\delta + \underbrace{\tau}_{?} \quad (48)$$

- Płyny newtonowskie
- Płyny nienewtonowskie
  - ◆ Uogólnione płyny newtonowskie
  - ◆ Modele płynów typu różniczkowego
  - ◆ Modele płynów typu całkowego
  - ◆ Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

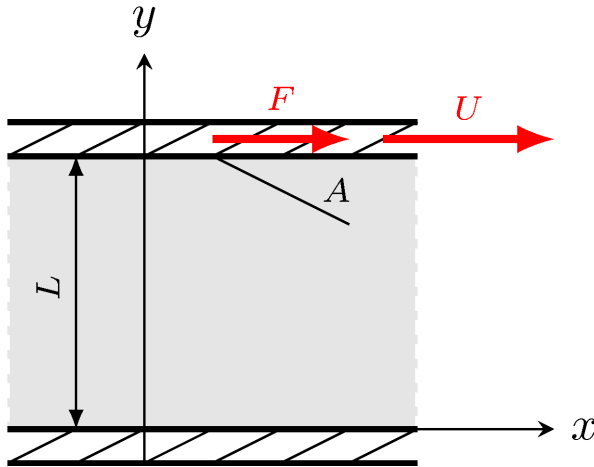
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Płyny newtonowskie

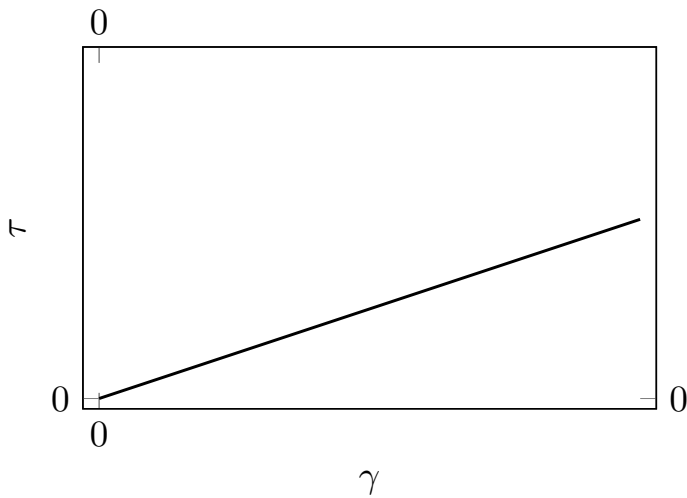


$$\frac{F}{A} \sim \frac{U}{L} \quad (49)$$

$$\tau_{xy} \sim \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (50)$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (51)$$

$$\tau = \mu \gamma \quad (52)$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \quad (53)$$

$\boldsymbol{\tau} = f(\nabla \mathbf{u})$ , ale  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ , więc  $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{D})$   
 Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona

$$\boldsymbol{\tau} = a_0\boldsymbol{\delta} + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 \quad (54)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + a_2 \mathbf{D}^2 \quad (55)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Płyny newtonowskie

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + a_2 \mathbf{D}^2$$

$$\tau_{xy} = a_0 \cdot 0 + a_1 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + (a_2 \mathbf{D}^2)_{xy} \quad (56)$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (57)$$

$$a_1 = 2\mu, a_2 = 0$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 \quad (58)$$

$$a_1 = 2\mu, a_2 = 0$$

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D} \quad (59)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + a_0) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D} \quad (61)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + a_0) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D} \quad (62)$$

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = (-p + a_0) \text{tr } \boldsymbol{\delta} + 2\mu \text{tr } \mathbf{D} \quad (63)$$

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{tr } \boldsymbol{\delta} = 3, \quad \text{tr } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$-3p = (-p + a_0) 3 \quad (64)$$

$$a_0 = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D} \quad (65)$$

Ostatecznie...

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} \quad (66)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Uogólnione płyny newtonowskie

$$\sigma = -p\delta + \underbrace{\tau}_{?} \quad (67)$$

- Płyny newtonowskie  $\tau = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie  $\tau \neq 2\mu\mathbf{D}$ 
  - ◆ Uogólnione płyny newtonowskie
  - ◆ Modele płynów typu różniczkowego
  - ◆ Modele płynów typu całkowego
  - ◆ Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

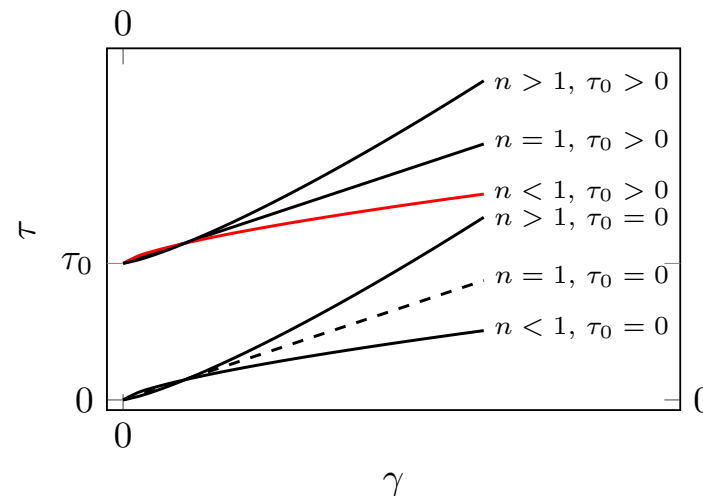
# Uogólnione płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D} \quad (68)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu(\gamma)\mathbf{D} \quad (69)$$

Krzywa płynięcia

$$\tau = \mu(\gamma)\gamma \quad (70)$$



Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

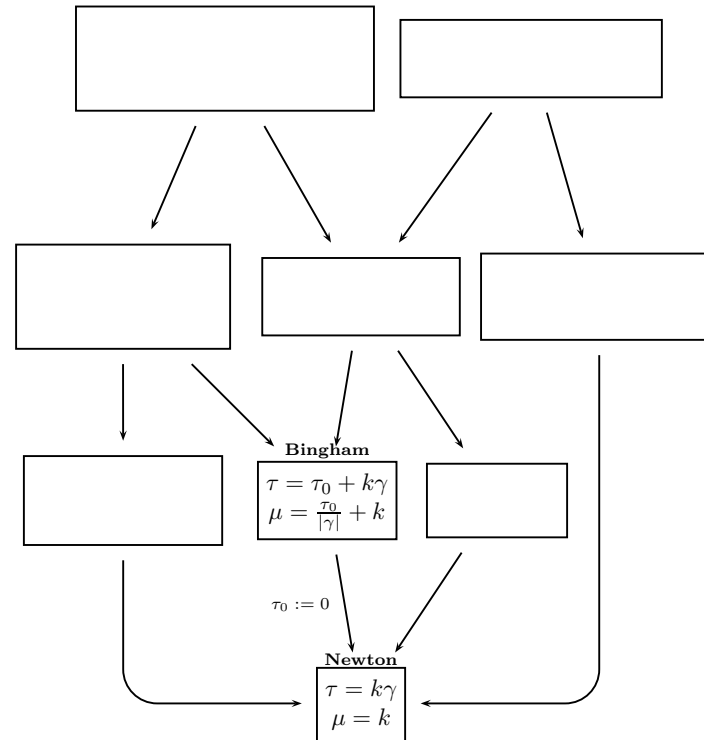
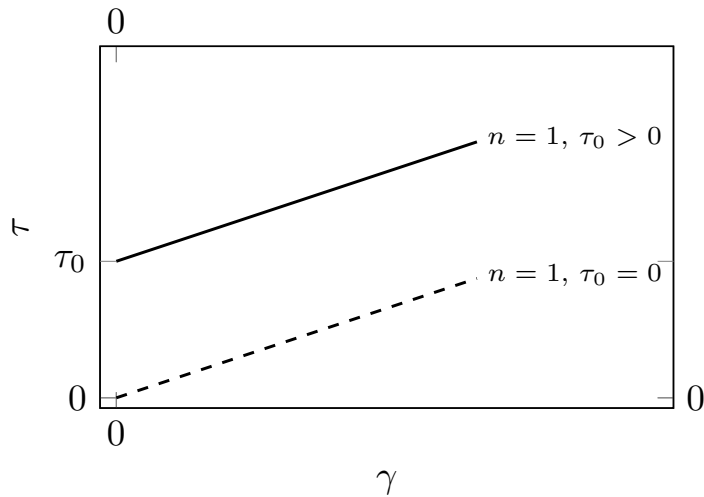
Literatura

# Model Bingham

$$\tau = \tau_0 + k\gamma \quad (71)$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau_0}{|\gamma|} + k \quad (72)$$

$k$  – stała konsystencji  
 $\tau_0$  – granica płynięcia



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



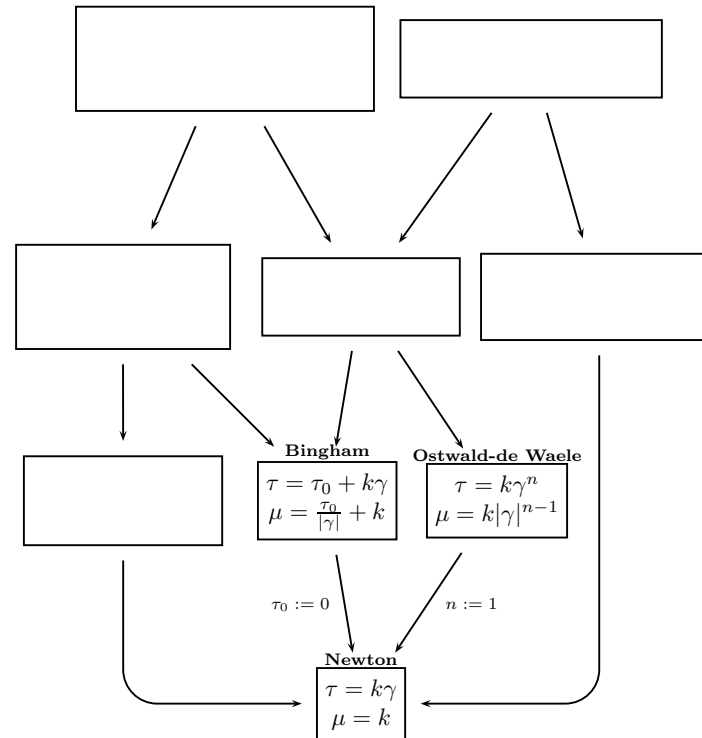
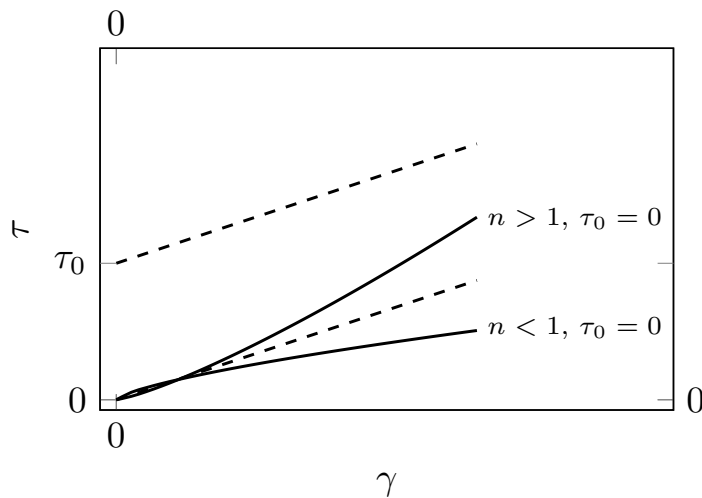
# Model Ostwalda-de Waele

$$\tau = k\gamma^n \quad (73)$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = k|\gamma|^{n-1} \quad (74)$$

$n$  – bezwymiarowy parametr reologiczny

$k$  – stała konsystencji



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Ostwalda-de Waele – uogólnienia

$$\mu = k|\gamma|^{n-1} \quad (75)$$

dla  $n < 1$  mamy  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mu = 0$ .

Modyfikacja modelu Ostwalda-de Waele

$$\mu = \begin{cases} \mu_0, & \gamma < \gamma_{min} \\ k|\gamma|^{n-1}, & \gamma \in [\gamma_{min}, \gamma_{max}] \\ \mu_{\infty}, & \gamma > \gamma_{max} \end{cases} \quad (76)$$

ale za to mamy dwa dodatkowe parametry  $\mu_0$  i  $\mu_{\infty}$ .

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Ostwalda-de Waele – uogólnienia

$$\mu = k|\gamma|^{n-1} \quad (77)$$

Wymagania/zalety:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mu = \mu_0 \text{ oraz}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \mu = \mu_\infty.$$

Przykładowa klasa funkcji

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = f(k|\gamma|) \quad (78)$$

Wady: dodatkowe parametry  $\mu_0$ ,  $\mu_\infty$  i ewentualnie kolejne.

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Ostwalda-de Waele – uogólnienia

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = f(k|\gamma|) \quad (79)$$

## ■ model Crossa

$$\mu = \mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + (k|\gamma|)^n} \quad (80)$$

## ■ Model Birda-Carreau

$$\mu = \mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{(1 + (k|\gamma|)^2)^{\frac{1-n}{2}}} \quad (81)$$

## ■ Carreau-Yasudy

$$\mu = \mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{(1 + (k|\gamma|)^a)^{\frac{1-n}{a}}} \quad (82)$$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

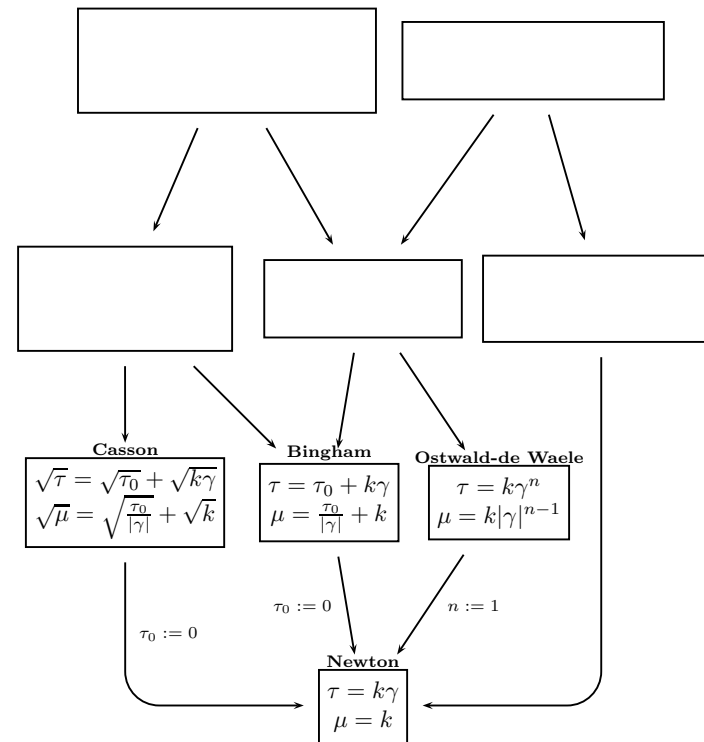
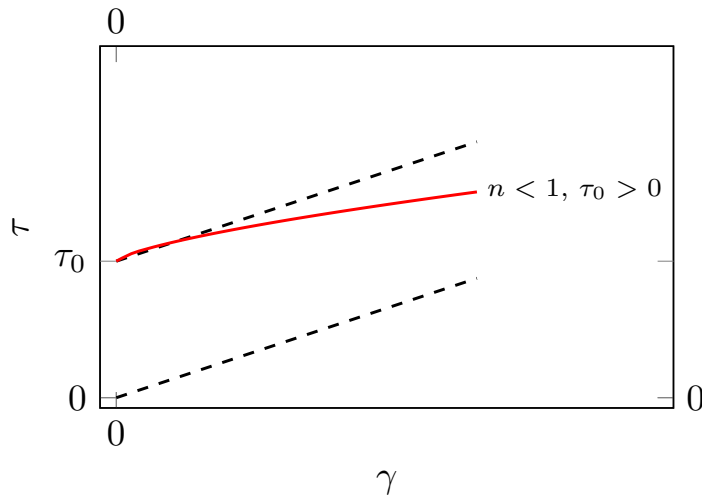
Literatura

# Model Cassona

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{k\gamma} \quad (83)$$

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{\frac{\tau}{\gamma}} = \sqrt{\tau_0|\gamma|^{-1}} + \sqrt{k} \quad (84)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mu = k$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

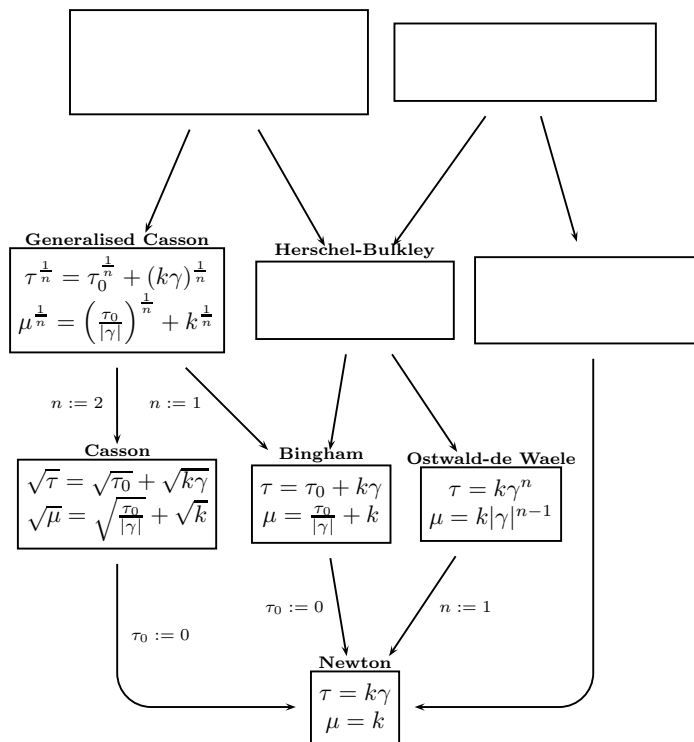
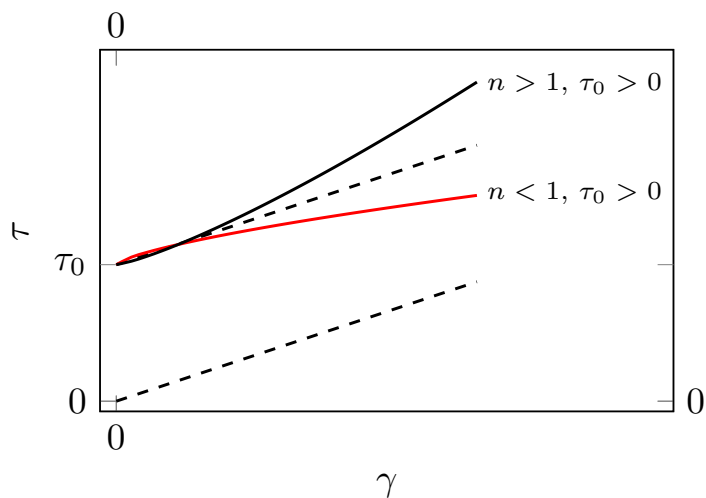
Laboratorium

Literatura

# Uogólniony model Cassona

$$\tau^{\frac{1}{n}} = \tau_0^{\frac{1}{n}} + (k\gamma)^{\frac{1}{n}} \quad (85)$$

$$\mu^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\tau_0|\gamma|^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} + k^{\frac{1}{n}} \quad (86)$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

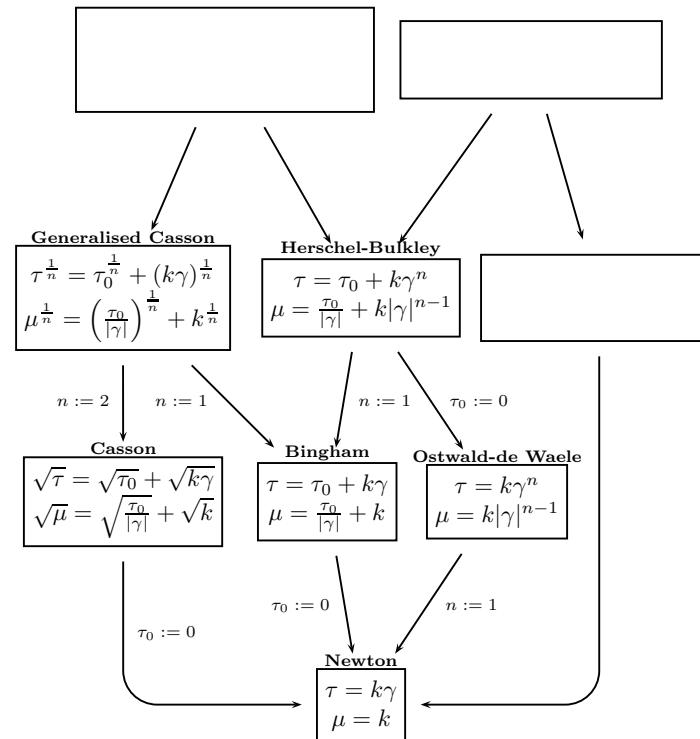
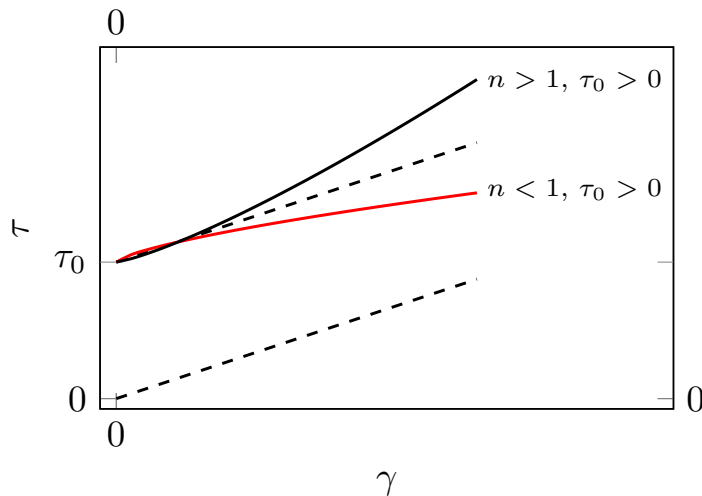
Literatura

# Model Herschela-Bulkleya

$$\tau = \tau_0 + k\gamma^n \quad (87)$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \tau_0|\gamma|^{-1} + k|\gamma|^{n-1} \quad (88)$$

dla  $n < 1$   $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mu = 0$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

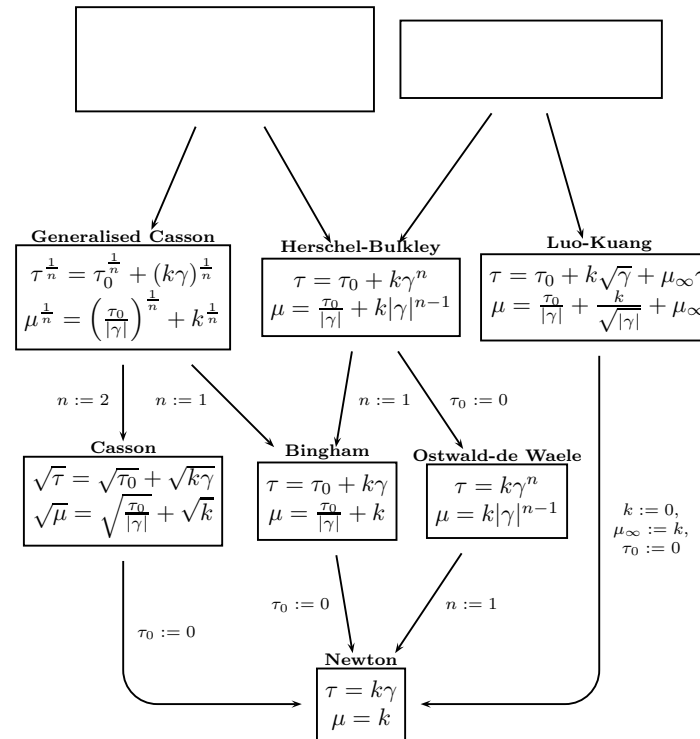
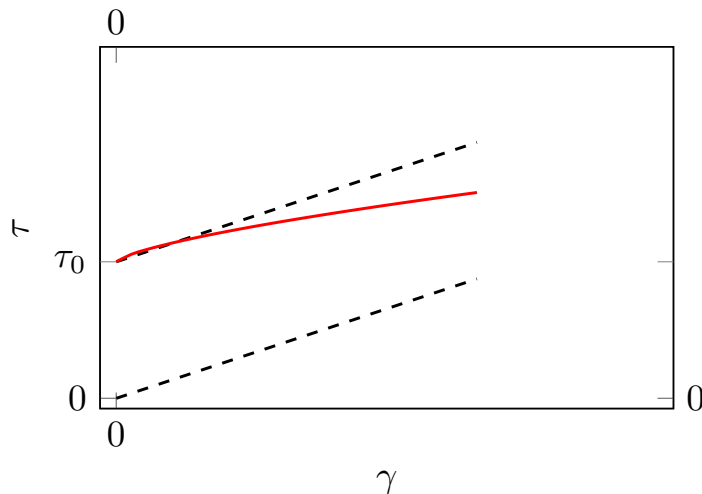
Literatura

# Model Luo-Kuanga

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{\gamma} + \mu_\infty \gamma \quad (89)$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \tau_0 |\gamma|^{-1} + k |\gamma|^{-\frac{1}{2}} + \mu_\infty \quad (90)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mu = \mu_\infty$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

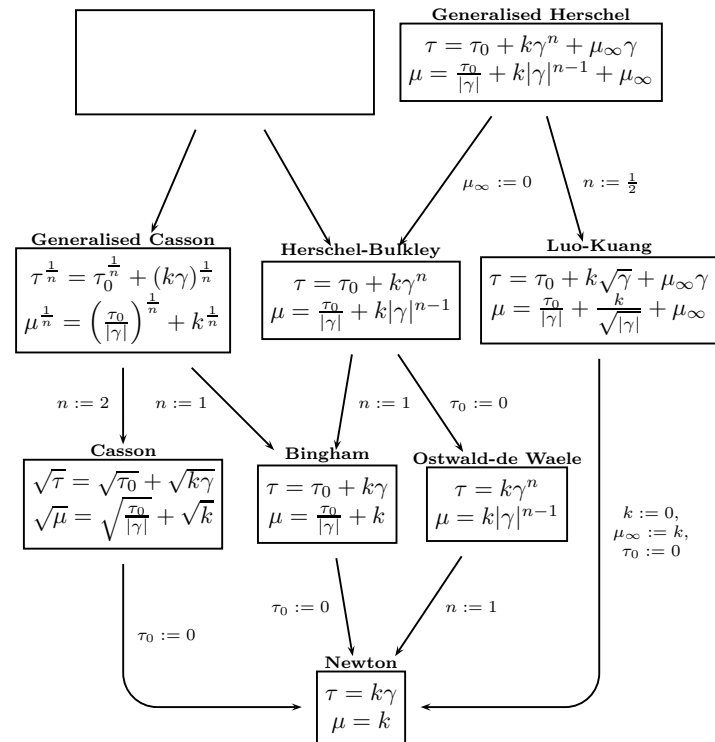
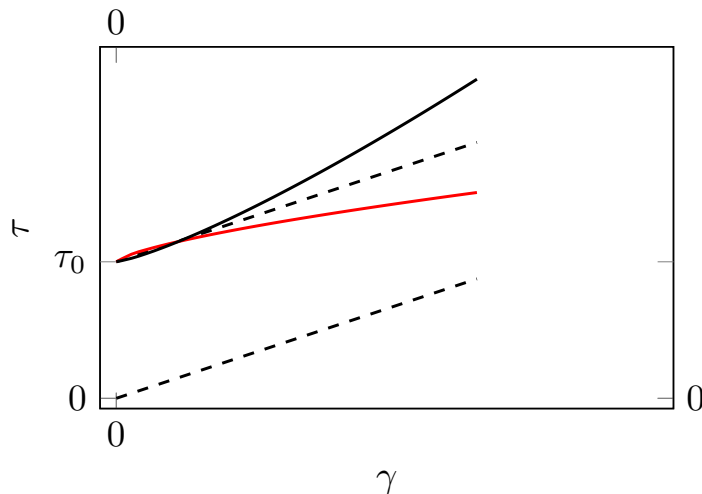


# Uogólniony model Herschela

$$\tau = \tau_0 + k\gamma^n + \mu_\infty\gamma \quad (91)$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \tau_0|\gamma|^{-1} + k|\gamma|^{n-1} + \mu_\infty \quad (92)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mu = \mu_\infty$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

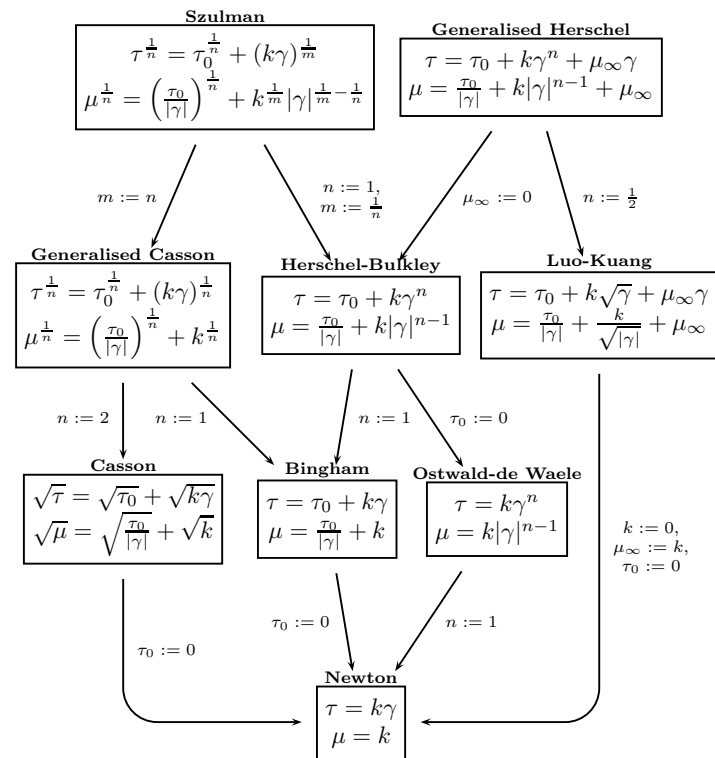
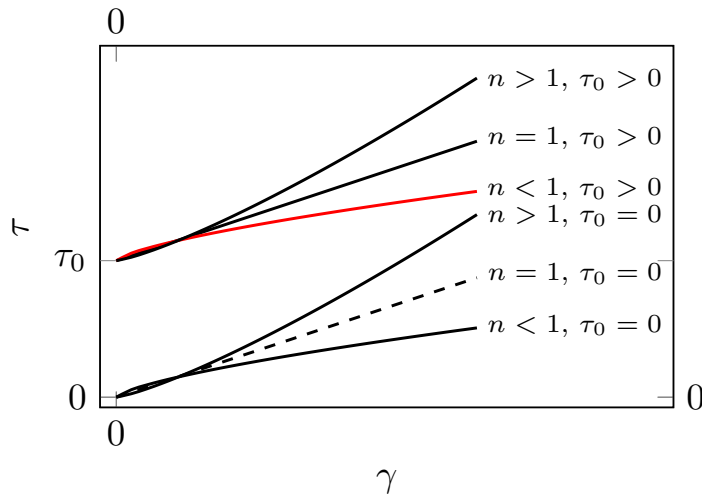
Laboratorium

Literatura

# Model Szulmana

$$\tau^{\frac{1}{n}} = \tau_0^{\frac{1}{n}} + (k\gamma)^{\frac{1}{m}} \quad (93)$$

$$\mu = \left(\tau_0 |\gamma|^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} + k^{\frac{1}{m}} |\gamma|^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} \quad (94)$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

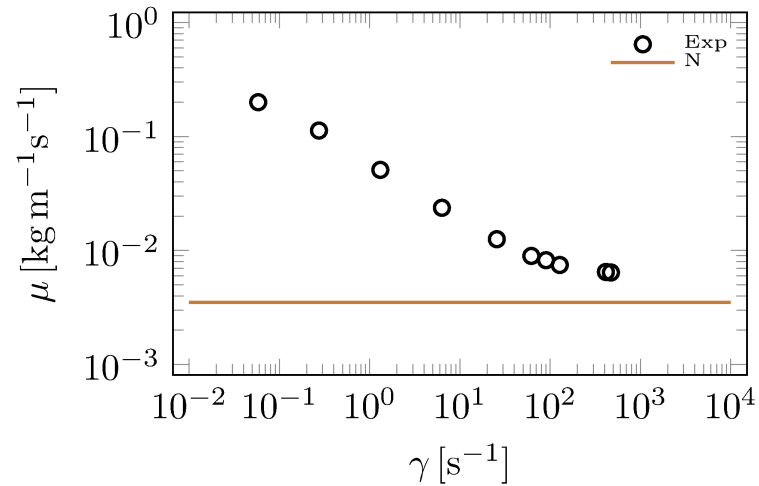
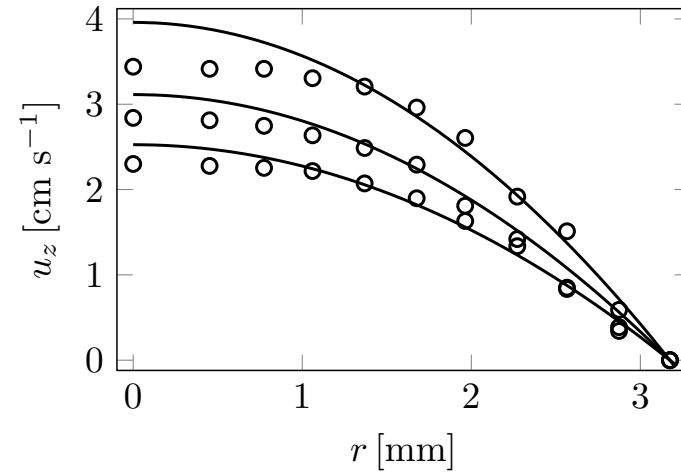
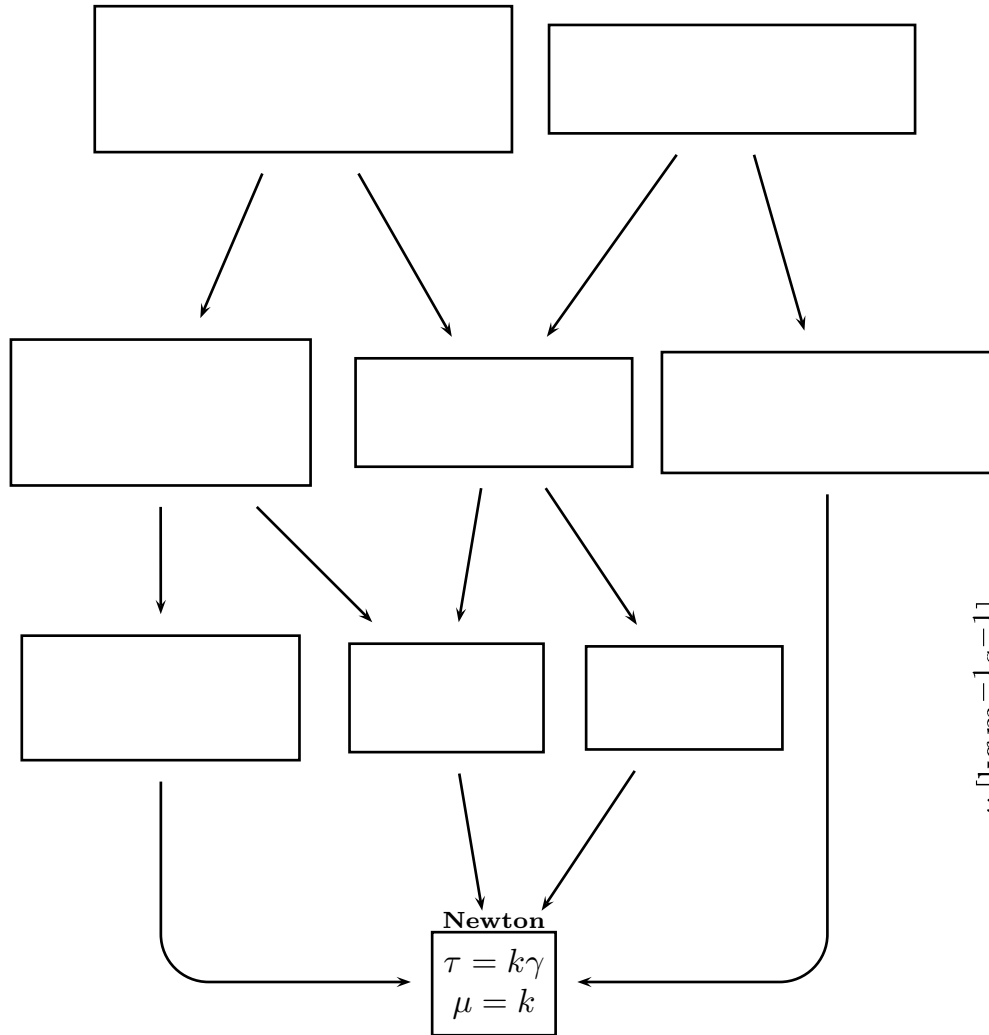
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model newtonowski



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

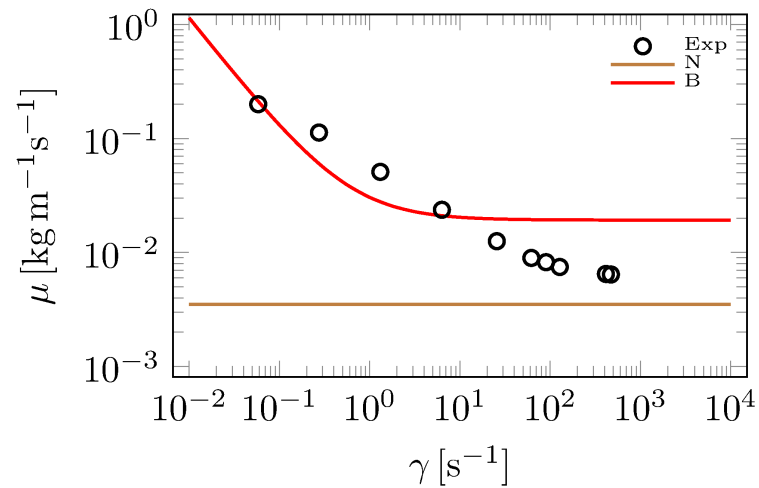
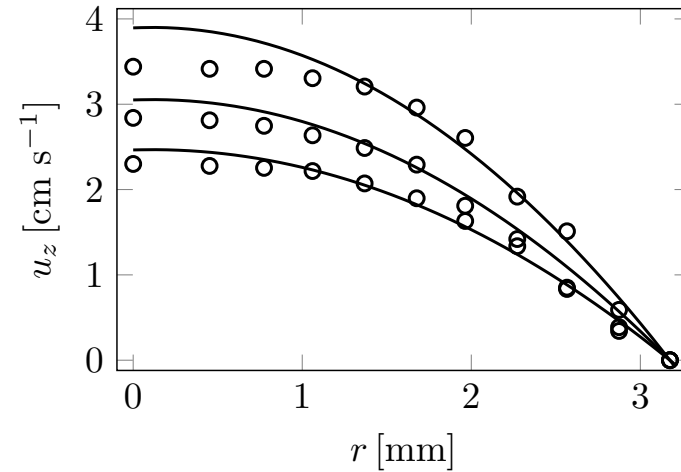
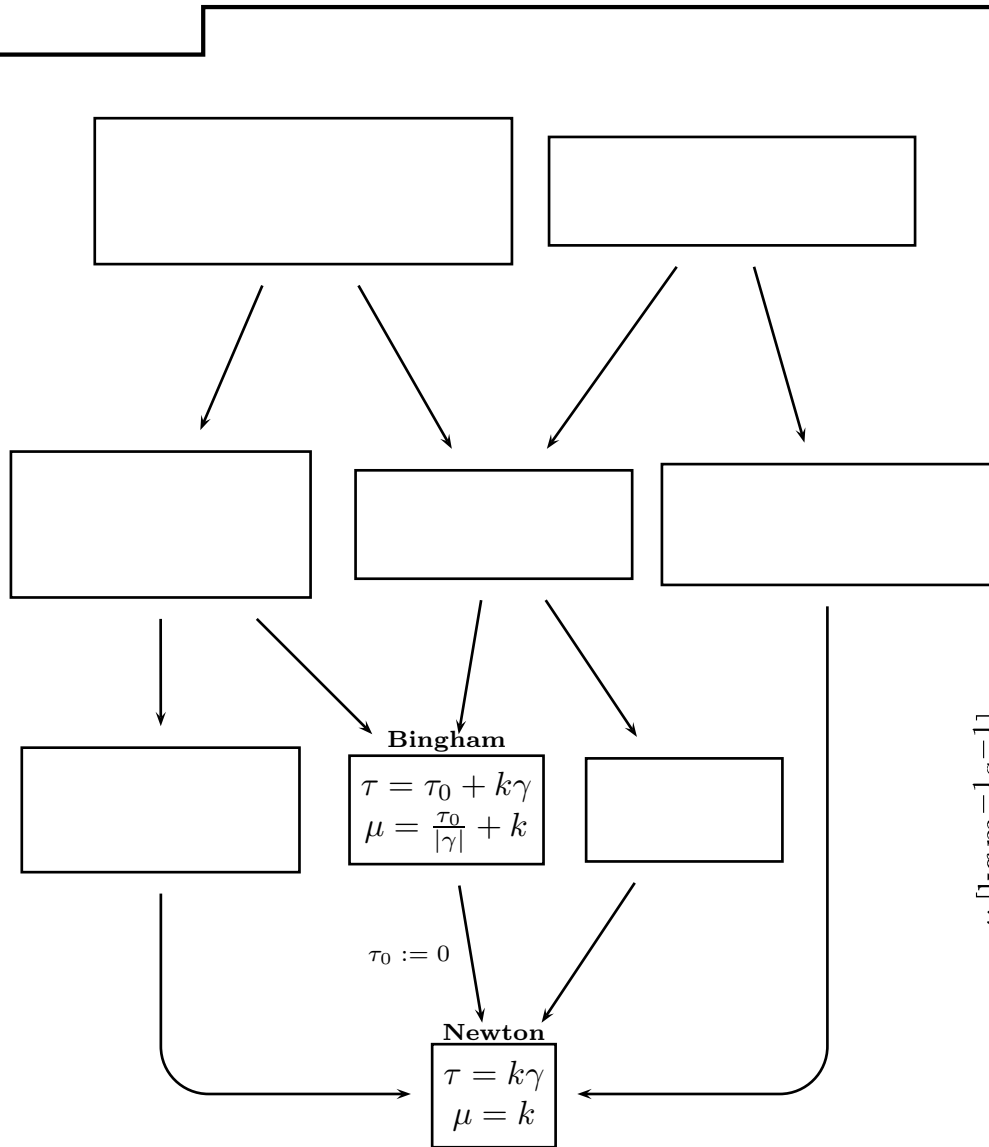
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Bingham



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

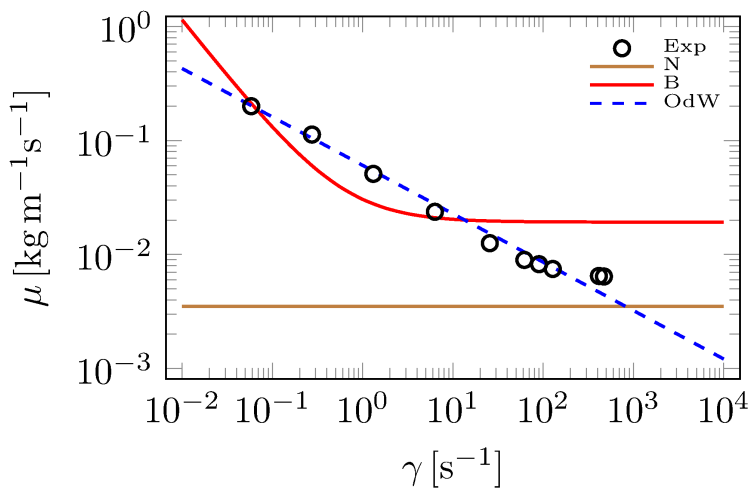
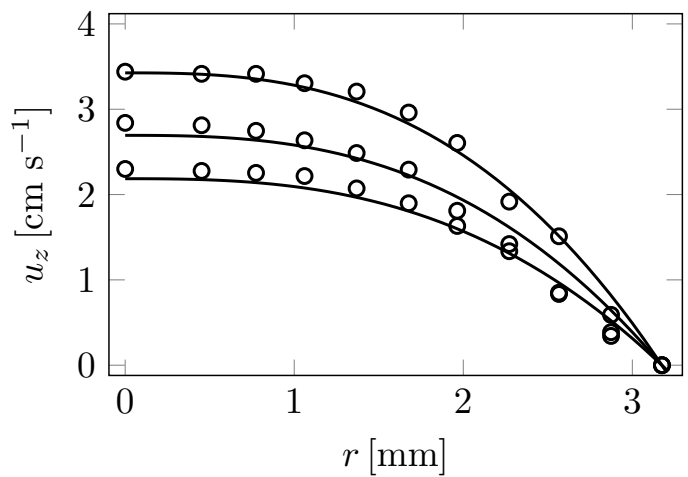
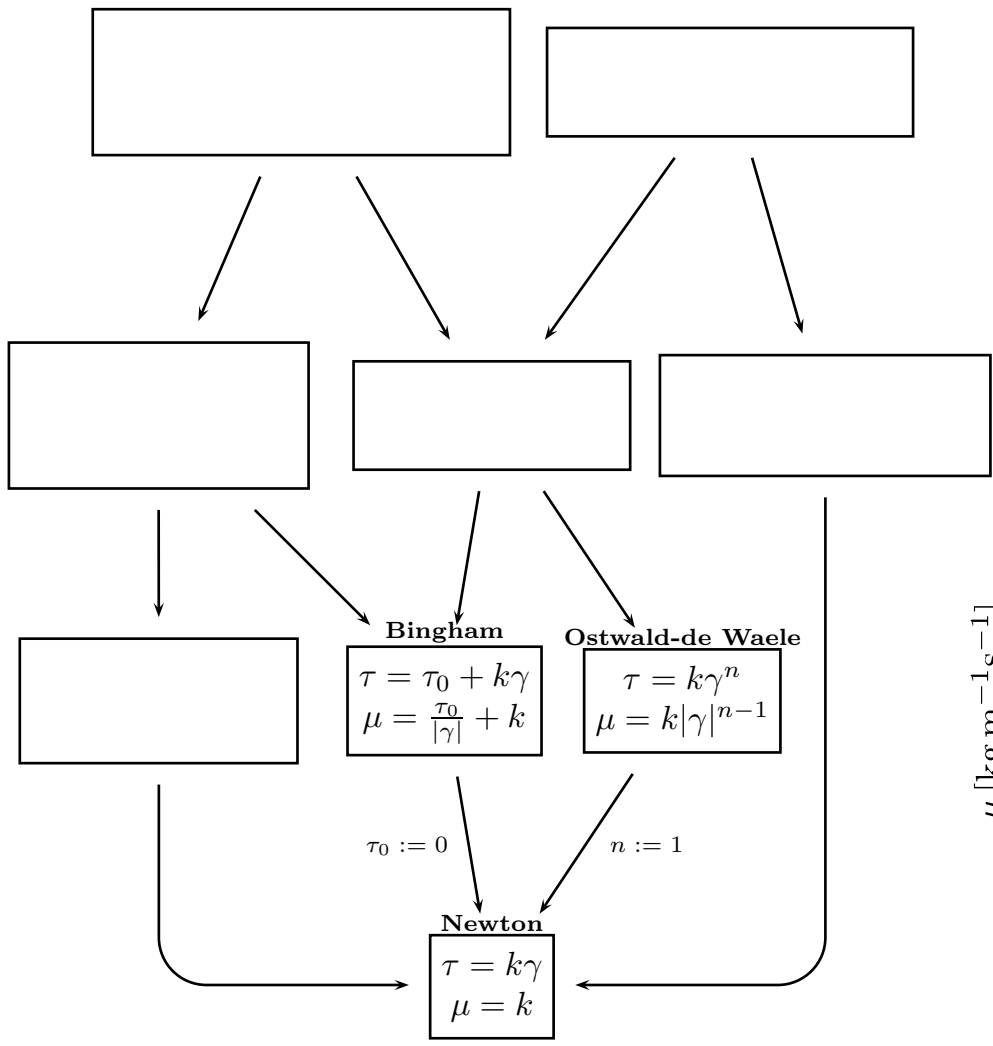
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Ostwalda-de Waele



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

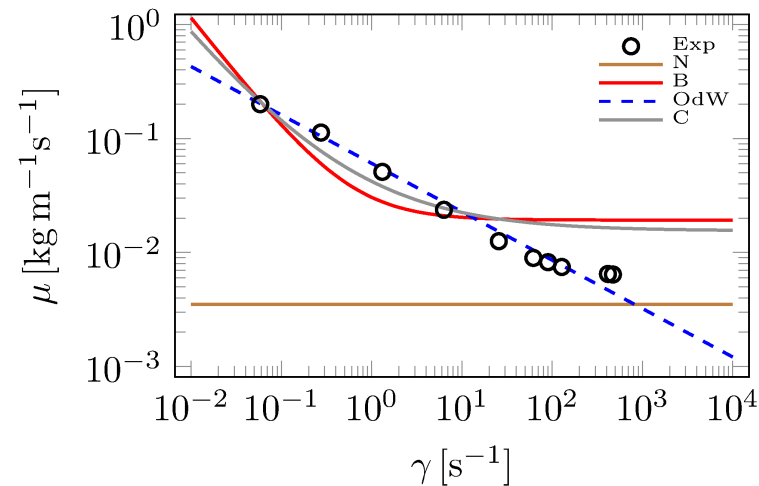
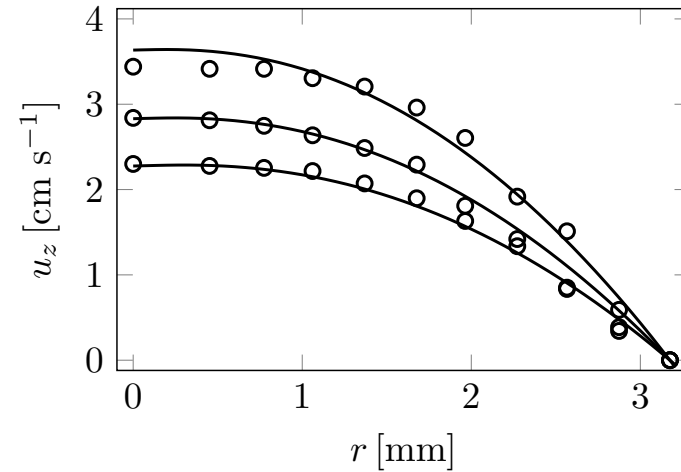
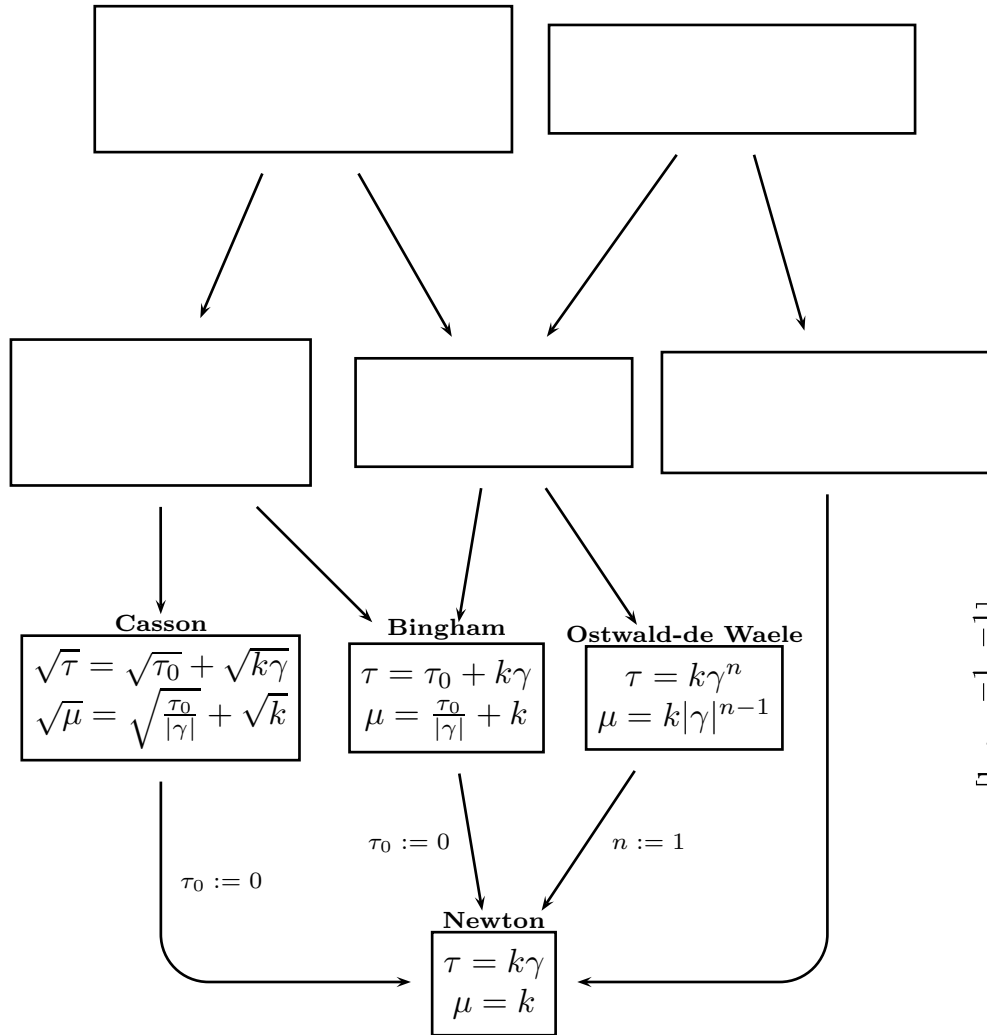
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Cassona



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

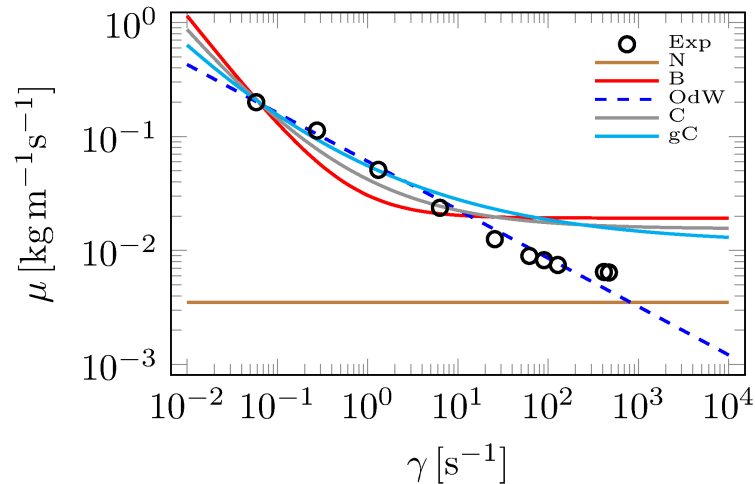
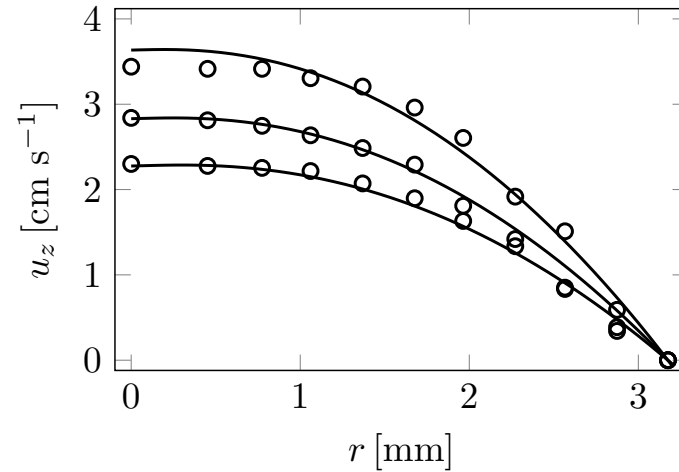
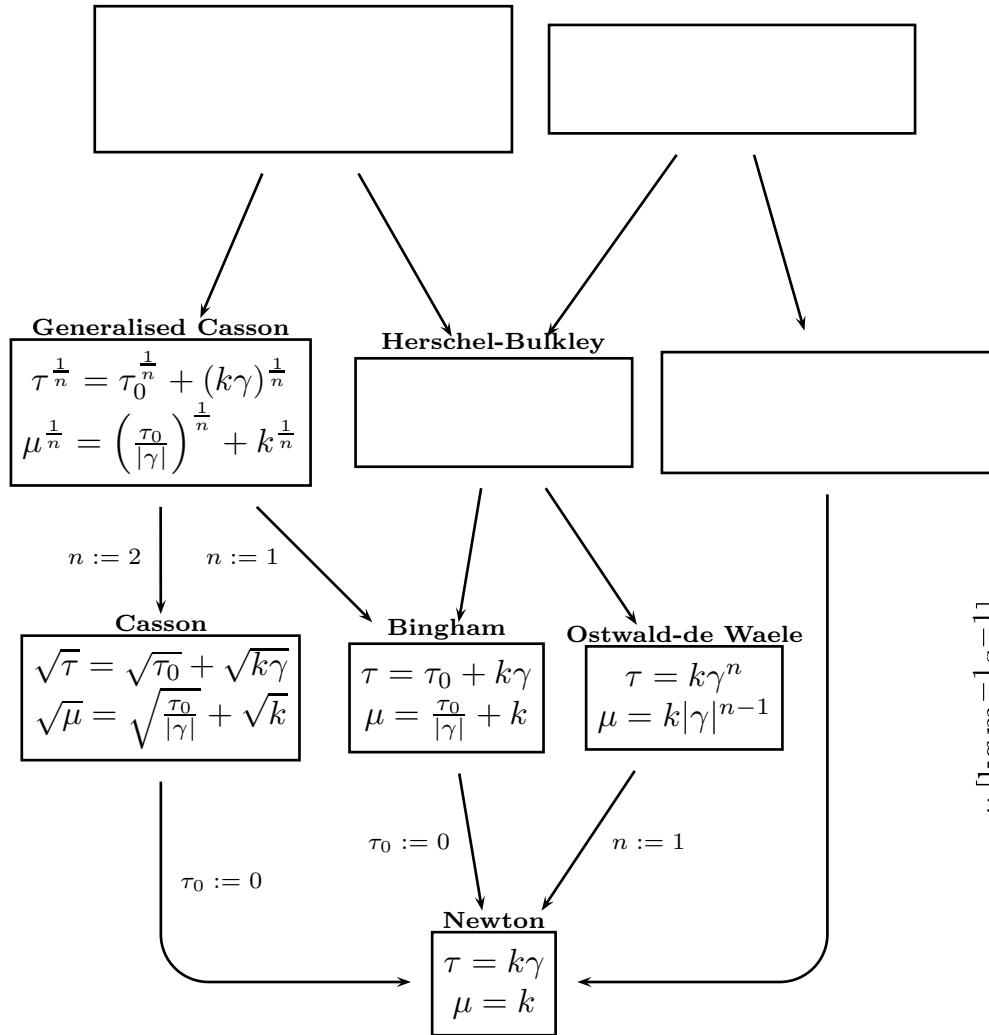
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Uogólniony model Cassona



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

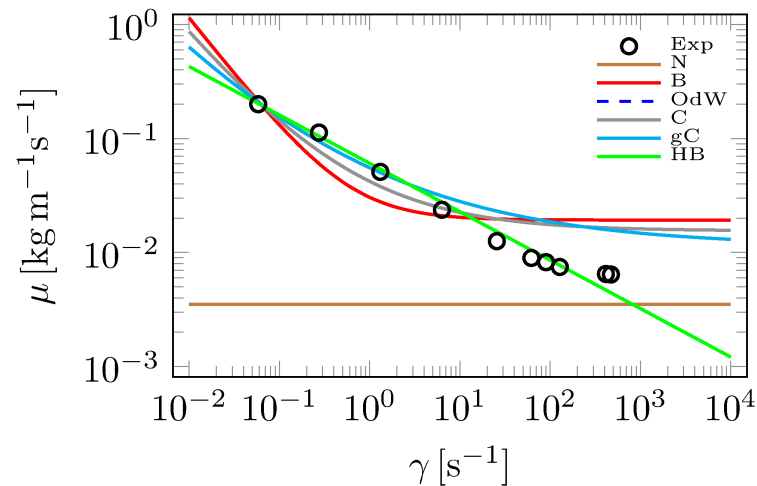
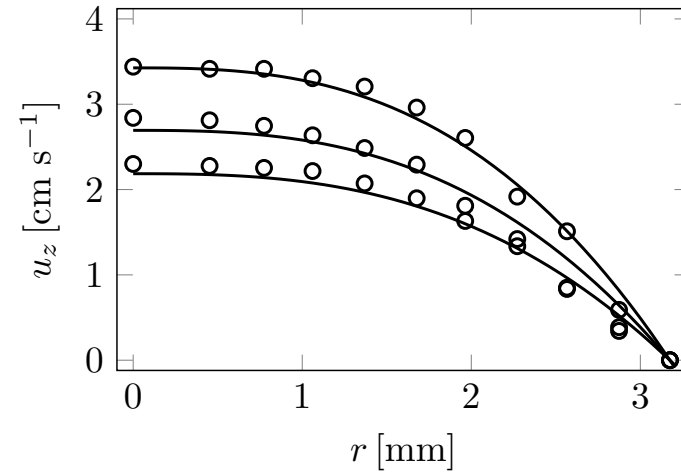
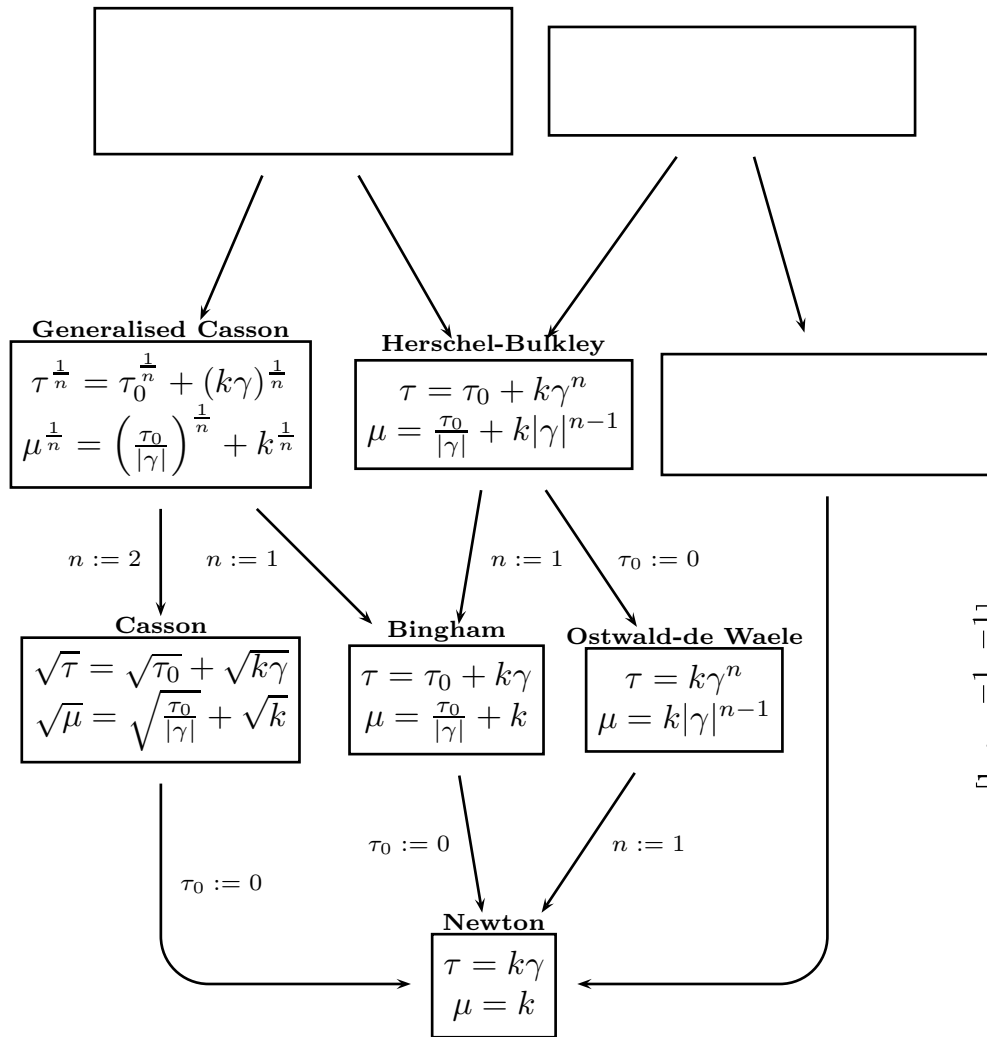
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Herschela-Bulkleya



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

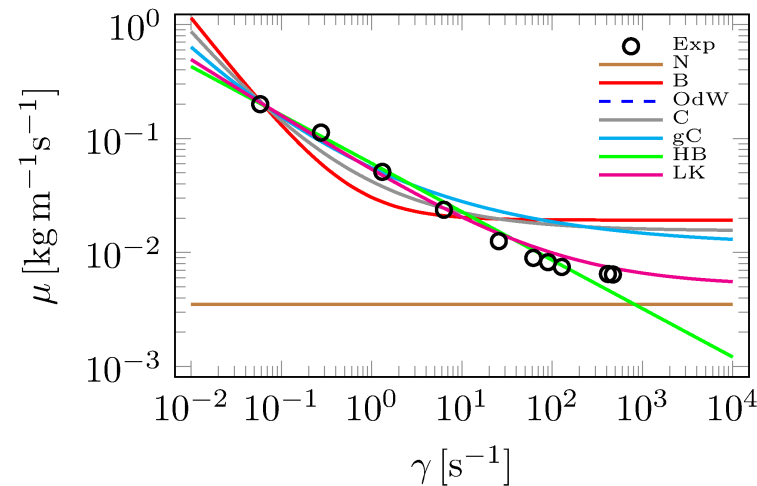
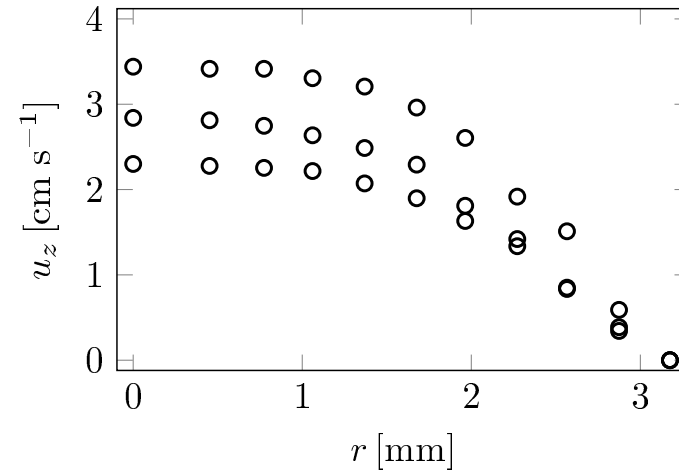
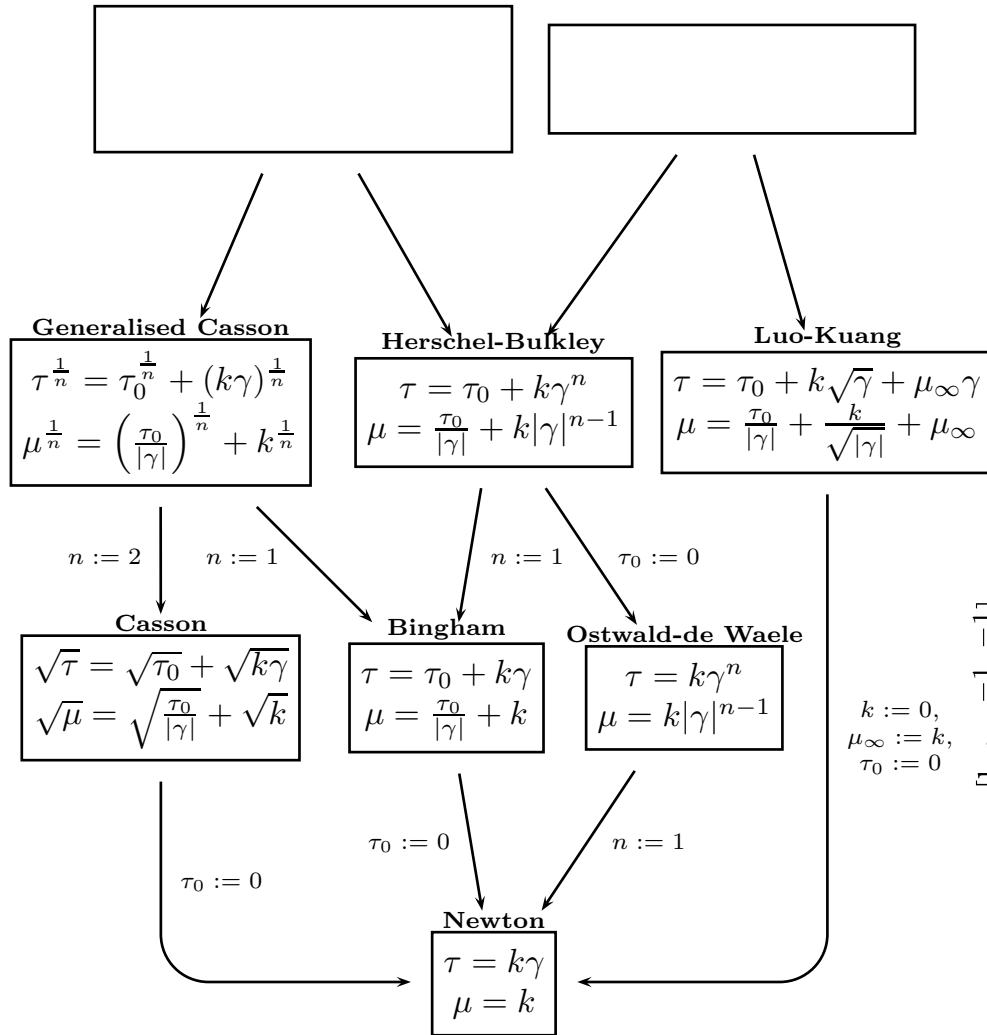
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Model Luo-Kuanga



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

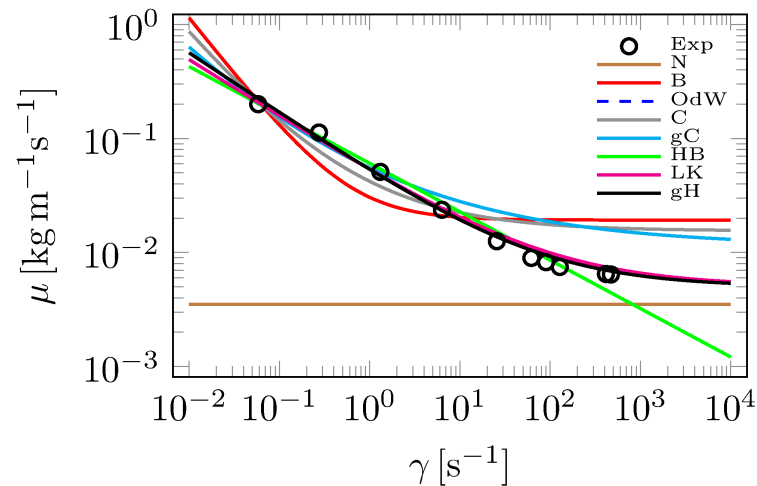
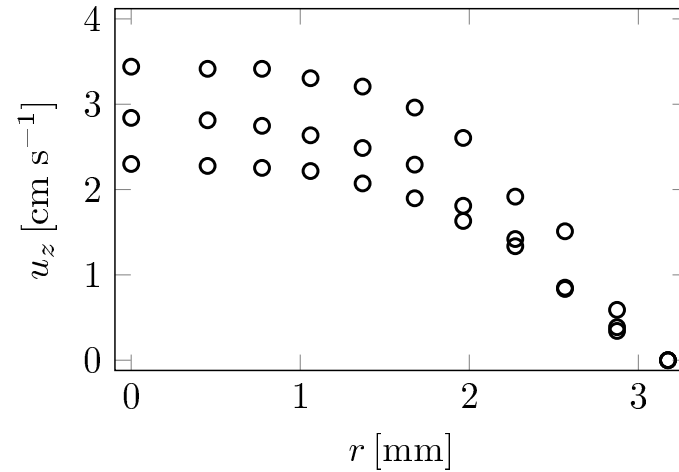
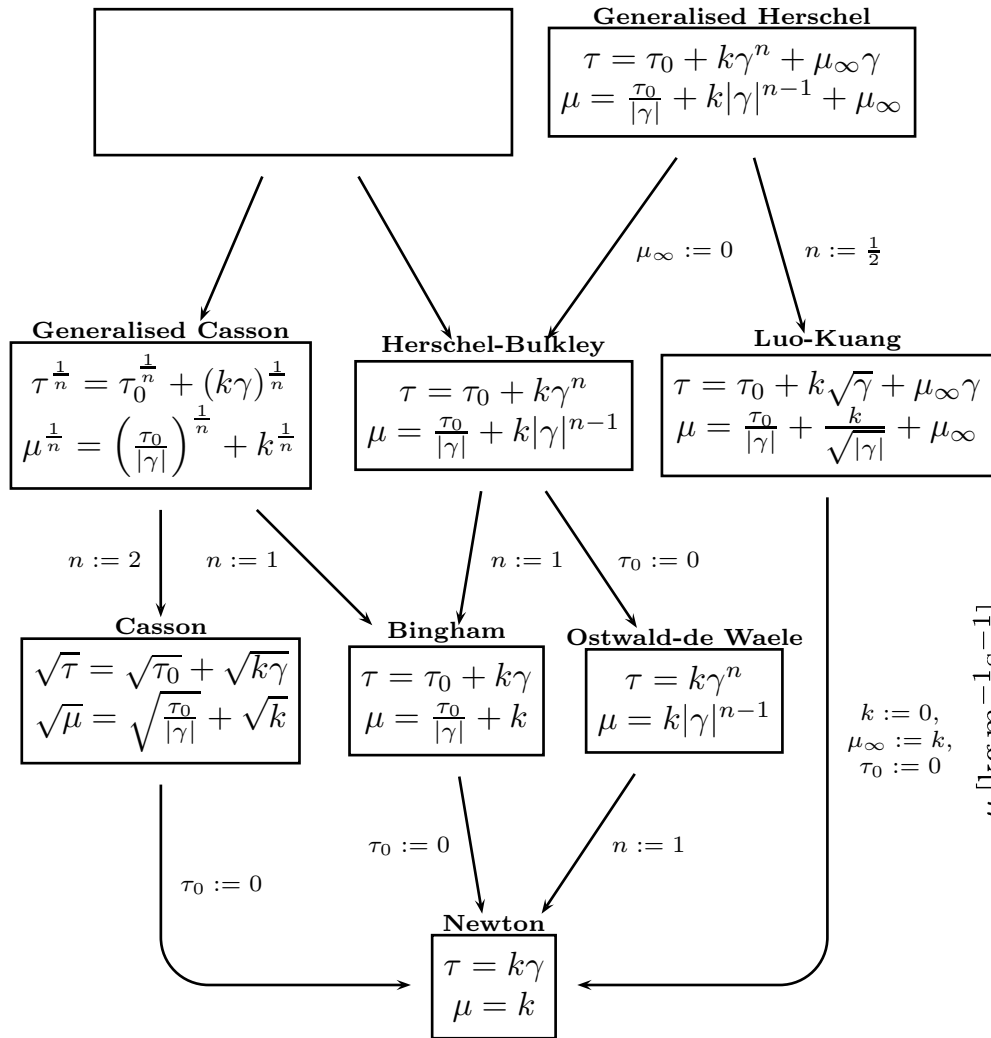
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Uogólniony model Herschela



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Szulmana

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

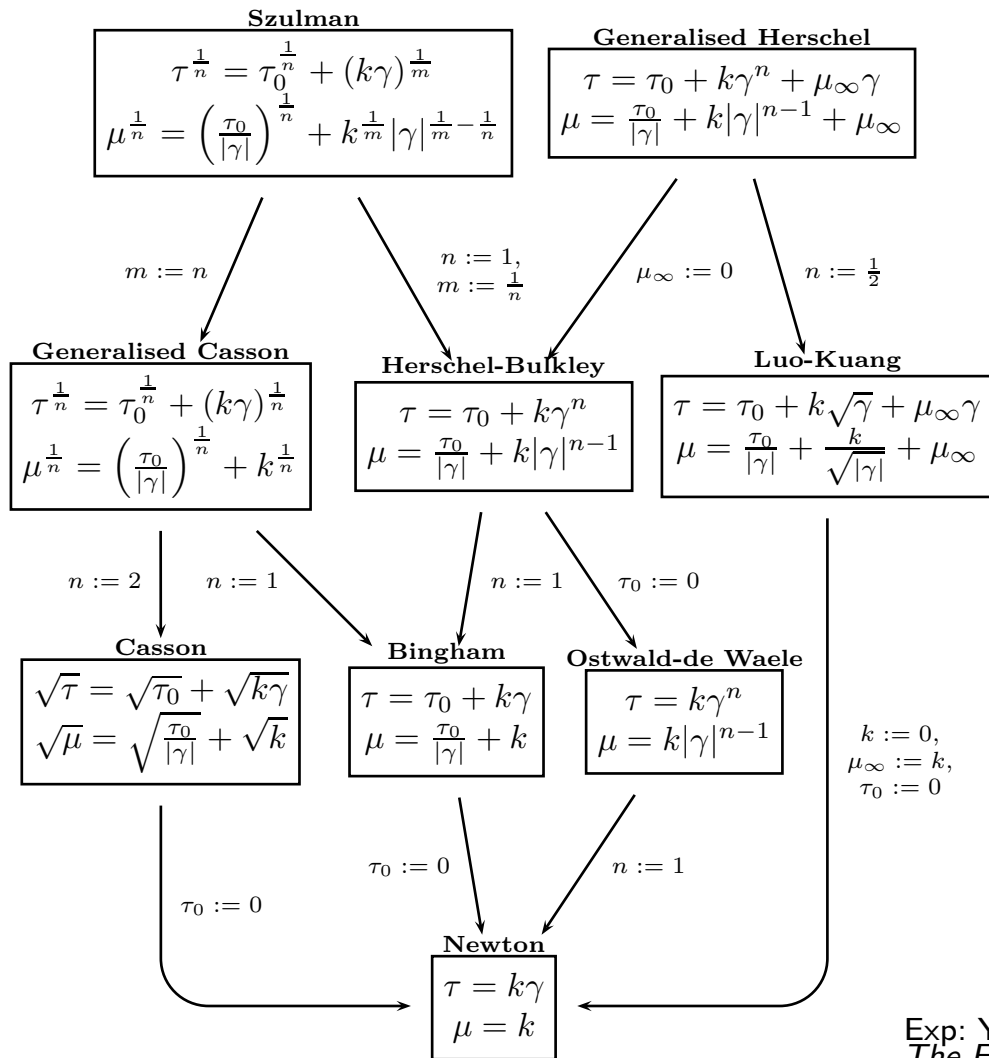
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



Exp: Yeleswarapu K.K. et al.,  
*The Flow of Blood in Tubes: Theory and Experiment*,  
 Mech. Res. Commun. 25(3), 257–262, 1998

# Uogólnione płyny newtonowskie

$$\sigma = -p\delta + \underbrace{\tau}_{?} \quad (95)$$

- Płyny newtonowskie  $\tau = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie  $\tau \neq 2\mu\mathbf{D}$ 
  - ◆ Uogólnione płyny newtonowskie  $\tau = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$ , gdzie  $\mu(\gamma) = \dots$
  - ◆ Modele płynów typu różniczkowego
  - ◆ Modele płynów typu całkowego
  - ◆ Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Modele płynów typu różniczkowego

$$\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots) \quad (96a)$$

$$\mathbf{A}_n(t) = \left. \frac{d^n}{d\tau^n} \mathbf{C}_t(\tau) \right|_{\tau=t} \quad (96b)$$

$\mathbf{A}_i$  – tensory Rivlina-Ericksena

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = & \\ & \alpha_0 \boldsymbol{\delta} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 + \\ & \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1) + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1^2) + \\ & \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \cdot \mathbf{A}_1) + \alpha_8 (\mathbf{A}_1^2 \cdot \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \cdot \mathbf{A}_1^2) \end{aligned} \quad (97)$$

$$\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}, \quad \mathbf{A}_2 = 2 \frac{d\mathbf{D}}{dt} + 4\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + 4\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (98)$$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Modele płynów typu różniczkowego

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \quad (99)$$

- Płyny newtonowskie  $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie  $\boldsymbol{\tau} \neq 2\mu\mathbf{D}$ 
  - ◆ Uogólnione płyny newtonowskie  $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$ , gdzie  $\mu(\gamma) = \dots$
  - ◆ Modele płynów typu różniczkowego  $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots)$
  - ◆ Modele płynów typu całkowego
  - ◆ Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Modele płynów typu całkowego

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^t f(t - \tau) (\boldsymbol{\delta} - \mathbf{C}_t(\tau)) d\tau \quad (100)$$

$f$  – pamięć płynu

$\mathbf{C}_t$  – względny lewy tensor Cauchy'ego-Greena

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Modele płynów typu całkowego

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \quad (101)$$

- Płyny newtonowskie  $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie  $\boldsymbol{\tau} \neq 2\mu\mathbf{D}$ 
  - ◆ Uogólnione płyny newtonowskie  
 $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$ , gdzie  $\mu(\gamma) = \dots$
  - ◆ Modele płynów typu różniczkowego  
 $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots)$
  - ◆ Modele płynów typu całkowego  
 $\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^t f(t - \tau) (\boldsymbol{\delta} - \mathbf{C}_t(\tau)) d\tau$
  - ◆ Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Modele płynów typu szybkościowego

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}) \quad (102)$$

- Model Maxwella  $\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \mathbf{D}$
- Model Oldroyda  $\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu(\mathbf{D} + \lambda_2 \dot{\mathbf{D}})$

$\lambda_1$  – czas relaksacji

$\lambda_2$  – czas opóźnienia

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Bioreologia – podsumowanie

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \quad (103)$$

- Płyny newtonowskie  $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie  $\boldsymbol{\tau} \neq 2\mu\mathbf{D}$ 
  - ◆ Uogólnione płyny newtonowskie  
 $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$ , gdzie  $\mu(\gamma) = \dots$
  - ◆ Modele płynów typu różniczkowego  
 $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots)$
  - ◆ Modele płynów typu całkowego  
 $\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^t f(t - \tau) (\boldsymbol{\delta} - \mathbf{C}_t(\tau)) d\tau$
  - ◆ Modele płynów typu szybkościowego  
 $\dot{\boldsymbol{\tau}} = f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}})$

Podstawowe  
równania

---

Bioreologia

---

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

---

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

---

Sieci naczyń

---

Prawa Murraya

---

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

---

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

---

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

---

Laboratorium

---

Literatura

---

# Przykładowe rozwiązania analityczne

Podstawowe  
równania

Bioreologia

**Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne**

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

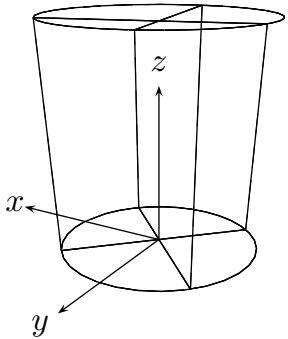
Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Współrzędne cylindryczne

## Układ równań



$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (104)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (105)$$

$$\mu = f(\gamma) \quad (106)$$

we współrzędnych cylindrycznych redukuje się do jednego równania

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (107)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

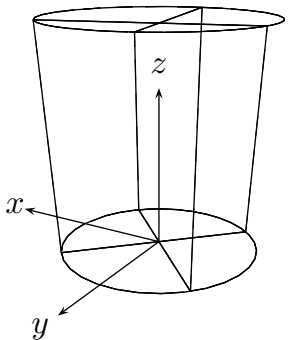
# Przepływ stacjonarny i newtonowski

Przy założeniach  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  i  $\mu = \text{const}$ , równanie

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (108)$$

przechodzi w równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_z}{dr} \right) \quad (109)$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Przepływ stacjonarny i newtonowski

Rozkład prędkości  $u_r$  zależy wyłącznie od promienia  $r$ .  
Gradient ciśnienia  $\frac{\partial p}{\partial z}$  wzdłuż osi rurki jest stały.  
Dlaczego?

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_z}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{L} \quad (110)$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie

$$r \frac{du_z}{dr} = c_1 - \frac{\Delta p}{2\mu L} r^2 \quad (111)$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie

$$u_z(r) = c_2 + c_1 \ln r - \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 \quad (112)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

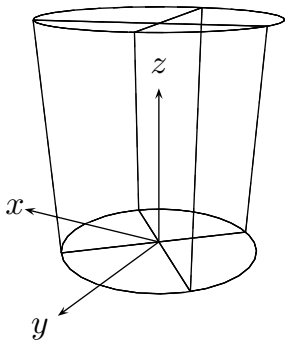
Literatura

# Przepływ stacjonarny i newtonowski

$$u_z(r) = c_2 + c_1 \ln r - \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 \quad (113)$$

Mamy jednak tylko jeden warunek brzegowy w postaci  $u_z(R) = 0$ , a co z drugim?

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \ln r = -\infty \quad \implies \quad c_1 = 0 \quad (114)$$



$$u_z(r) = c_2 - \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 \quad (115)$$

Stałą  $c_2$  wyznaczamy z  $u_z(R) = 0$

$$c_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L} R^2 \quad (116)$$

Podstawowe  
równania

---

Bioreologia

---

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

---

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

---

Sieci naczyń

---

Prawa Murraya

---

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

---

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

---

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

---

Laboratorium

---

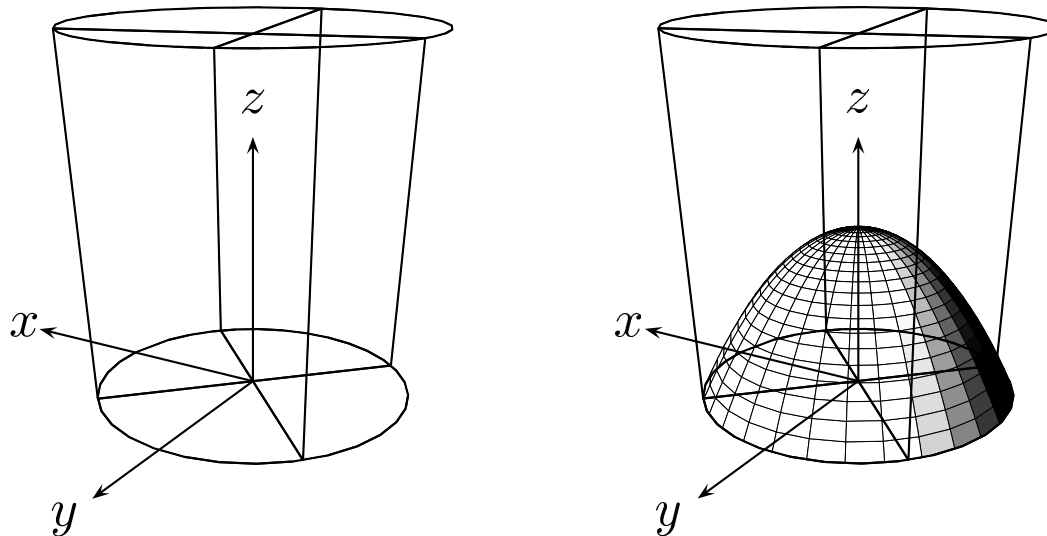
Literatura

---

# Przepływ stacjonarny i newtonowski

Czyli rozwiązanie przepływu stacjonarnego i newtonowskiego w rurce o promieniu  $R$

$$u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (117)$$



Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Przepływ stacjonarny i newtonowski

Objętościowe natężenie przepływu  $\dot{V}$

$$\dot{V} = \iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (118)$$

$S$  jest powierzchnią, przez którą obliczamy  $\dot{V}$ , a  $\hat{\mathbf{n}}$  wektorem normalnym

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\} \quad (119)$$

Iloczyn skalarny  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  obliczamy następująco

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = u_z \quad (120)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

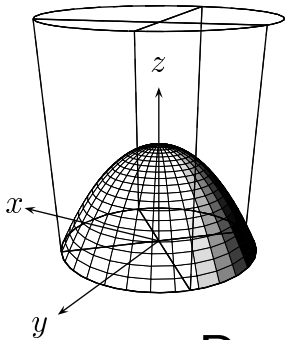
# Przepływ stacjonarny i newtonowski

Łatwiej będzie całkować we współrzędnych biegunowych po obszarze

$$\Delta = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

$$\dot{V} = \iint_S u_z dS = \frac{\Delta p}{4\mu L} \iint_S (R^2 - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$\frac{\Delta p}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr d\varphi = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \quad (121)$$



Prawo Poiseuille'a (1835)

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \quad (122)$$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Przepływ stacjonarny i newtonowski

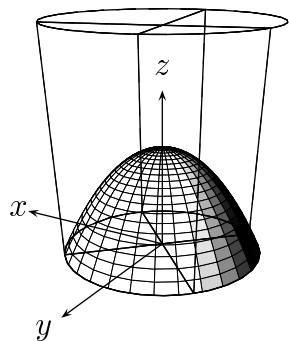
Prędkość średnia  $\bar{u}$  definiowana jest w następujący sposób

$$\bar{u} = \frac{1}{|S|} \iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (123)$$

Porównując wzory na  $\bar{u}$  i  $\dot{V}$

$$\dot{V} = \bar{u} |S| \quad (124)$$

Zatem  $u_z$  dla  $|S| = \pi R^2$



$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{|S|} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L} \quad (125)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

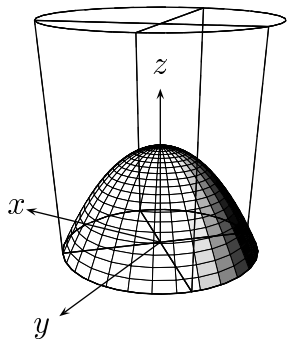
# Przepływ stacjonarny i newtonowski

Prędkość maksymalna  $u_0$  jest dla  $r = 0$  (środek rurki)

$$u_0 = u_z(0) = \frac{R^2 \Delta p}{4\mu L} \quad (126)$$

Porównując prędkość średnią i maksymalną dla przepływu laminarnego w rurki o przekroju kołowym, otrzymujemy

$$u_0 = 2\bar{u} \quad (127)$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

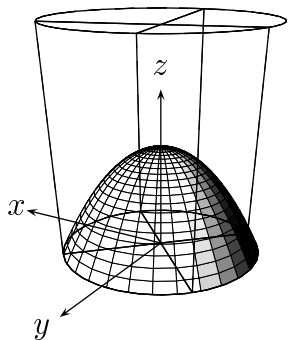
# Przepływ stacjonarny i newtonowski

$$u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (128)$$

Naprężenia styczne  $\tau$

$$\tau = \mu \frac{du_z}{dr} = \mu \gamma \quad (129)$$

Naprężenia styczne na ściankach  $\tau_w$



$$\tau_w = \mu \frac{du_z(R)}{dr} = -\frac{\Delta p r}{2L} \Big|_{r=R} = -\frac{\Delta p R}{2L} \quad (130)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

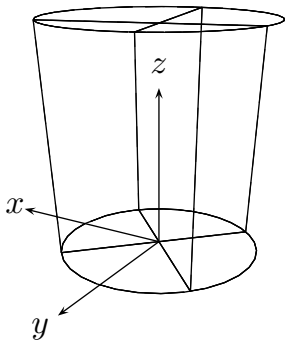
Literatura

# Przepływ stacjonarny i nienewtonowski

Przy założeniach  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  i  $\mu \neq \text{const}$ , równanie

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (131)$$

przechodzi w równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu



$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \mu r \frac{du_z}{dr} \right) \quad (132)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Przepływ stacjonarny i nienewtonowski

Równanie dla  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{L}$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \mu r \frac{du_z}{dr} \right) \quad (133)$$

można jednokrotnie całkować, niezależnie od postaci  $\mu$

$$c_1 - \frac{r^2}{2} \frac{\Delta p}{L} = \mu r \frac{du_z}{dr} \quad (134)$$

Z warunku  $\left. \frac{du_z}{dr} \right|_{r=0} = 0$  mamy  $c_1 = 0$ , co daje

$$-\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L} = \mu \frac{du_z}{dr} \quad (135)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Ostwalda-de Waele

Równania modelu

$$\tau = k\gamma^n \quad (136)$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = k|\gamma|^{n-1} \quad (137)$$

Równanie wstawiamy do rozwiązania

$$-\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L} = \mu \frac{du_z}{dr} \quad (138)$$

gdzie  $\frac{du_z}{dr} = \gamma \leq 0$ , więc  $|\gamma| = -\gamma$

$$\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L} = k|\gamma|^{n-1}|\gamma| \quad (139)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Model Ostwalda-de Waele

$$\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L} = k|\gamma|^n \quad (140)$$

$$|\gamma| = -\gamma = -\frac{du_z}{dr} = \left( \frac{r \Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (141)$$

Całkując obustronnie

$$u_z = - \left( \frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{1+\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} + c_2 \quad (142)$$

Stałą  $c_2$  wyznaczamy z warunku  $u_z(R) = 0$

$$u_z = \left( \frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left( R^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}} \right) \quad (143)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

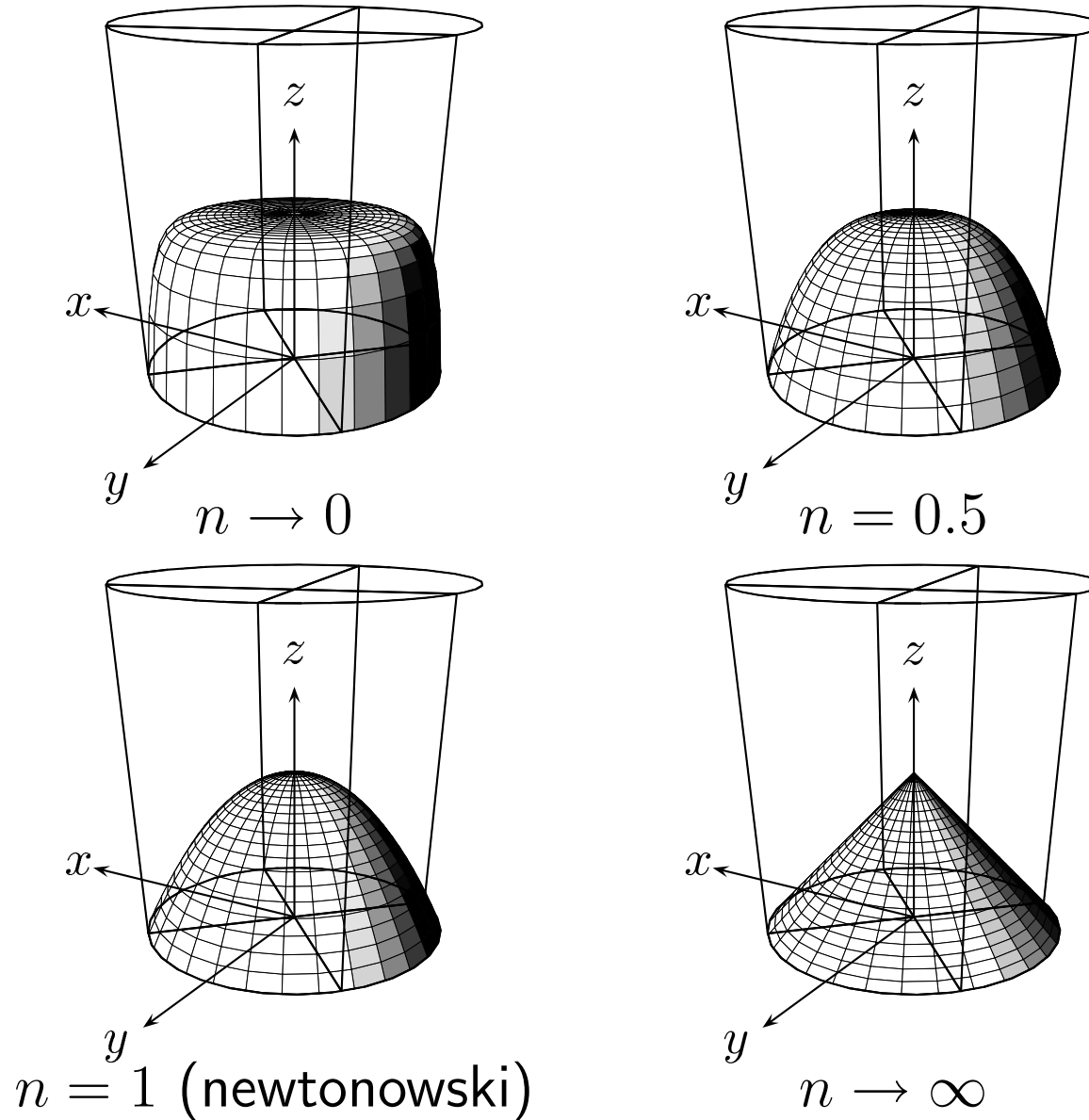
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Ostwalda-de Waele



Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Ostwalda-de Waele

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \iint_S u_z \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R u_z r \, dr \, d\varphi = \\ & \left( \frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( R^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}} \right) r \, dr \, d\varphi = \\ & \left( \frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\pi R^{3+\frac{1}{n}}}{3 + \frac{1}{n}} \quad (144)\end{aligned}$$

Uogólnione prawo Poiseuille'a

$$\dot{V} = \left( \frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\pi R^{3+\frac{1}{n}}}{3 + \frac{1}{n}} \quad (145)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model Ostwalda-de Waele

Prędkość średnia  $\bar{u}$

$$\bar{u} = \frac{1}{|S|} \iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \frac{\dot{V}}{|S|} = \left( \frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{1+\frac{1}{n}}}{3 + \frac{1}{n}} \quad (146)$$

Prędkość maksymalna  $u_0$  jest dla  $r = 0$

$$u_0 = \left( \frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{1+\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} \quad (147)$$

Porównując  $\bar{u}$  i  $u_0$ , otrzymujemy

$$\frac{u_0}{\bar{u}} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3n + 1}{n + 1} \quad (148)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie Womersleya opisuje pole prędkości przepływu:

- laminarnego
- niestacjonarnego
- jednowymiarowego
- płynu newtonowskiego
- płynu nieściśliwego
- w rurce o przekroju kołowym
- wymuszonego pulsującym gradientem ciśnienia

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

Przepływ wymuszony jest wyłącznie pulsującym gradientem ciśnienia

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -Ae^{i\omega t} \quad (149)$$

gdzie  $A$  jest stałą,  $\omega$  – częstością kołową,  $i$  – jednostką urojoną.

Rozwiązujemy równanie

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (150)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \quad (151)$$

Równanie to jest równaniem różniczkowym cząstkowym, rzędu drugiego, gdzie  $u_z(r, t)$ . Równanie to można sprowadzić do równania różniczkowego zwyczajnego przez następującą dekompozycję składowej prędkości  $u_z$

$$u_z(t, r) = f(r)e^{i\omega t} \quad (152)$$

gdzie  $f$  jest nieznaną funkcją, która zależy tylko od promienia. Po podstawieniu

$$\rho i\omega f e^{i\omega t} = A e^{i\omega t} + \frac{\mu}{r} f' e^{i\omega t} + \mu f'' e^{i\omega t} \quad (153)$$

Podstawowe  
równania

---

Bioreologia

---

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

---

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

---

Sieci naczyń

---

Prawa Murraya

---

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

---

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

---

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

---

Laboratorium

---

Literatura

---

# Rozwiązanie Womersleya

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{\rho i \omega}{\mu}f = -\frac{A}{\mu} \quad (154)$$

Równanie to można sprowadzić do równania jednorodnego przez podstawienie

$$f = f_0 + c \quad (155)$$

odpowiednio dobierając stałą  $c$

$$f_0'' + \frac{1}{r}f_0' - \frac{\rho i \omega}{\mu}f_0 - \frac{\rho i \omega}{\mu}c = -\frac{A}{\mu} \quad (156)$$

Za  $c$  przyjmujemy

$$c = \frac{A}{\rho i \omega} \quad (157)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Rozwiązanie Womersleya

Równanie jednorodne

$$f_0'' + \frac{1}{r}f_0' - \frac{\rho i \omega}{\mu}f_0 = 0 \quad (158)$$

Jest to równanie Bessela, którego rozwiązanie ma postać

$$f_0(r) = c_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} r \sqrt{\rho i \omega \mu^{-1}} \right) + c_2 Y_0 \left( -i^{\frac{3}{2}} r \sqrt{\rho i \omega \mu^{-1}} \right) \quad (159)$$

$J_0$  i  $Y_0$  są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, zerowego rzędu

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

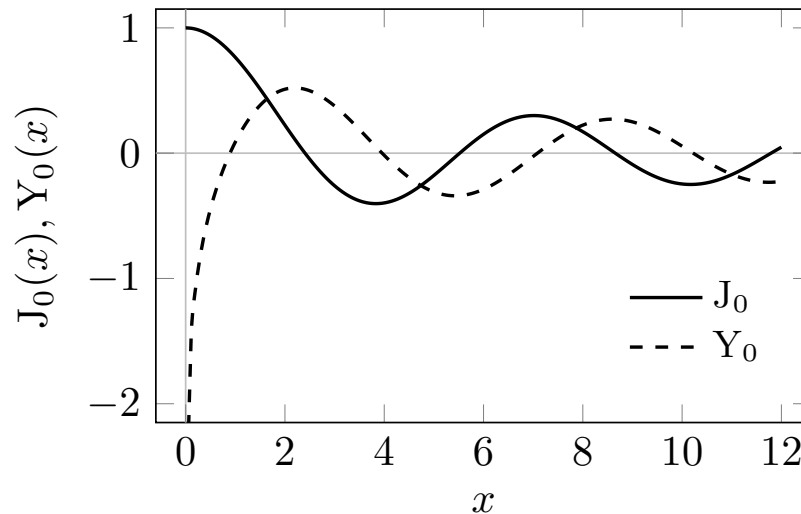
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

$J_0$  i  $Y_0$  – funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, zerowego rzędu



$$\lim_{r \rightarrow 0^+} Y_0(x) = -\infty \quad (160)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

$$f_0(r) = c_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} r \sqrt{\rho i \omega \mu^{-1}} \right) + c_2 Y_0 \left( -i^{\frac{3}{2}} r \sqrt{\rho i \omega \mu^{-1}} \right) \quad (161)$$

Ponieważ

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} Y_0(x) = -\infty \quad \implies \quad c_2 = 0 \quad (162)$$

aby uniknąć osobliwości w środku rurki, czyli

$$f_0(r) = c_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R} \right) \quad (163)$$

gdzie  $\alpha$  jest liczbą Womersleya

$$\alpha = R \sqrt{\rho i \omega \mu^{-1}} \quad (164)$$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie równania jednorodnego

$$f_0(r) = c_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R} \right) \quad (165)$$

Ponieważ

$$f = f_0 + c = f_0 + \frac{A}{\rho i \omega} \quad (166)$$

więc rozwiązanie równania niejednorodnego

$$f(r) = c_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R} \right) + \frac{A}{\rho i \omega} \quad (167)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie równania niejednorodnego

$$f(r) = c_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R} \right) + \frac{A}{\rho i \omega} \quad (168)$$

Rozkład prędkości

$$u_z(t, r) = f(r) e^{i\omega t} \quad (169)$$

więc  $u_z(t, r)$  ma postać

$$u_z(t, r) = e^{i\omega t} \left( c_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R} \right) + \frac{A}{\rho i \omega} \right) \quad (170)$$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie

$$u_z(t, r) = e^{i\omega t} \left( c_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R} \right) + \frac{A}{\rho i \omega} \right) \quad (171)$$

jest rozwiązaniem ogólnym. Stałą  $c_1$  wyznaczamy z warunku  $u_z(t, R) = 0$

$$c_1 = -\frac{A}{\rho i \omega J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)} \quad (172)$$

Rozwiązanie szczególne – rozw. Womersleya (1955)

$$u_z(t, r) = \frac{Ae^{i\omega t}}{\rho i \omega} \left( 1 - \frac{J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R} \right)}{J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)} \right) \quad (173)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

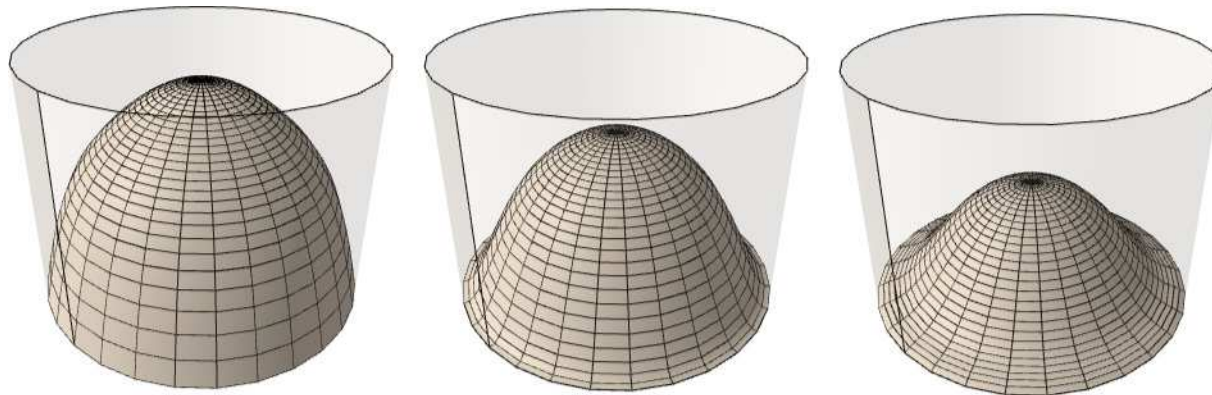
Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie Womersleya

## Rozwiązanie Womersleya (1955)

$$u_z(t, r) = \frac{Ae^{i\omega t}}{\rho i \omega} \left( 1 - \frac{J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R} \right)}{J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)} \right) \quad (174)$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Rozwiązanie analityczne – podsumowanie

Rozwiązanie analityczne:

- możliwe są tylko dla uproszczonej geometrii (rurki kołowe)
- opisywane są równaniami:
  - ◆ różniczkowymi cząstkowymi
  - ◆ drugiego rzędu
  - ◆ niestacjonarnymi
- często rozwiązania są nietrywialne
- zwykle sprowadzamy równania cząstkowe do zwyczajnych
- rozwiązania komplikują się dla płynów nienewtonowskich
- niemożliwe dla rzeczywistych naczyń krwionośnych

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Analogia mechaniczno-elektryczna

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

**Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna**

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

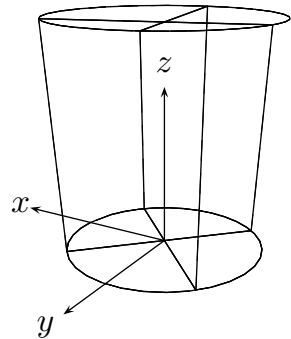
Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Analogia mechaniczno-elektryczna

Układ równań dla  $\mu = \text{const}$



$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (175)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (176)$$

$$(177)$$

we współrzędnych cylindrycznych redukuje się do jednego równania

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (178)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Analogia mechaniczno-elektryczna

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (179)$$

Mnożąc obustronnie przez  $2\pi r dr$  i całkując obustronnie od  $\int_0^R dr$

$$2\pi\rho \frac{d}{dt} \int_0^R u_z r dr = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial z} + 2\pi R\mu \frac{\partial u_z(R)}{\partial r} \quad (180)$$

dla

$$\dot{V} = 2\pi \int_0^R u_z r dr, \quad \tau_w = \mu \frac{\partial u_z(R)}{\partial r} \quad (181)$$

mamy

$$\rho \frac{d\dot{V}}{dt} = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial z} + 2\pi R\tau_w \quad (182)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Analogia mechaniczno-elektryczna

$$\rho \frac{d\dot{V}}{dt} = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial z} + 2\pi R \tau_w \quad (183)$$

dzieląc obustronnie przez  $\pi R^2$

$$\frac{\rho}{\pi R^2} \frac{d\dot{V}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2}{R} \tau_w \quad (184)$$

Bezwładność  $L_H = \frac{\rho}{\pi R^2}$ , oraz  $\tau_w = -\frac{\Delta p R}{2L} < 0$

$$L_H \frac{d\dot{V}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2}{R} |\tau_w| \quad (185)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Analogia mechaniczno-elektryczna

Prawo Poiseuille'a

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (186)$$

dla  $R_H = \frac{8\mu}{\pi R^4}$

$$\frac{\Delta p}{L} = \dot{V} R_H \quad (187)$$

i naprężenia styczne  $|\tau_w| = -\tau_w = \frac{\Delta p R}{2L} < 0$ .

Z obu równań mamy

$$\frac{2|\tau_w|}{R} = \dot{V} R_H \quad (188)$$

więc

$$L_H \frac{d\dot{V}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \quad (189)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Analogia mechaniczno-elektryczna

Prawo Poiseuille'a

$$\frac{\Delta p}{L} = \dot{V} R_H \quad (190)$$

Prawo Ohma

$$U = I R_e \quad (191)$$

Analogie

$$U \iff \frac{\Delta p}{L} \quad (192)$$

$$I \iff \dot{V} \quad (193)$$

$$R_e \iff R_H = \frac{8\mu}{\pi R^4} \quad (194)$$

$$L_e \iff L_H = \frac{\rho}{\pi R^2} \quad (195)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

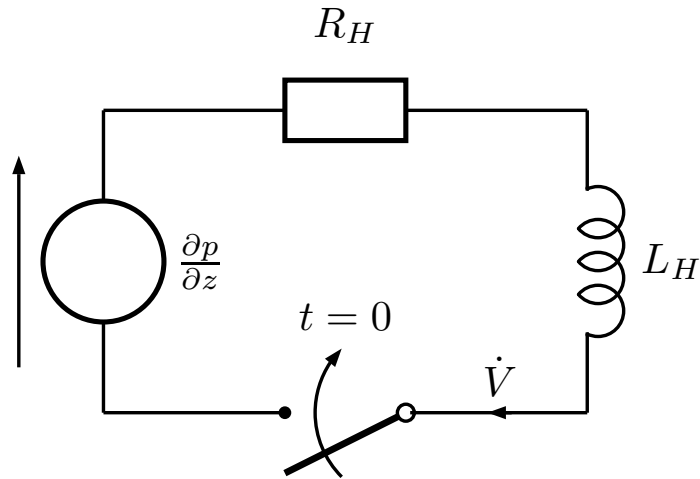
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Analogia mechaniczno-elektryczna



$$L_H \frac{d\dot{V}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \quad (196)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Równanie zachowania masy

Dla naczyń (przewodów) równanie zachowania masy przyjmuje postać

$$C_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = 0 \quad (197)$$

gdzie podatność hydrauliczna

$$C_H = \frac{d|S|}{dp} \quad (198)$$

Wzór Moensa-Kortewega dla prędkości fali tętna  $c$

$$c^2 C_H L_H = 1 \quad (199)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Równanie zachowania pędu

Równanie zachowania pędu dla naczyń

$$L_H \left( \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{2\dot{V}}{|S|} \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \left( 1 - \frac{\dot{V}^2}{|S|^2 c^2} \right) = -R_H \dot{V} \quad (200)$$

Linearyzacja

$$L_H \left( \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \cancel{\frac{2\dot{V}}{|S|} \frac{\partial \dot{V}}{\partial z}} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \left( 1 - \cancel{\frac{\dot{V}^2}{|S|^2 c^2}} \right) = -R_H \dot{V} \quad (201)$$

daje prostą postać

$$L_H \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \quad (202)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

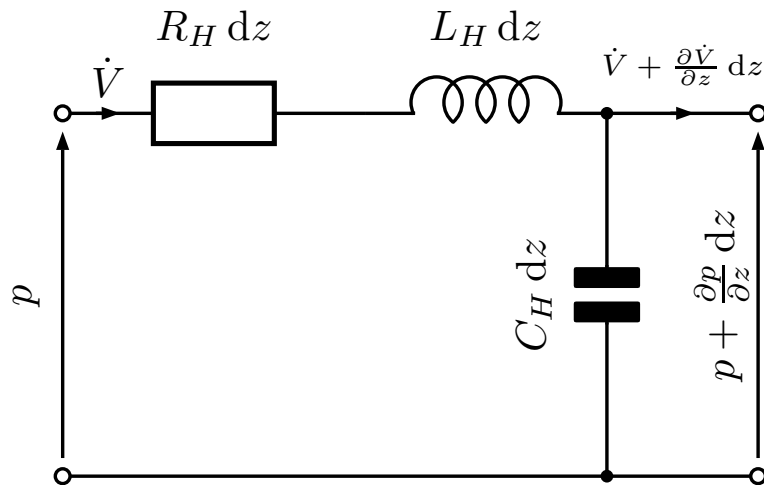
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Naczynie podatne



$$C_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = 0 \quad (203)$$

$$L_H \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \quad (204)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

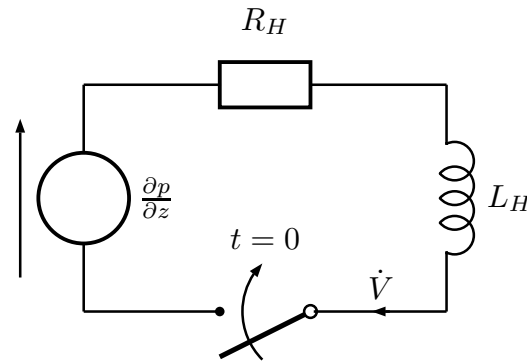
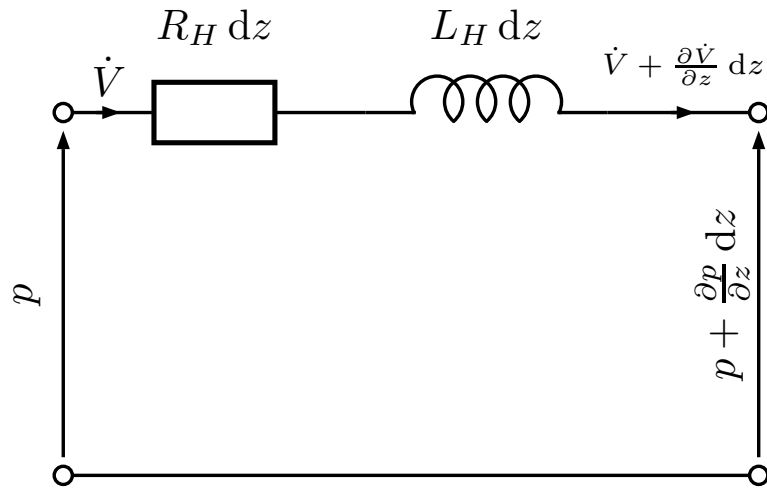
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Naczynie sztywne



$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = 0 \quad (205)$$

$$L_H \frac{d\dot{V}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \quad (206)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

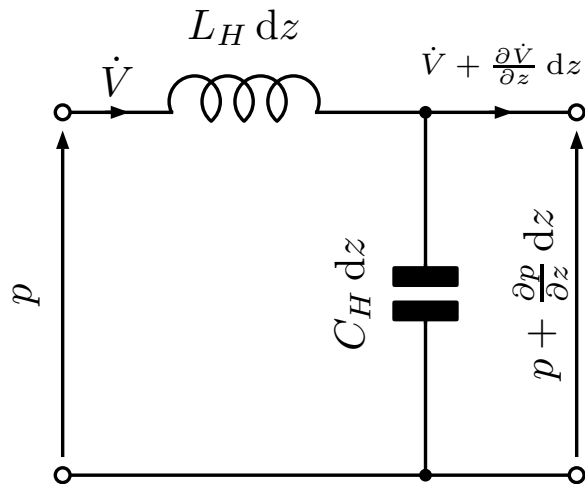
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Naczynie bezstratne



$$C_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = 0 \quad (207)$$

$$L_H \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (208)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

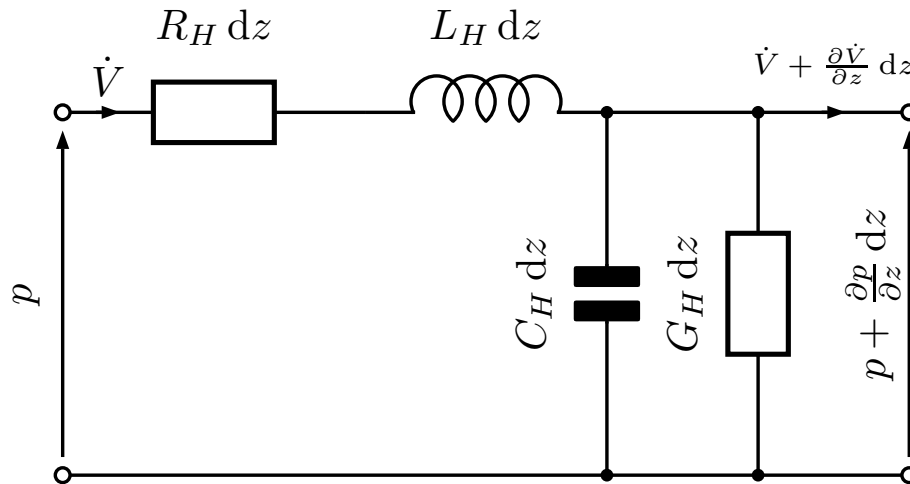
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Naczynie podatne z upływnością



$$C_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = -G_H p \quad (209)$$

$$L_H \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \quad (210)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Analogia mech.-elekt. – podsumowanie

$$U \iff \frac{\Delta p}{L}$$

$$I \iff \dot{V}$$

$$R_e \iff R_H = \frac{8\mu}{\pi R^4}$$

$$L_e \iff L_H = \frac{\rho}{\pi R^2}$$

$$C_e \iff C_H = \frac{d|S|}{dp}$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Sieci naczyń

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

**Sieci naczyń**

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

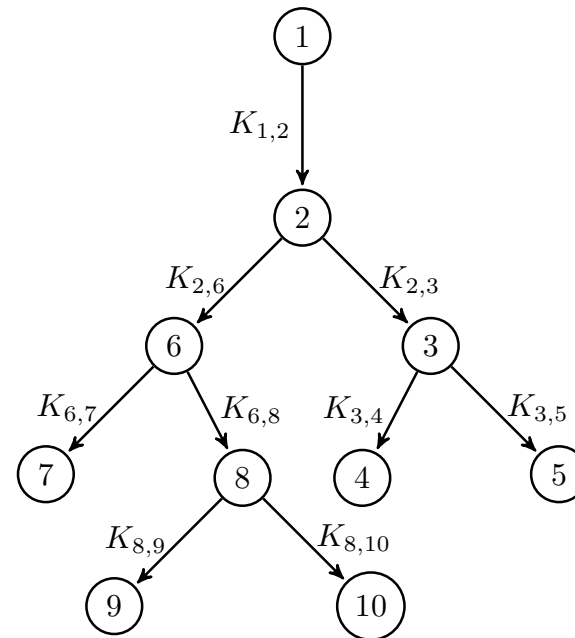
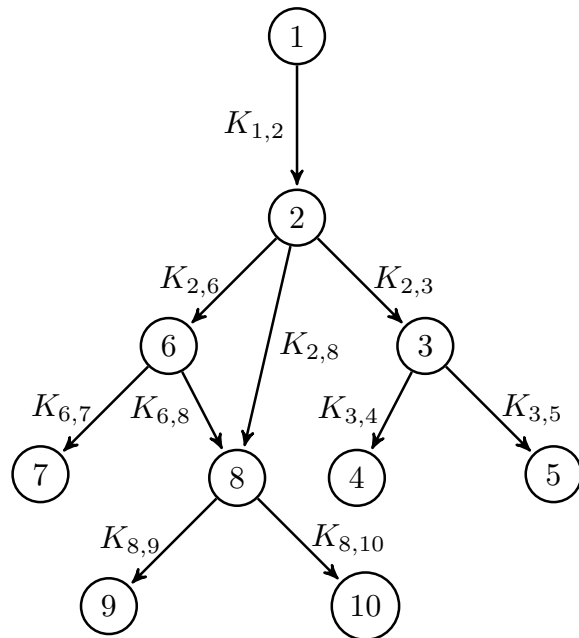
Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

- Sieci zamknięte
- Sieci otwarte



Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

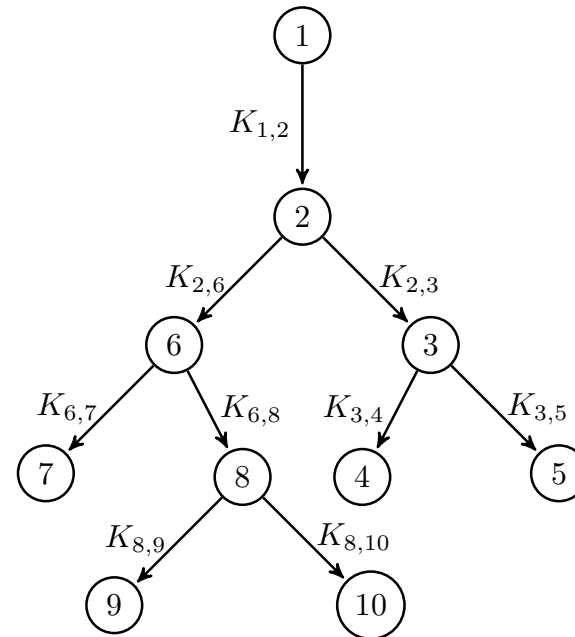
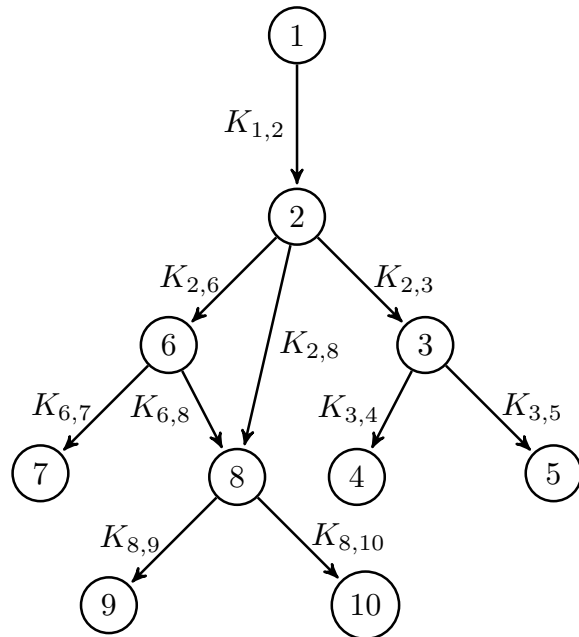
Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura



- Jakie są poszczególne natężenia przepływu?
- Jakie są poszczególne spadki ciśnień?
- Jakie są kierunki przepływu:
  - ◆ sieci zamknie?
  - ◆ sieci otwarte? Jednoznaczne!



Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Równanie Bernoulliego

## Równanie Bernoulliego

$$\left( \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) - \left( \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) = e_2 - e_1 \quad (211)$$

$$\left( \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left( \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = \underbrace{\sum_i \Delta h_{li}}_{\text{liniowe}} + \cancel{\underbrace{\sum_j \Delta h_{nj}}_{\text{lokalne}}} \quad (212)$$

- energia kinetyczna  $\frac{u^2}{2}$
- energia ciśnienia  $\frac{p}{\rho}$
- energia potencjalna  $gz$
- energia wewnętrzna  $e$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

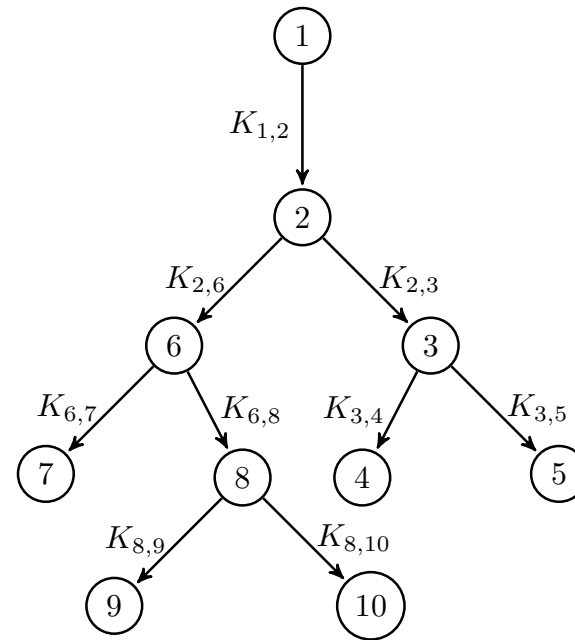
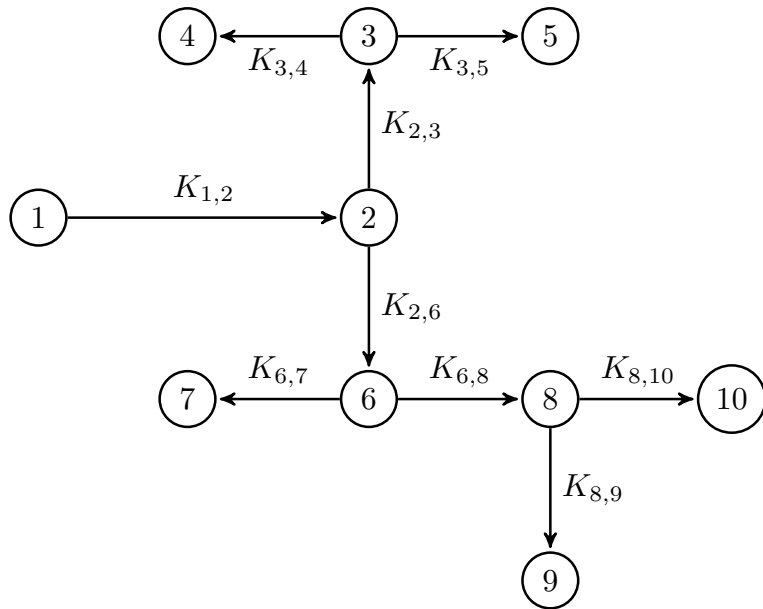
Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Wzajemna konfiguracja



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Równanie Darcy'ego-Weisbacha

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho u^2}{2} \quad (213)$$

bierze się z innego zapisu prędkości średniej

$$u = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L} = \frac{D^2 \Delta p}{32\mu L}; \quad \text{Re} = \frac{uD\rho}{\mu}; \quad \lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (214)$$

Straty liniowe

$$\Delta h_l = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g} = \frac{\lambda}{S^2} \frac{L}{D} \frac{\dot{V}^2}{2g} = K \dot{V}^2 \quad (215)$$

gdzie

$$K = \frac{8\lambda L}{\pi^2 D^5 g} \quad (216)$$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

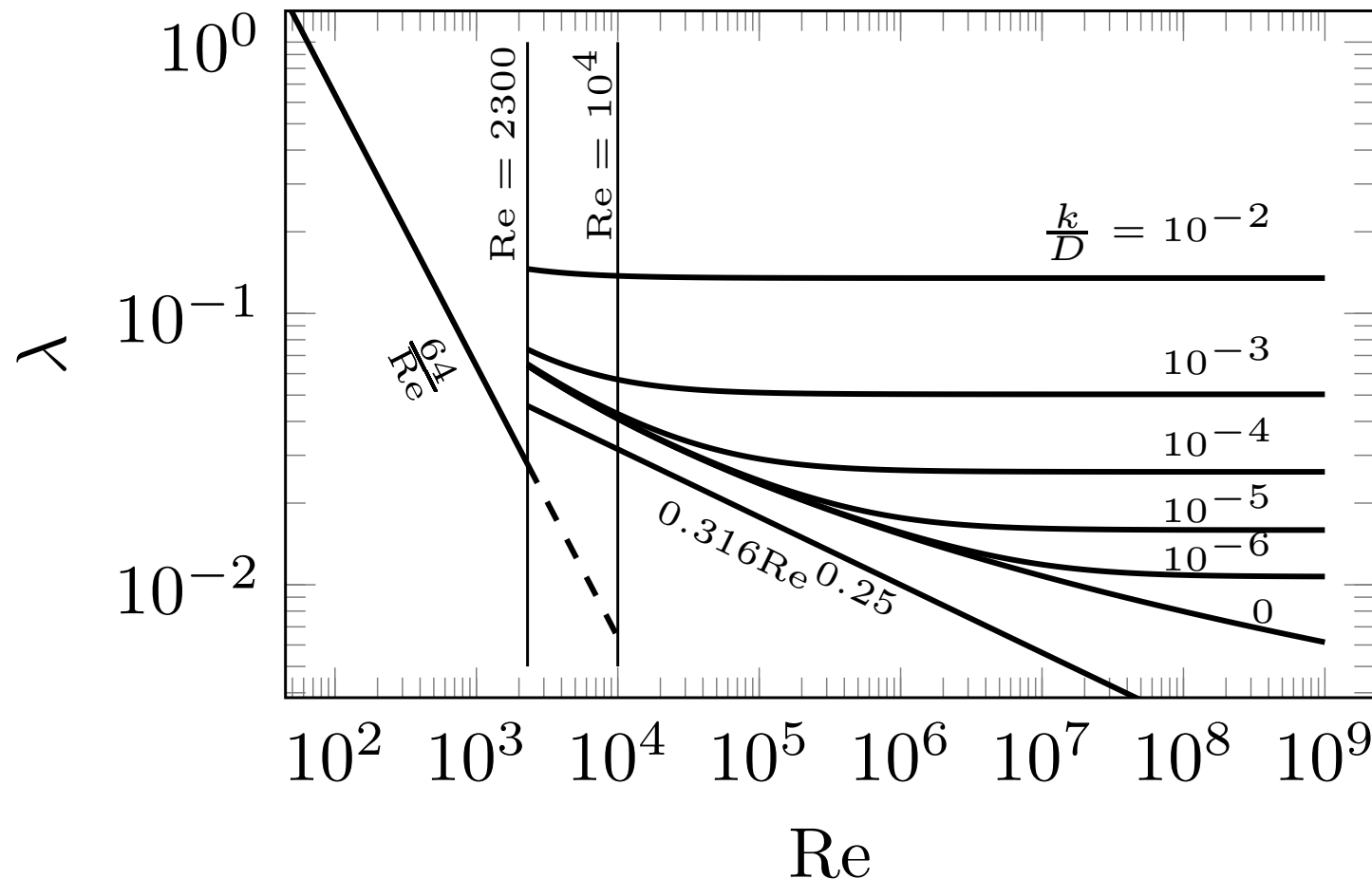
Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Straty liniowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

## ■ Spadek ciśnienia

$$\Delta h_{i,j} = h_i - h_j = K_{i,j} \dot{V}_{i,j}^2 \quad (217)$$

## ■ Równanie zachowania masy

$$\sum_i \dot{V}_{i \text{ in}} = \sum_j \dot{V}_{j \text{ out}} \quad (218)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

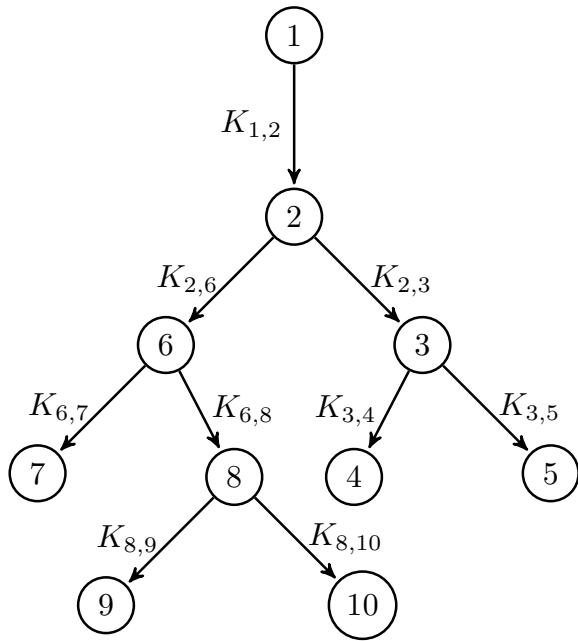
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Układ równań nieliniowych

$H_2, H_3, H_6, H_8$       =?  
 $\dot{V}_{1,2}, \dot{V}_{2,3}, \dot{V}_{3,4}, \dot{V}_{3,5},$   
 $\dot{V}_{2,6}, \dot{V}_{6,7}, \dot{V}_{6,8}, \dot{V}_{8,9},$   
 $\dot{V}_{8,10}$                       =?



$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 =$   
 $H_{10} = 0$   
 $H_1$  znane

$$\dot{V}_{1,2} = \dot{V}_{2,6} + \dot{V}_{2,3} \quad (219a)$$

$$\dot{V}_{2,6} = \dot{V}_{6,7} + \dot{V}_{6,8} \quad (219b)$$

$$\dot{V}_{6,8} = \dot{V}_{8,9} + \dot{V}_{8,10} \quad (219c)$$

$$\dot{V}_{2,3} = \dot{V}_{3,4} + \dot{V}_{3,5} \quad (219d)$$

$$H_1 - H_2 = K_{1,2} \dot{V}_{1,2}^2 \quad (219e)$$

$$H_2 - H_3 = K_{2,3} \dot{V}_{2,3}^2 \quad (219f)$$

$$H_2 - H_6 = K_{2,6} \dot{V}_{2,6}^2 \quad (219g)$$

$$H_3 = K_{3,4} \dot{V}_{3,4}^2 \quad (219h)$$

$$H_3 = K_{3,5} \dot{V}_{3,5}^2 \quad (219i)$$

$$H_6 = K_{6,7} \dot{V}_{6,7}^2 \quad (219j)$$

$$H_6 - H_8 = K_{6,8} \dot{V}_{6,8}^2 \quad (219k)$$

$$H_8 = K_{8,9} \dot{V}_{8,9}^2 \quad (219l)$$

$$H_8 = K_{8,10} \dot{V}_{8,10}^2 \quad (219m)$$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

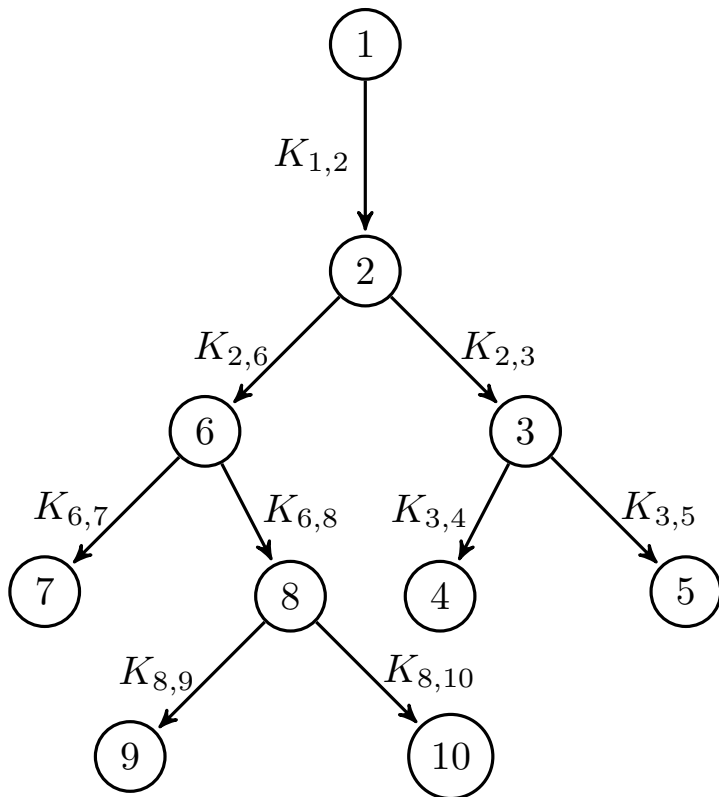
Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura



N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Out
1		1									1
2			1			1					2
3				1	1						2
4											0
5											0
6								1	1		2
7											0
8									1	1	2
9											0
10											0
In	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

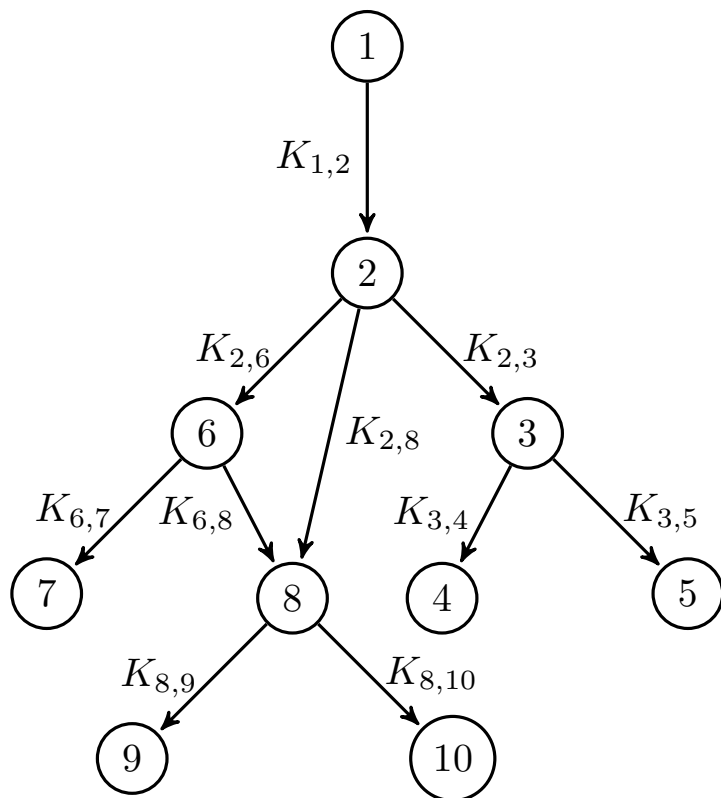
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura





N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Out
1		1									1
2			1			1		1			3
3				1	1						2
4											0
5											0
6								1	1		2
7											0
8									1	1	2
9											0
10											0
In	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1	

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

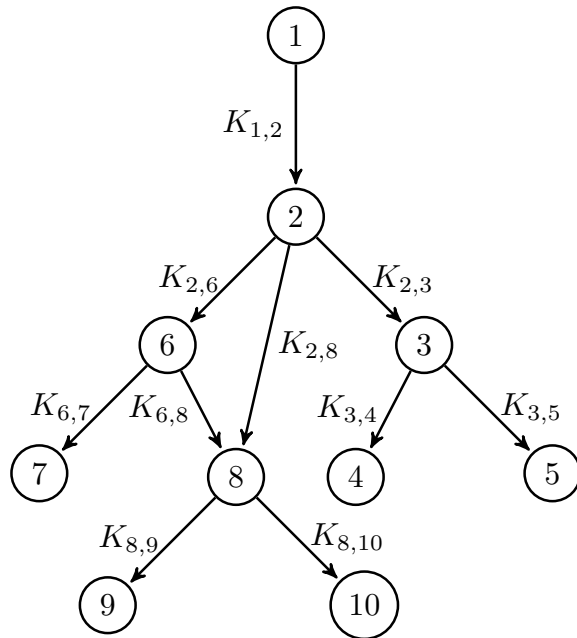
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Układ równań nieliniowych

$H_2, H_3, H_6, H_8$       =?  
 $\dot{V}_{1,2}, \dot{V}_{2,3}, \dot{V}_{3,4}, \dot{V}_{3,5},$   
 $\dot{V}_{2,6}, \dot{V}_{6,7}, \dot{V}_{6,8}, \dot{V}_{8,9},$   
 $\dot{V}_{8,10}, \dot{V}_{2,8}$       =?



$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 =$   
 $H_{10} = 0$   
 $H_1$  znane

$$\dot{V}_{1,2} = \dot{V}_{2,6} + \dot{V}_{2,3} + \dot{V}_{2,8} \quad (220a)$$

$$\dot{V}_{2,6} = \dot{V}_{6,7} + \dot{V}_{6,8} \quad (220b)$$

$$\dot{V}_{6,8} + \dot{V}_{2,8} = \dot{V}_{8,9} + \dot{V}_{8,10} \quad (220c)$$

$$\dot{V}_{2,3} = \dot{V}_{3,4} + \dot{V}_{3,5} \quad (220d)$$

$$H_1 - H_2 = K_{1,2} \dot{V}_{1,2}^2 \quad (220e)$$

$$H_2 - H_3 = K_{2,3} \dot{V}_{2,3}^2 \quad (220f)$$

$$H_2 - H_6 = K_{2,6} \dot{V}_{2,6}^2 \quad (220g)$$

$$H_3 = K_{3,4} \dot{V}_{3,4}^2 \quad (220h)$$

$$H_3 = K_{3,5} \dot{V}_{3,5}^2 \quad (220i)$$

$$H_6 = K_{6,7} \dot{V}_{6,7}^2 \quad (220j)$$

$$H_6 - H_8 = K_{6,8} \dot{V}_{6,8}^2 \quad (220k)$$

$$H_8 = K_{8,9} \dot{V}_{8,9}^2 \quad (220l)$$

$$H_8 = K_{8,10} \dot{V}_{8,10}^2 \quad (220m)$$

$$H_2 - H_8 = K_{2,8} \dot{V}_{2,8}^2 \quad (220n)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

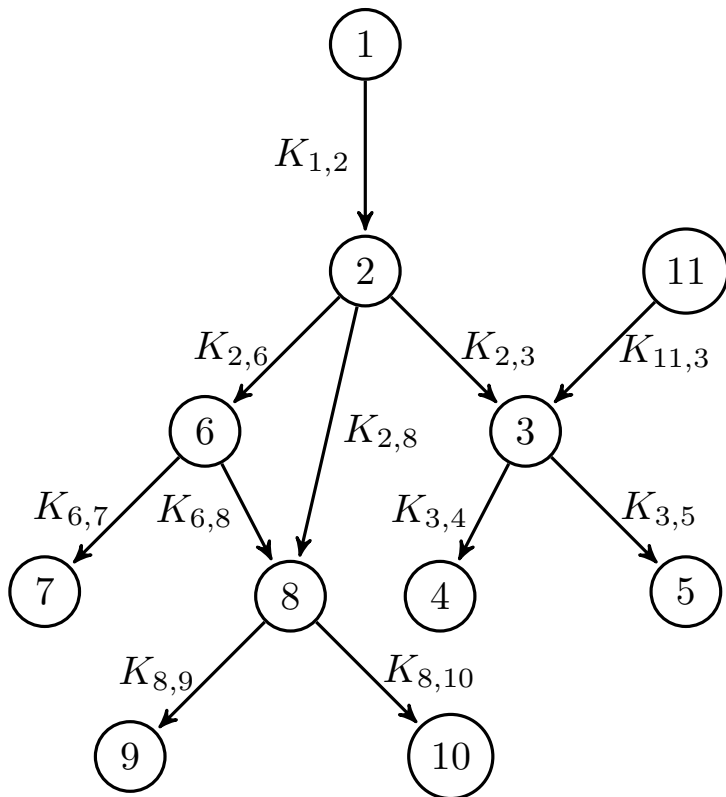
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Out
1		1										1
2			1			1		1				3
3				1	1							2
4												0
5												0
6								1	1			2
7												0
8										1	1	2
9												0
10												0
11			1									1
In	0	1	2	1	1	1	1	2	1	1	0	

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

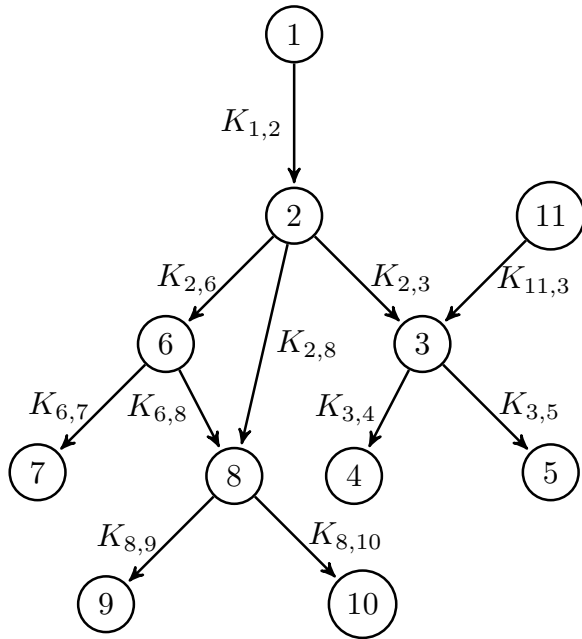
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Układ równań nieliniowych

$H_2, H_3, H_6, H_8$       =?  
 $\dot{V}_{1,2}, \dot{V}_{2,3}, \dot{V}_{3,4}, \dot{V}_{3,5},$   
 $\dot{V}_{2,6}, \dot{V}_{6,7}, \dot{V}_{6,8}, \dot{V}_{8,9},$   
 $\dot{V}_{8,10}, \dot{V}_{2,8}, \dot{V}_{11,3}$       =?



$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 =$   
 $H_{10} = 0$   
 $H_1, H_{11}$  znane

$$\dot{V}_{1,2} = \dot{V}_{2,6} + \dot{V}_{2,3} + \dot{V}_{2,8} \quad (221a)$$

$$\dot{V}_{2,6} = \dot{V}_{6,7} + \dot{V}_{6,8} \quad (221b)$$

$$\dot{V}_{6,8} + \dot{V}_{2,8} = \dot{V}_{8,9} + \dot{V}_{8,10} \quad (221c)$$

$$\dot{V}_{2,3} + \dot{V}_{11,3} = \dot{V}_{3,4} + \dot{V}_{3,5} \quad (221d)$$

$$H_1 - H_2 = K_{1,2} \dot{V}_{1,2}^2 \quad (221e)$$

$$H_2 - H_3 = K_{2,3} \dot{V}_{2,3}^2 \quad (221f)$$

$$H_2 - H_6 = K_{2,6} \dot{V}_{2,6}^2 \quad (221g)$$

$$H_3 = K_{3,4} \dot{V}_{3,4}^2 \quad (221h)$$

$$H_3 = K_{3,5} \dot{V}_{3,5}^2 \quad (221i)$$

$$H_6 = K_{6,7} \dot{V}_{6,7}^2 \quad (221j)$$

$$H_6 - H_8 = K_{6,8} \dot{V}_{6,8}^2 \quad (221k)$$

$$H_8 = K_{8,9} \dot{V}_{8,9}^2 \quad (221l)$$

$$H_8 = K_{8,10} \dot{V}_{8,10}^2 \quad (221m)$$

$$H_2 - H_8 = K_{2,8} \dot{V}_{2,8}^2 \quad (221n)$$

$$H_{11} - H_3 = K_{11,3} \dot{V}_{11,3}^2 \quad (221o)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Prawa Murraya

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

**Prawa Murraya**

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

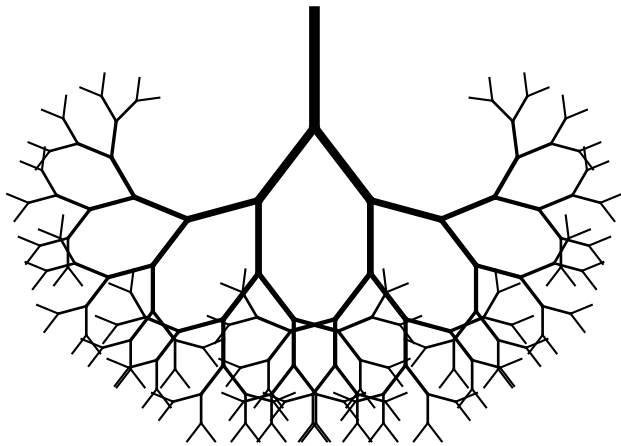
Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

Prawa Murraya opisują sposób w jaki większe naczynia rozgałęzają się na mniejsze lub odwrotnie. Sposób rozgałęziania się, związany jest z założeniem optymalnego układu, który zapewnia najszybszy transport przy najmniejszej włożonej pracy. Prawa te związane są z drzewiastą strukturą połączeń naczyń.



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

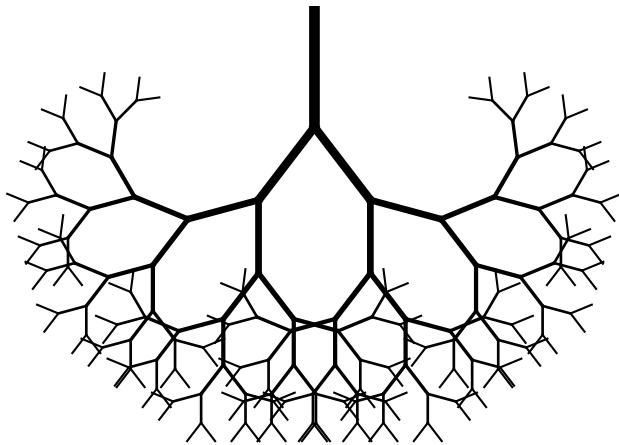
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Prawa Murraya dotyczą

- promieni przed i po rozgałęzieniu
- kątów rozgałęzienia



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Prawo Murraya o promieniach

Wyróżnić można dwa rodzaje energii, które mają swój udział w podtrzymywaniu przepływu krwi:

- energia potrzebna do pokonania oporów związanych z lepkością – energia dyssypacji, wyrażona przez moc dyssypacji

$$N_d = \dot{V} \Delta p = \frac{A \dot{V}^2}{R^4} \quad (222)$$

gdzie  $A = 8\mu L\pi^{-1}$

- energią do utrzymania objętości krwi w naczyniach, która wyrażona jest przez moc

$$N_m = mV = m\pi R^2 L = B R^2 \quad (223)$$

gdzie  $B = \pi Lm$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Prawo Murraya o promieniach

- moc dyssypacji

$$N_d = \dot{V} \Delta p = \frac{A \dot{V}^2}{R^4} \quad (224)$$

- moc 'metaboliczna'

$$N_m = mV = m\pi R^2 L = B R^2 \quad (225)$$

Może istnieć jakiś promień  $R$  pośredni, który zminimalizuje sumę obu mocy

$$N = N_d + N_m = \frac{A \dot{V}^2}{R^4} + B R^2 \quad (226)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Prawo Murraya o promieniach

Moc całkowita

$$N = N_d + N_m = \frac{A\dot{V}^2}{R^4} + B R^2 \quad (227)$$

Warunek konieczny ekstremum

$$N'(R) = 0 = -\frac{4A\dot{V}^2}{R^5} + 2B R \quad (228)$$

daje

$$\dot{V}^2 = \frac{B}{2A} R^6, \quad \dot{V} = C R^3 \quad (229)$$

Druga pochodna sugeruje minimum

$$N''(R) = \frac{20A\dot{V}^2}{R^6} + 2B \geq 0 \quad (230)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Prawo Murraya o promieniach

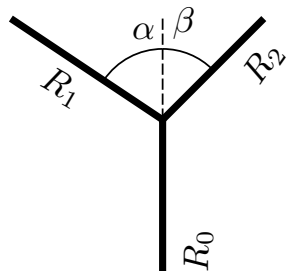
Warunek konieczny

$$\dot{V} = C R^3 \quad (231)$$

i równanie zachowania masy

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (232)$$

dają prawo Murraya o promieniach



$$R_0^3 = R_1^3 + R_2^3 \quad (233)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

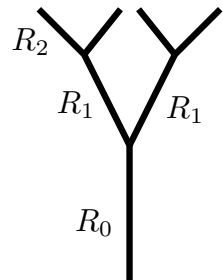
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Prawo Murraya o promieniach – wnioski

Dla symetrycznych bifurkacji  $R_1 = R_2$  mamy


$$R_0^3 = 2R_1^3 \quad (234)$$

czyli

$$\frac{R_0}{R_1} = 2^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{R_0}{R_2} = 2^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{R_0}{R_n} = 2^{\frac{n}{3}} \quad (235)$$

Możemy wyznaczyć liczbę rozgałęzień dla  $\frac{R_0}{R_n} \approx 1500$

$$n = \frac{3 \ln \frac{R_0}{R_n}}{\ln 2} = \frac{3 \ln 1500}{\ln 2} \approx 31 \quad (236)$$

Ponieważ jest  $2^n$  bifurkacji, więc możemy szacować liczbę naczyń na  $2^{31} \approx 10^9$

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

# 'Turbulentne' prawo Murraya o promieniach

Moc 'metaboliczna' jest taka sama, ale spadek ciśnienia w mocy dyssypacji

$$N_d = \dot{V} \Delta p \quad (237)$$

nie może być wyrażony za pomocą prawa Poiseuille'a. Mam za to wzór Darcy'ego-Weisbacha

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{2R} \frac{\rho u^2}{2} \quad (238)$$

gdzie

$$\lambda = g \operatorname{Re}^{-k} \quad (239)$$

gdzie  $k = 1$  dla przepływu laminarnego i  $k = 0$  dla przepływu turbulentnego w pełni rozwiniętego

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# 'Turbulentne' prawo Murraya o promieniach

- moc dyssypacji

$$N_d = \dot{V} \Delta p = \frac{A \dot{V}^{3-k}}{R^{5-k}} \quad (240)$$

- moc 'metaboliczna'

$$N_m = B R^2 \quad (241)$$

Może istnieć jakiś promień  $R$  pośredni, który zminimalizuje sumę obu mocy

$$N = N_d + N_m = \frac{A \dot{V}^{3-k}}{R^{5-k}} + B R^2 \quad (242)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# 'Turbulentne' prawo Murraya o promieniach

Moc całkowita

$$N = N_d + N_m = \frac{A \dot{V}^{3-k}}{R^{5-k}} + B R^2 \quad (243)$$

Warunek konieczny ekstremum

$$N'(R) = 0 = -\frac{A(5-k)\dot{V}^{3-k}}{R^{6-k}} + 2B R \quad (244)$$

daje

$$\dot{V}^{3-k} = \frac{2B}{A(5-k)} R^{7-k}, \quad \dot{V} = C R^{\frac{7-k}{3-k}} \quad (245)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# 'Turbulentne' prawo Murraya o promieniach

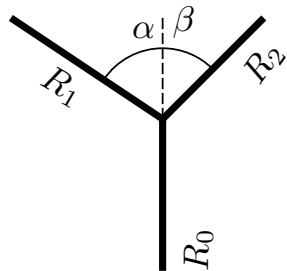
Warunek konieczny

$$\dot{V} = C R^{\frac{7-k}{3-k}} \quad (246)$$

i równanie zachowania masy

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (247)$$

dają 'turbulentne' prawo Murraya o promieniach



$$R_0^{\frac{7-k}{3-k}} = R_1^{\frac{7-k}{3-k}} + R_2^{\frac{7-k}{3-k}} \quad (248)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

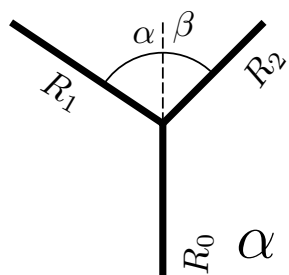
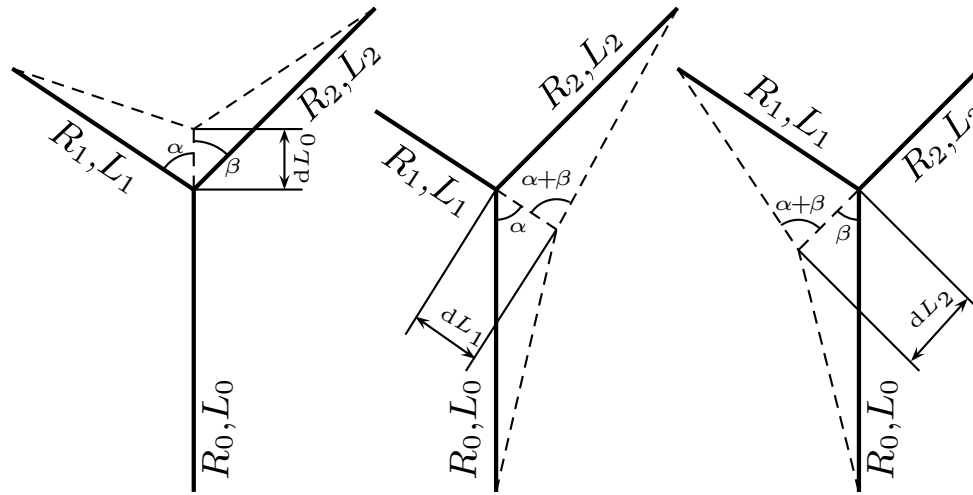
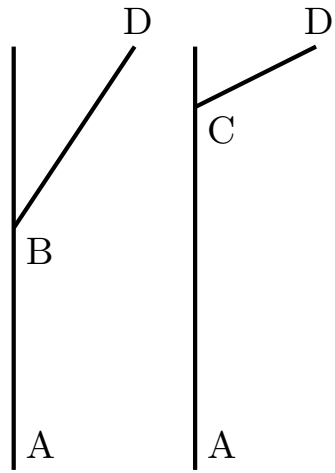
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Prawo Murraya o kątach



$$\alpha = \arccos \frac{R_0^4 + R_1^4 - (R_0^3 - R_1^3)^{\frac{4}{3}}}{2R_0^2 R_1^2} \quad (249)$$

$$\alpha + \beta = \arccos \frac{(R_1^3 + R_2^3)^{\frac{4}{3}} - R_1^4 - R_2^4}{2R_1^2 R_2^2} \quad (250)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

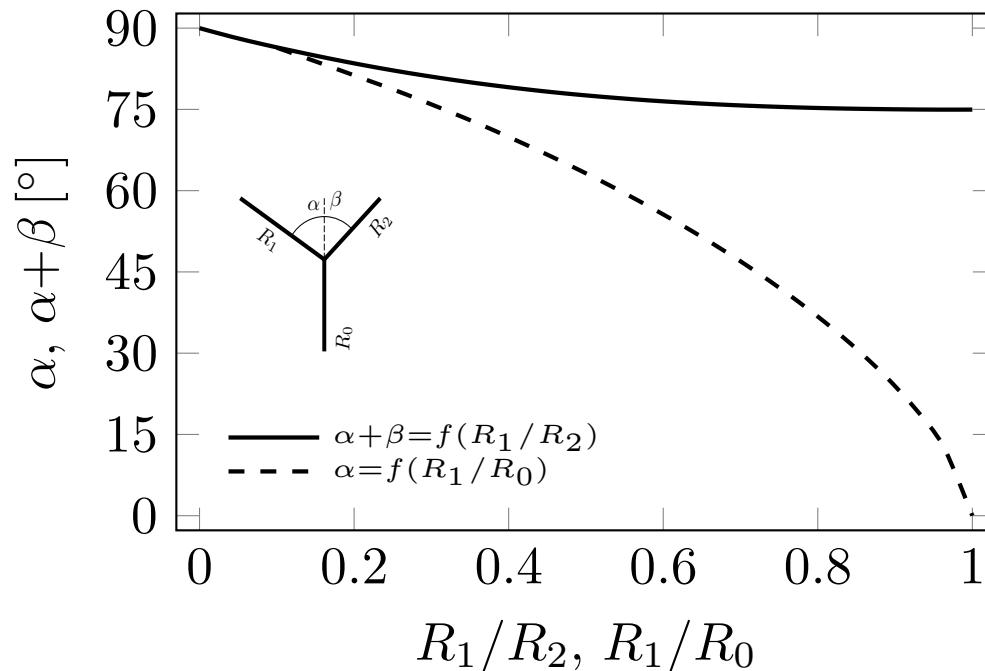
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Prawo Murraya o kątach



$$\alpha = \arccos \frac{R_0^4 + R_1^4 - (R_0^3 - R_1^3)^{\frac{4}{3}}}{2R_0^2 R_1^2} \quad (251)$$

$$\alpha + \beta = \arccos \frac{(R_1^3 + R_2^3)^{\frac{4}{3}} - R_1^4 - R_2^4}{2R_1^2 R_2^2} \quad (252)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

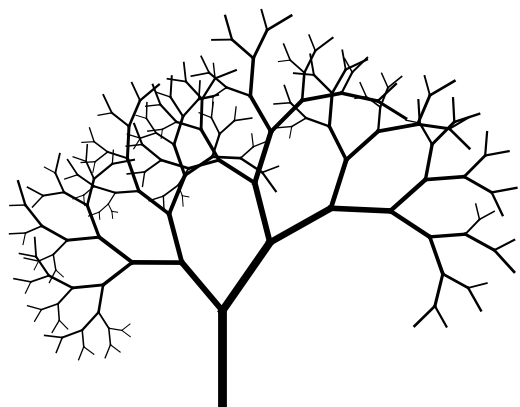
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

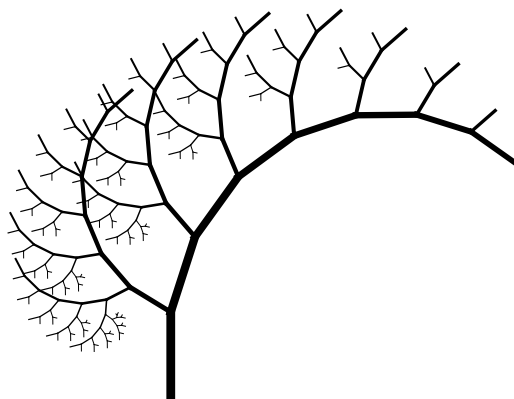
Laboratorium

Literatura

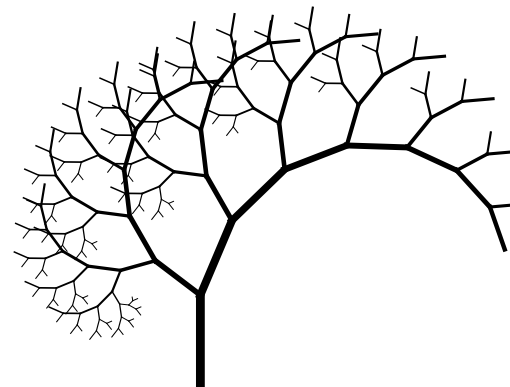
# Prawa Murraya – przykłady



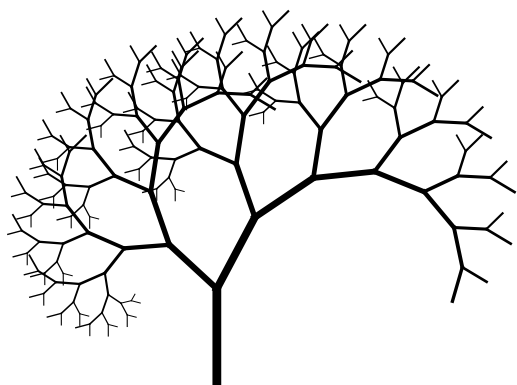
Losowe  $\frac{R_1}{R_2}$



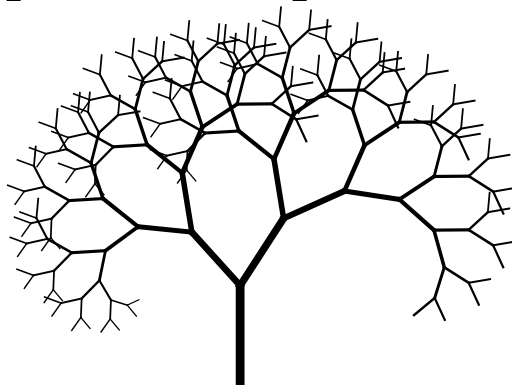
$\frac{R_1}{R_2} = 0.6$



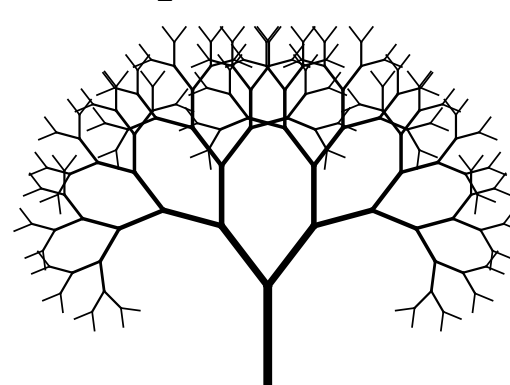
$\frac{R_1}{R_2} = 0.7$



$\frac{R_1}{R_2} = 0.8$



$\frac{R_1}{R_2} = 0.9$



$\frac{R_1}{R_2} = 1$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Prawa Murraya – podsumowanie

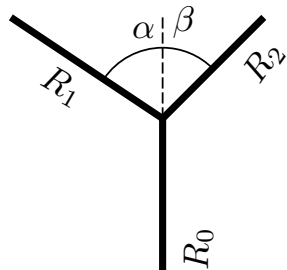
- prawo o promieniach

$$R_0^{\frac{7-k}{3-k}} = R_1^{\frac{7-k}{3-k}} + R_2^{\frac{7-k}{3-k}} \quad (253)$$

dla przepływu laminarnego  $k = 1$ , a dla w pełni turbulentnego  $k = 0$

- prawo o kątach

$$\alpha = \arccos \frac{R_0^4 + R_1^4 - (R_0^3 - R_1^3)^{\frac{4}{3}}}{2R_0^2 R_1^2} \quad (254)$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

**Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi**

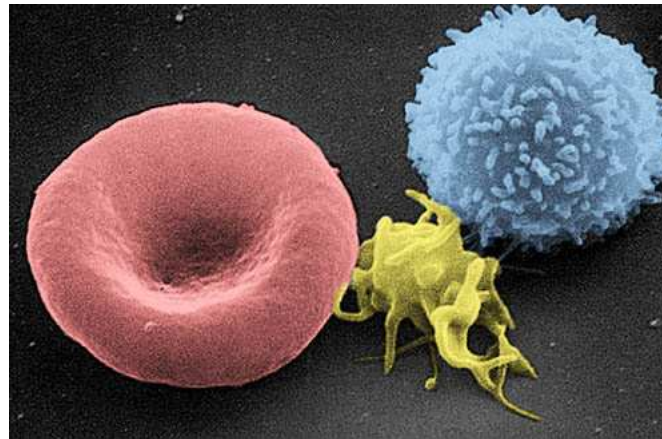
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

- Lepkość plazmy
- Hematokryt
- Odształcalność czerwonych krwinek
- Agregacja czerwonych krwinek
- Wpływ temperatury na lepkość krwi
- Granica płynięcia
- Tiksotropia
- Fluktuacje termiczne membrany krwinek



[www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

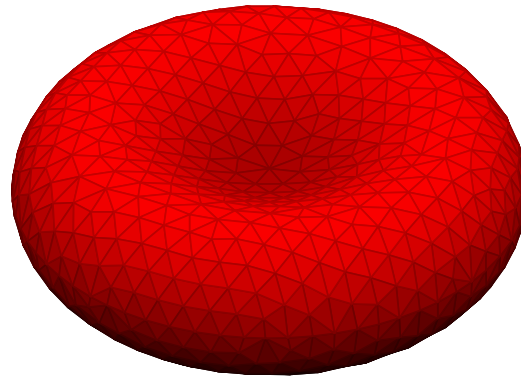
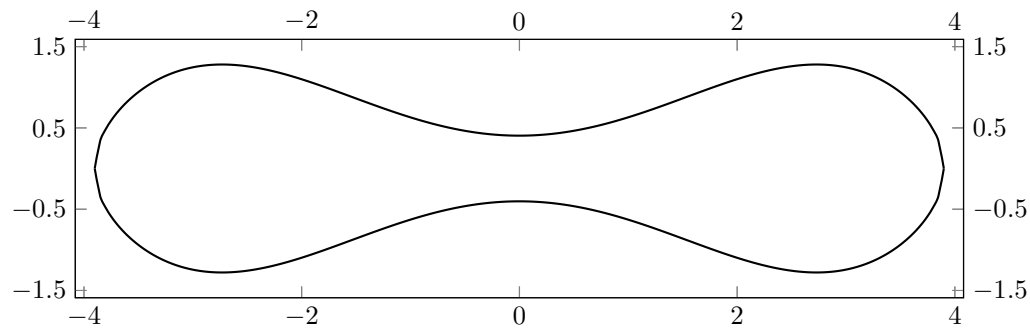
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Średni kształt czerwonej krwinki można aproksymować następującym wzorem

$$f(x, y) = D_0 \sqrt{1 - \frac{4(x^2 + y^2)}{D_0^2} \left( a_0 + a_1 \frac{x^2 + y^2}{D_0^2} + a_2 \frac{(x^2 + y^2)^2}{D_0^4} \right)}$$



Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

Literatura

Ruch płynu może być opisany modelami w zależności od poziomach skal:

## ■ Mikroskopowych

- ◆ Dynamika molekularna
- ◆ Metody Monte Carlo

## ■ Mezoskopowych

- ◆ Metoda siatkowa Boltzmannna
- ◆ Metoda cząstek dyssypatywnych
- ◆ Dynamika Browna
- ◆ Hydrodynamika wygładzonych cząstek

## ■ Makroskopowych (kontinuum)

- ◆ Klasyczna mechanika płynów

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

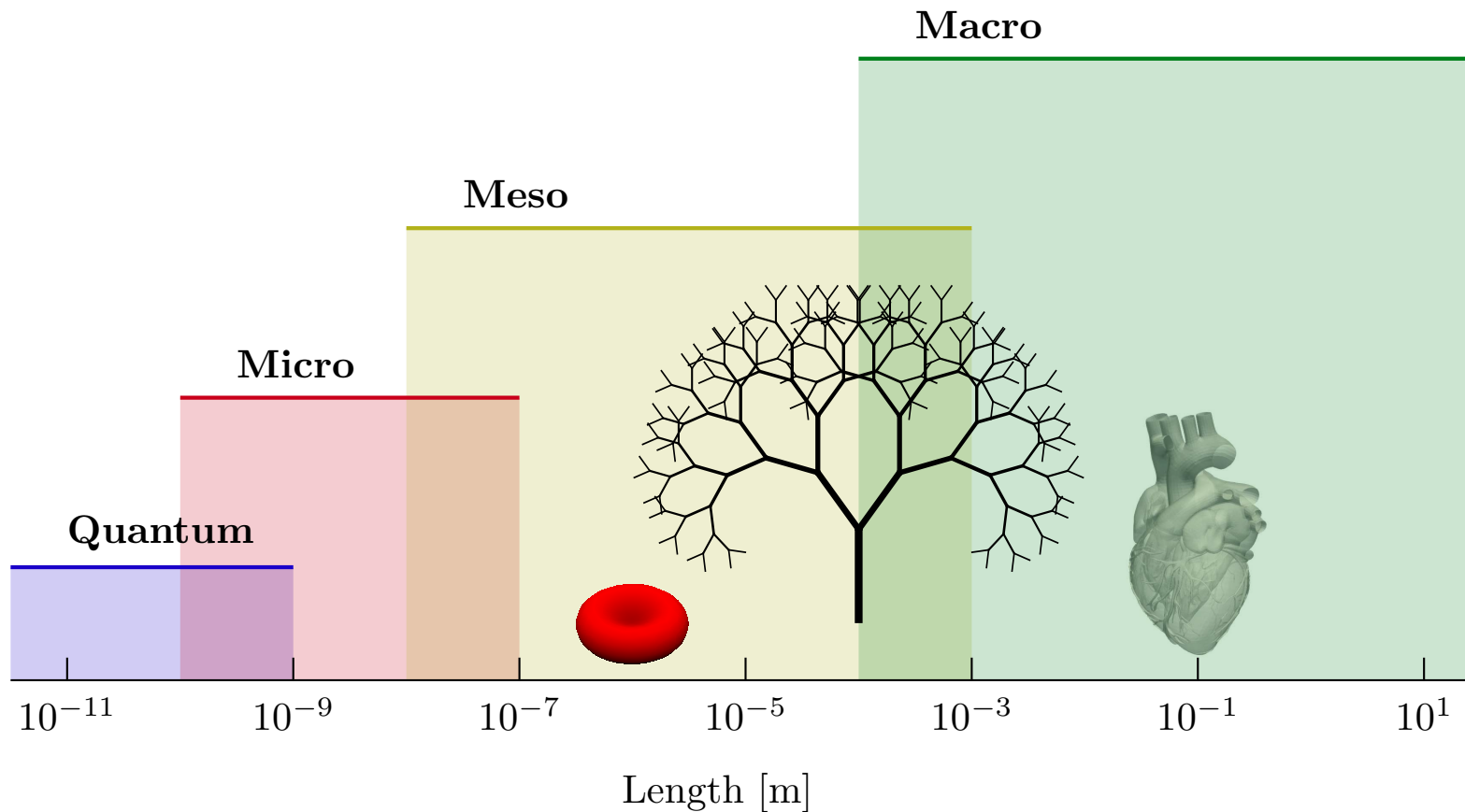
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Różne skale



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

- Makroskopowy (kontinuum) – wymiar  $> 100\mu m$ 
  - ◆ newtonowskie – średnica  $> 1mm$
  - ◆ nienewtonowskie –  $1mm > \text{średnica} > 100\mu m$
- Mezoskopowy – średnica  $< 100\mu m$ . Potrzebne jest bezpośrednie modelowanie czerwonych krwinek dla naczyń o promieniu mniejszym niż  $100\mu m$ .

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

- Jednofazowe
  - ◆ newtonowski
  - ◆ nienewtonowskie
- Wielofazowe
  - ◆ transport pasywny
    - Sztywne RBC
    - Podatne RBC
  - ◆ transport aktywny (interakcja płyn-ciało stałe – FSI)
    - Sztywne RBC
    - Podatne RBC

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

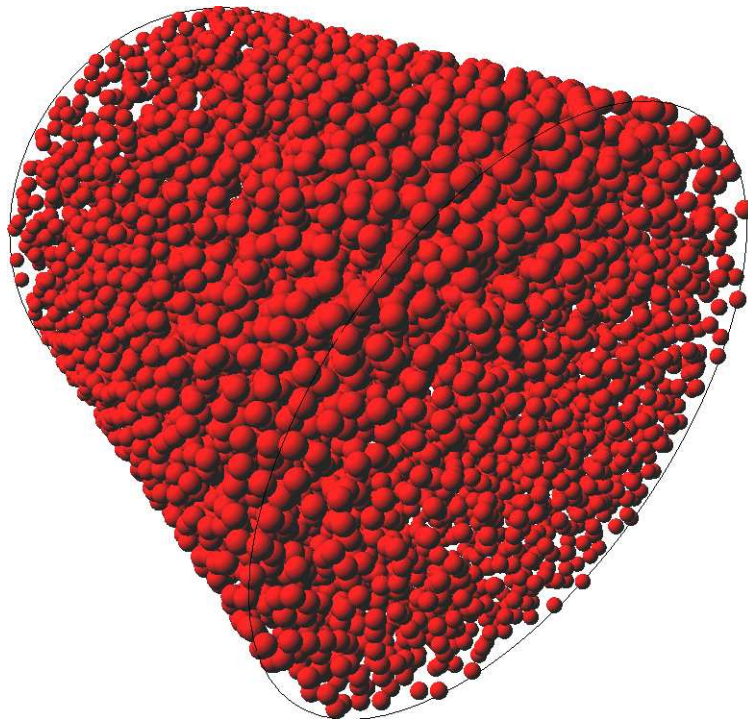
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Przykład – transport pasywny

Przykładowa symulacja transporty pasywnego sztywnej krwinki w przepływie Hagen-Poiseuille'a. Model semi-ciąły z dyskretnymi krwinkami i ciągłym płynem.



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (255)$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (256)$$

Wzór na lepkość według wybranego modelu:

■ newtonowski

$$\mu = \text{const} \quad (257)$$

■ nienewtonowski

$$\mu = f(\gamma) \quad (258)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

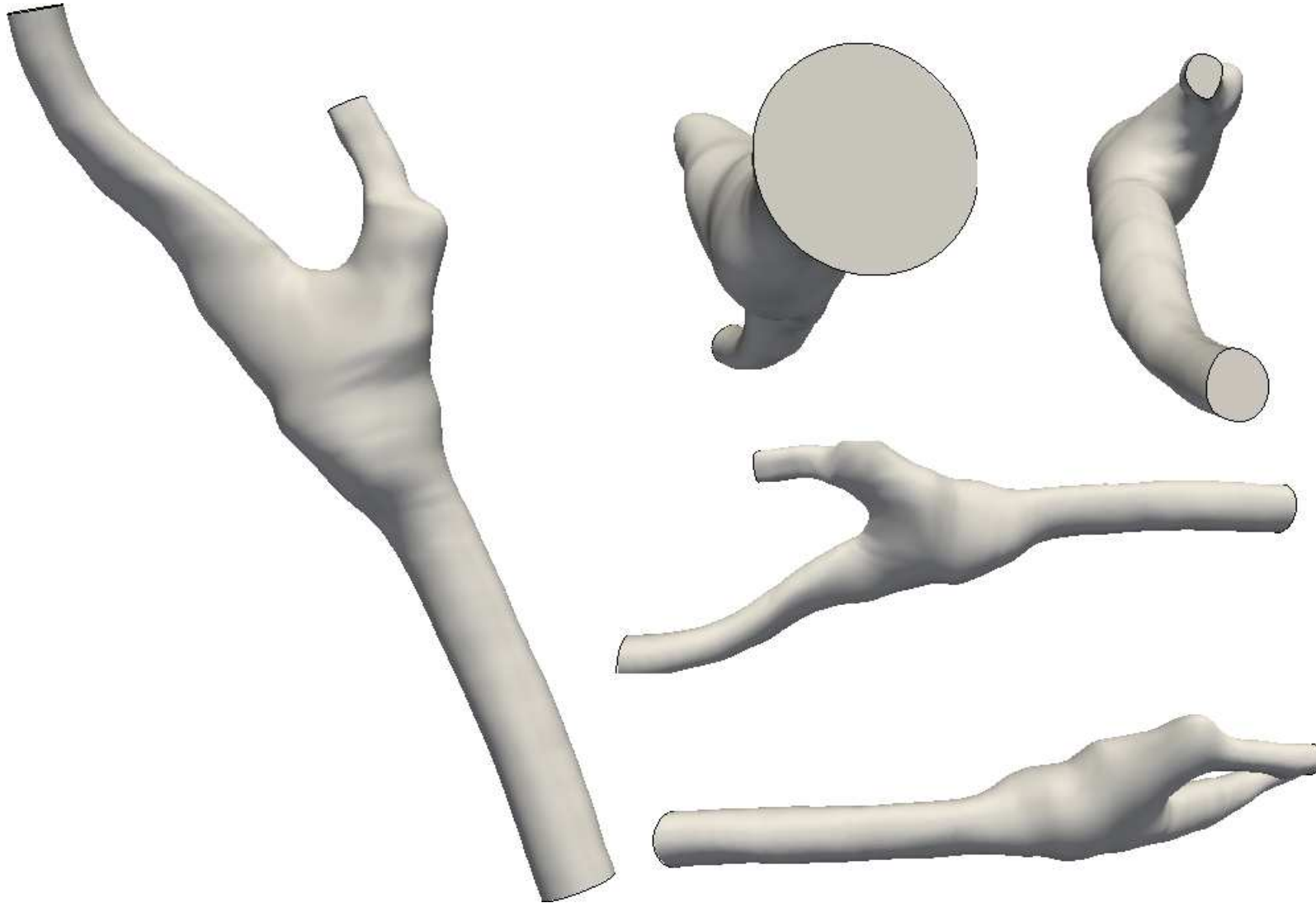
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

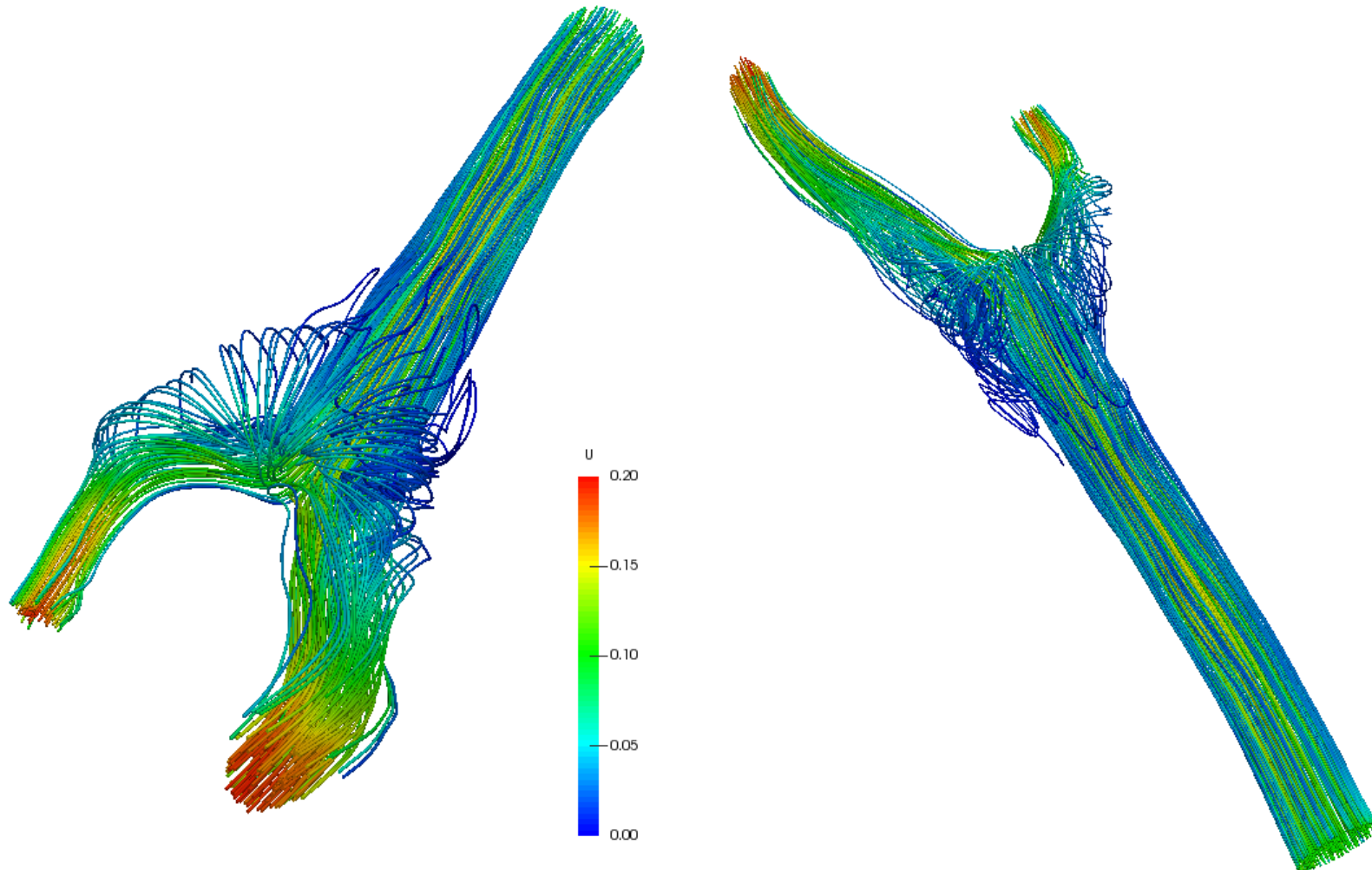
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

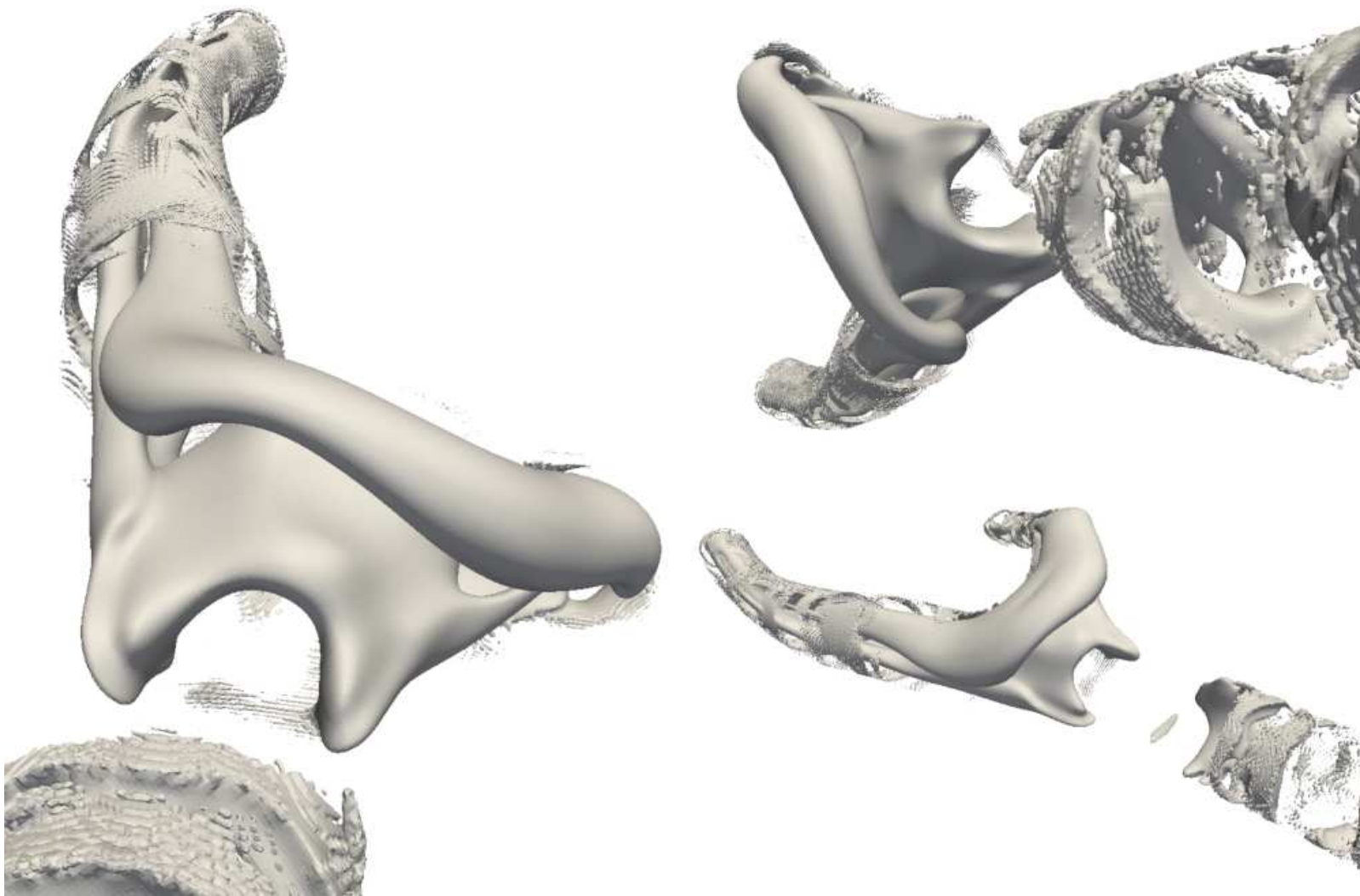
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

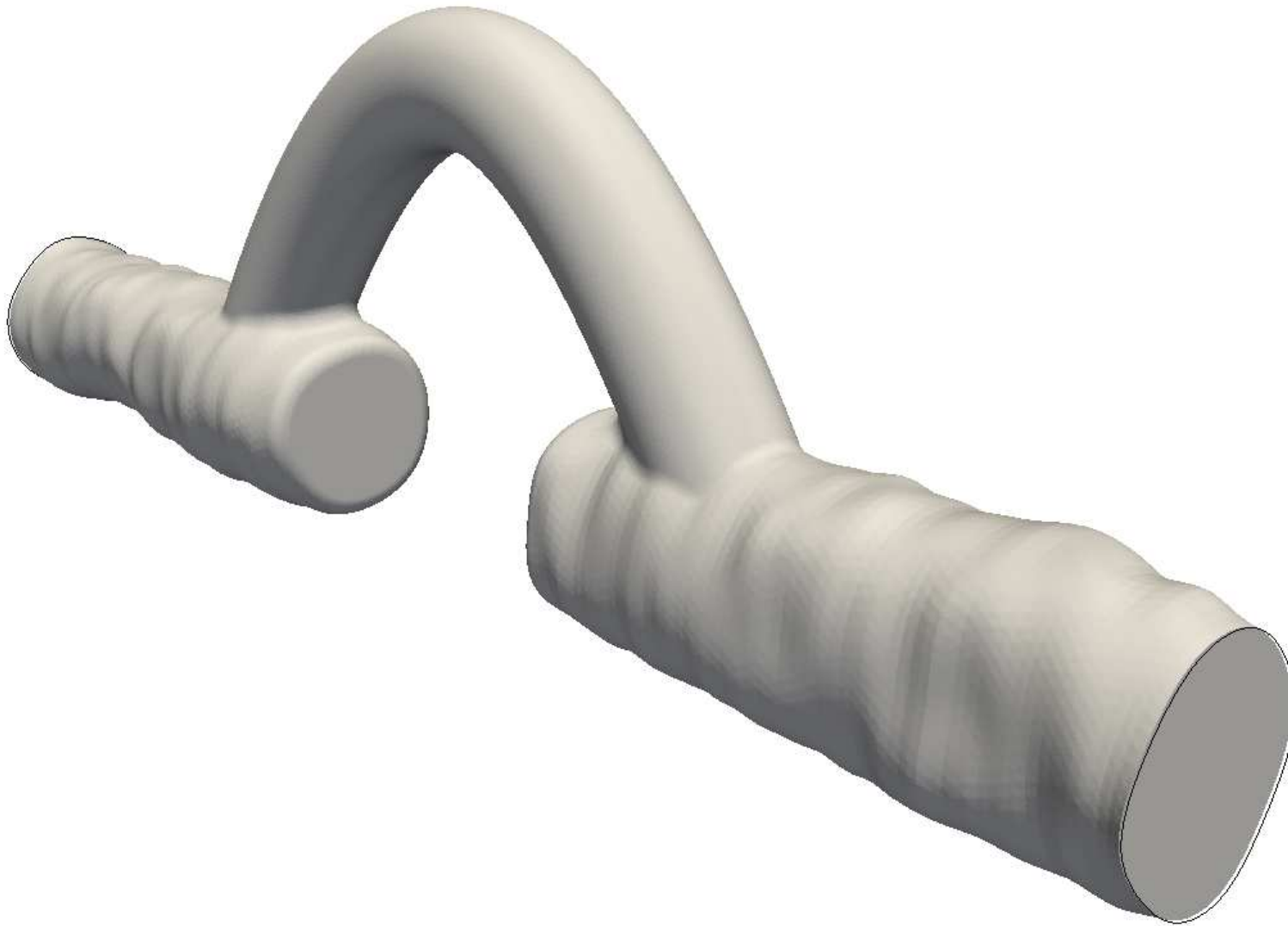
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

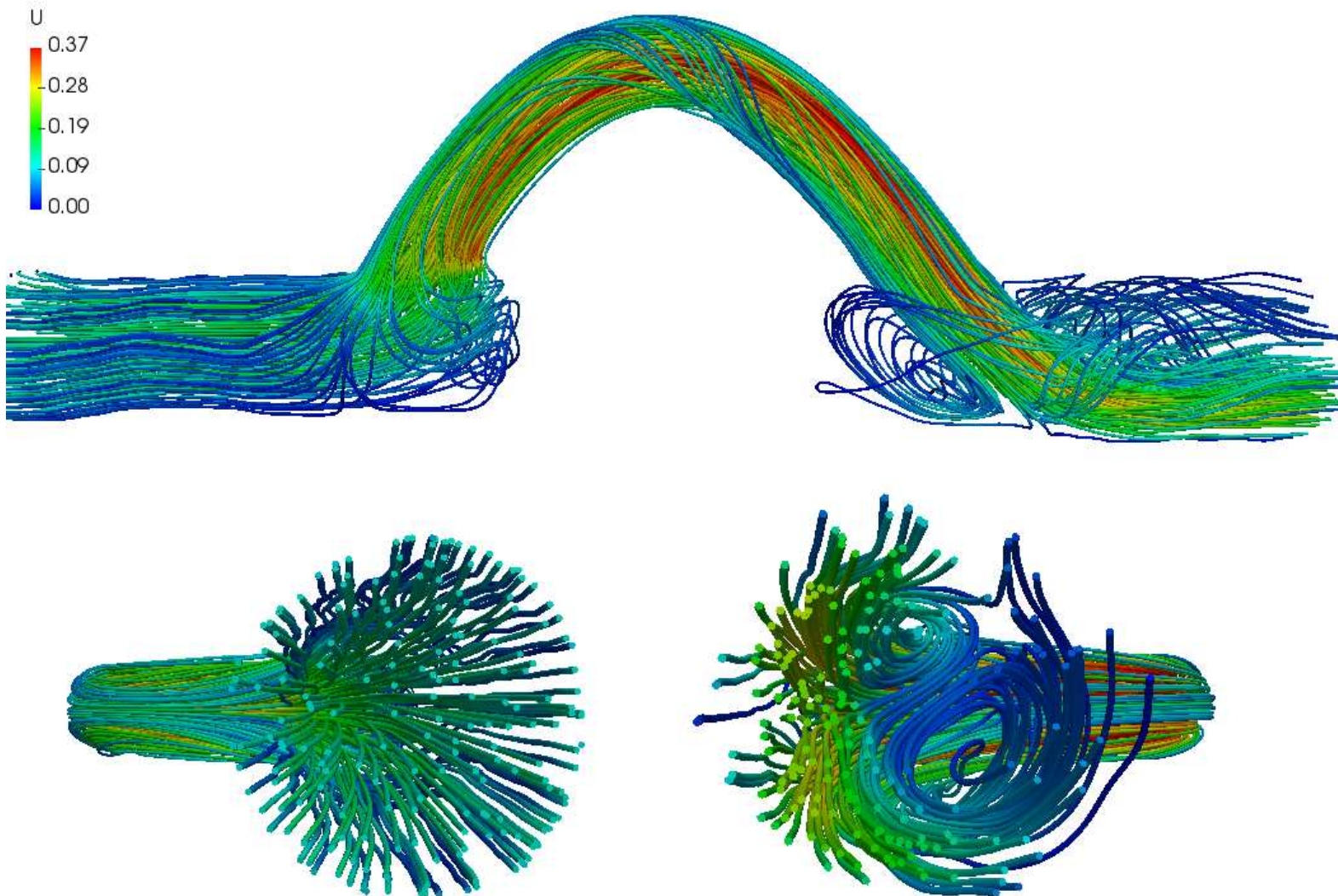
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

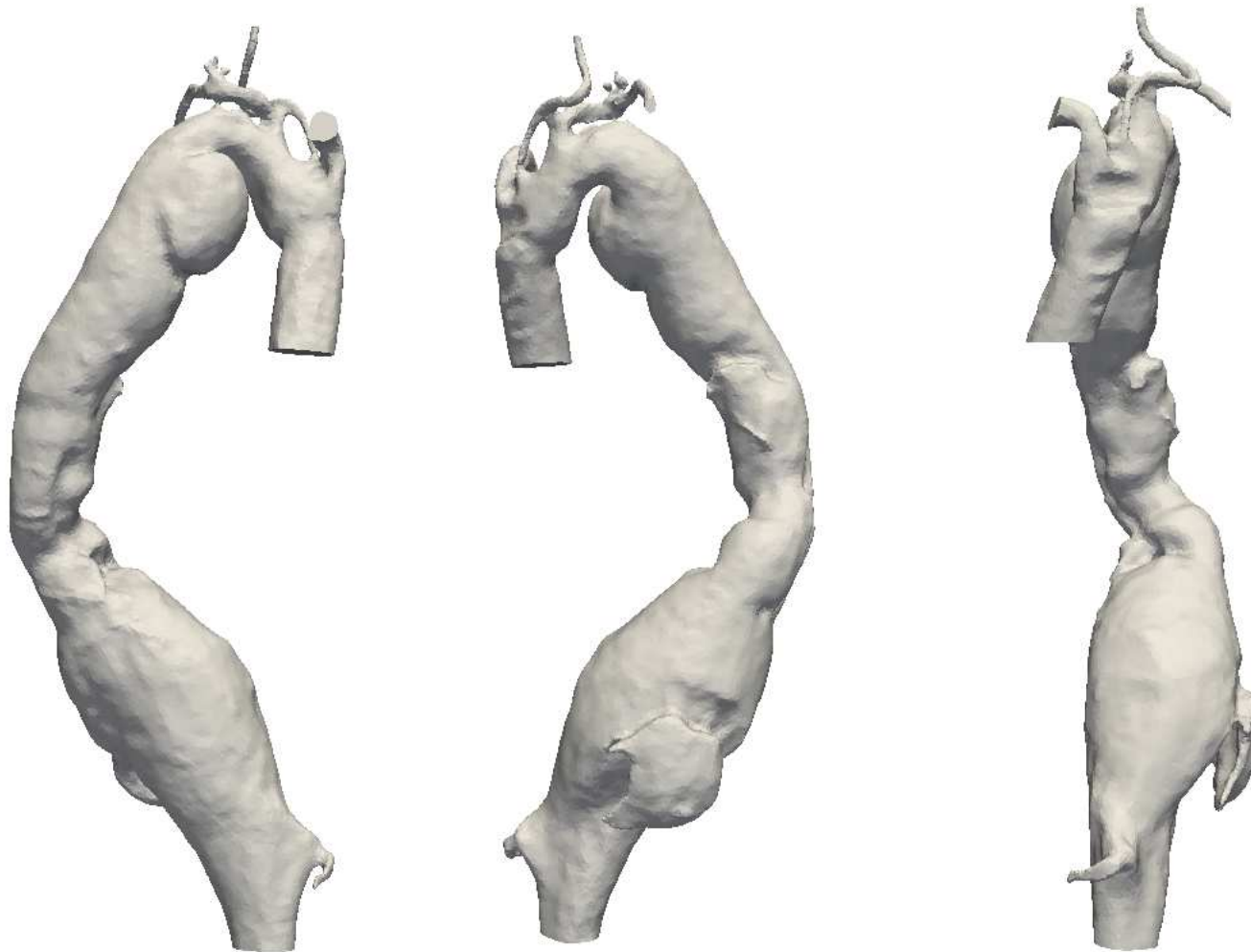
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

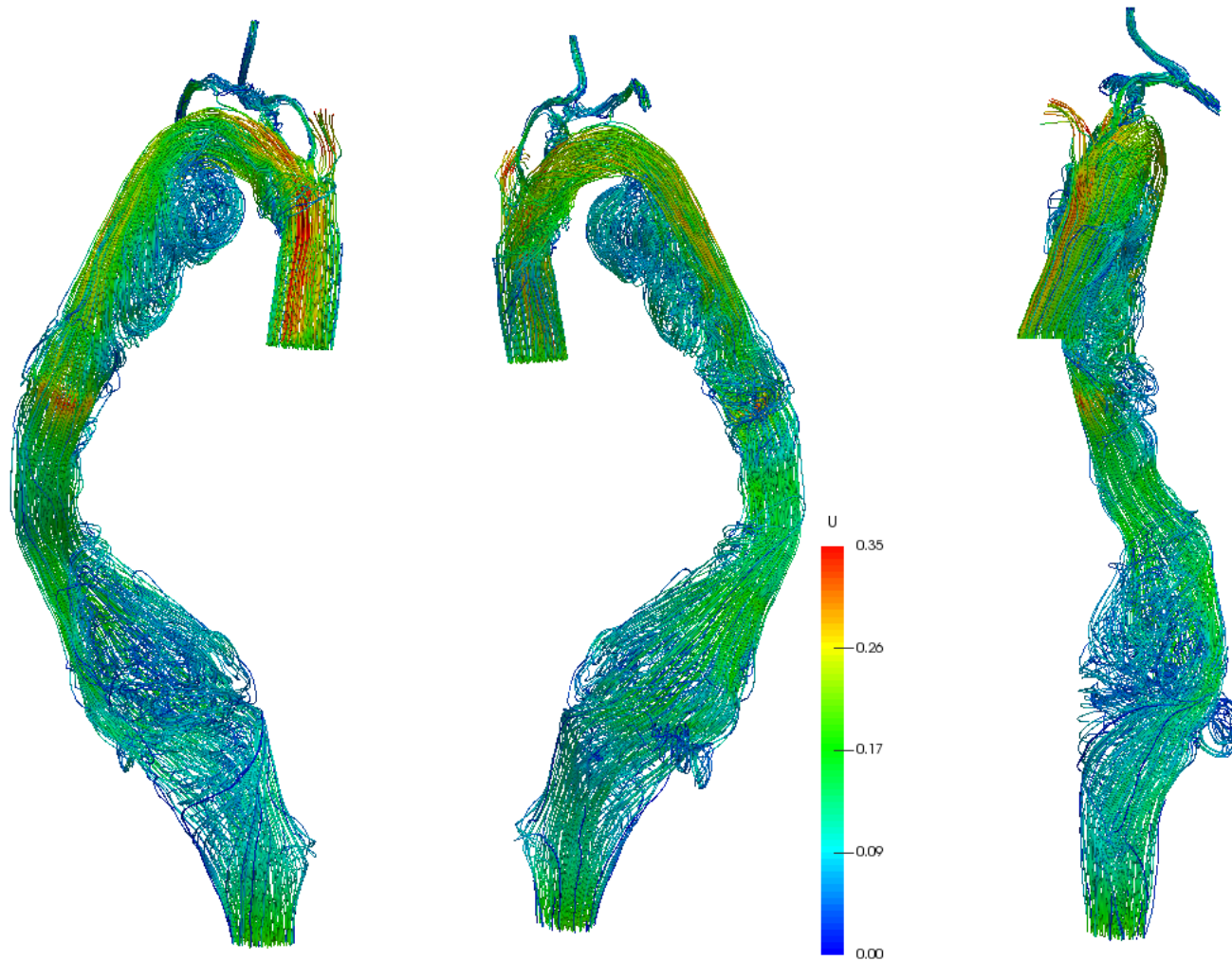
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

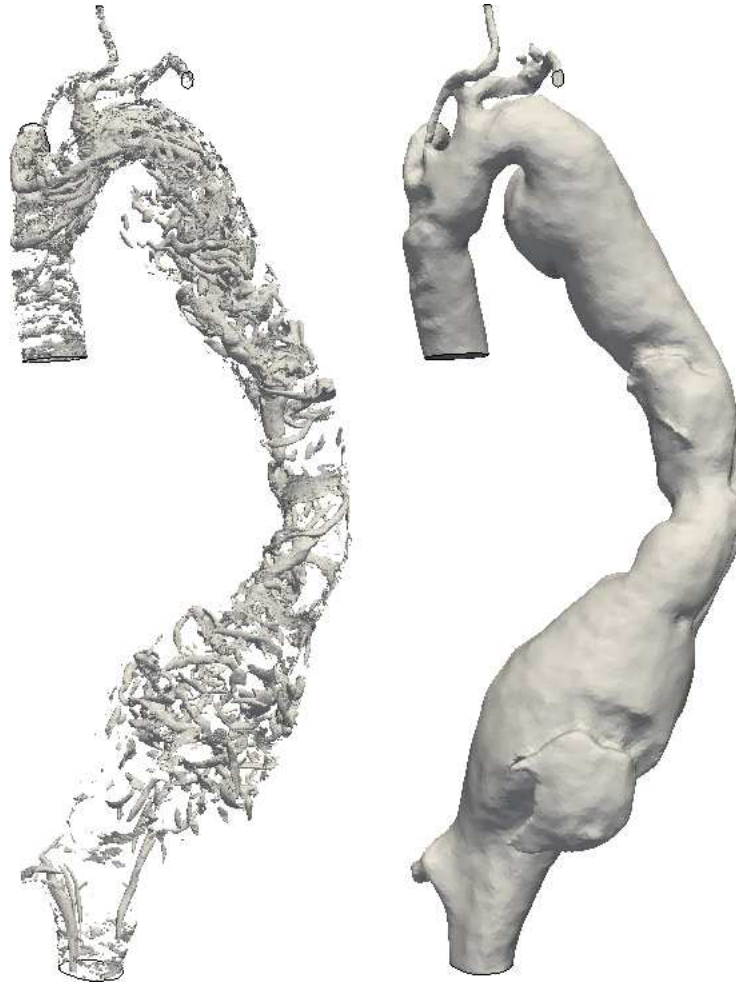
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

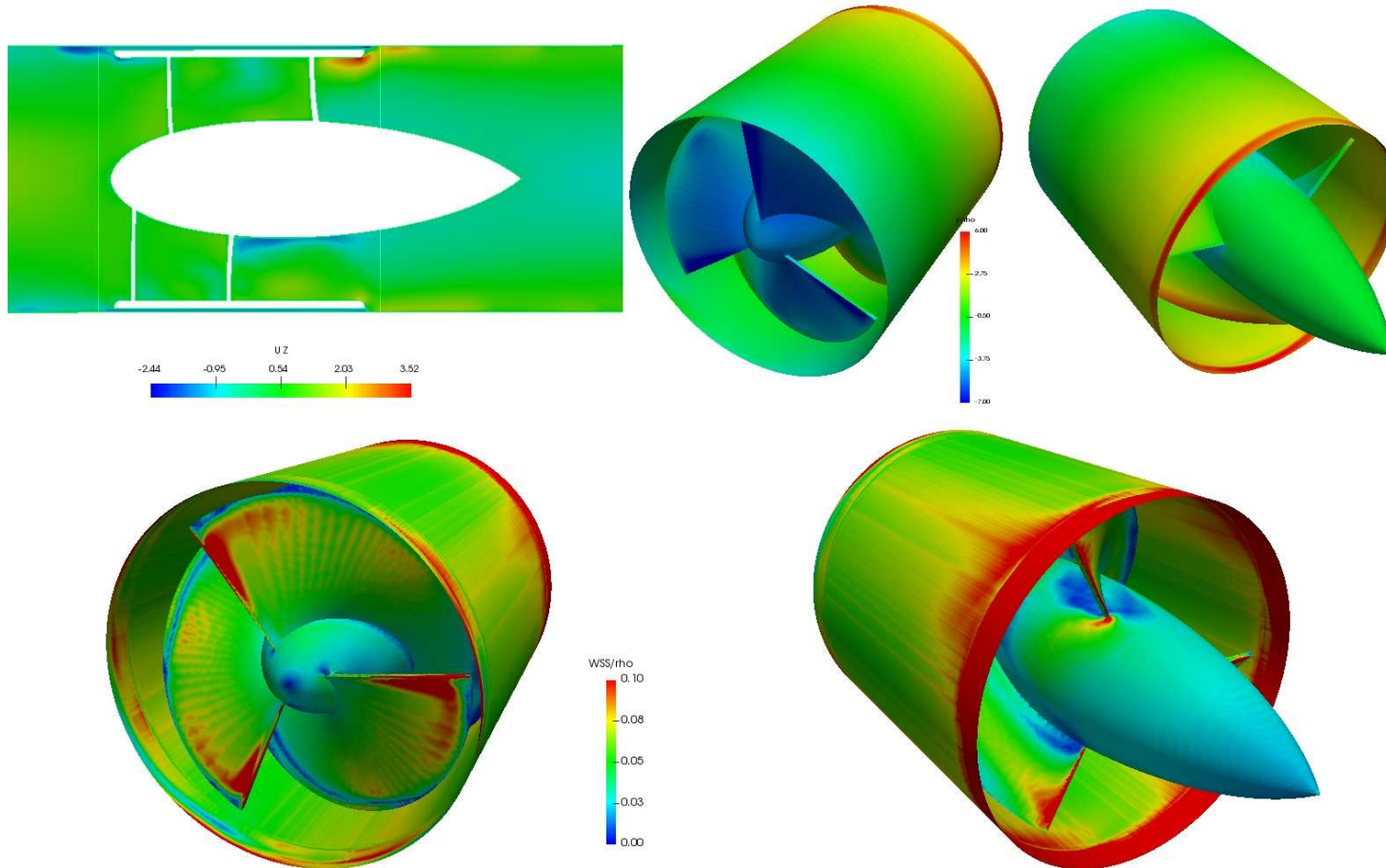
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

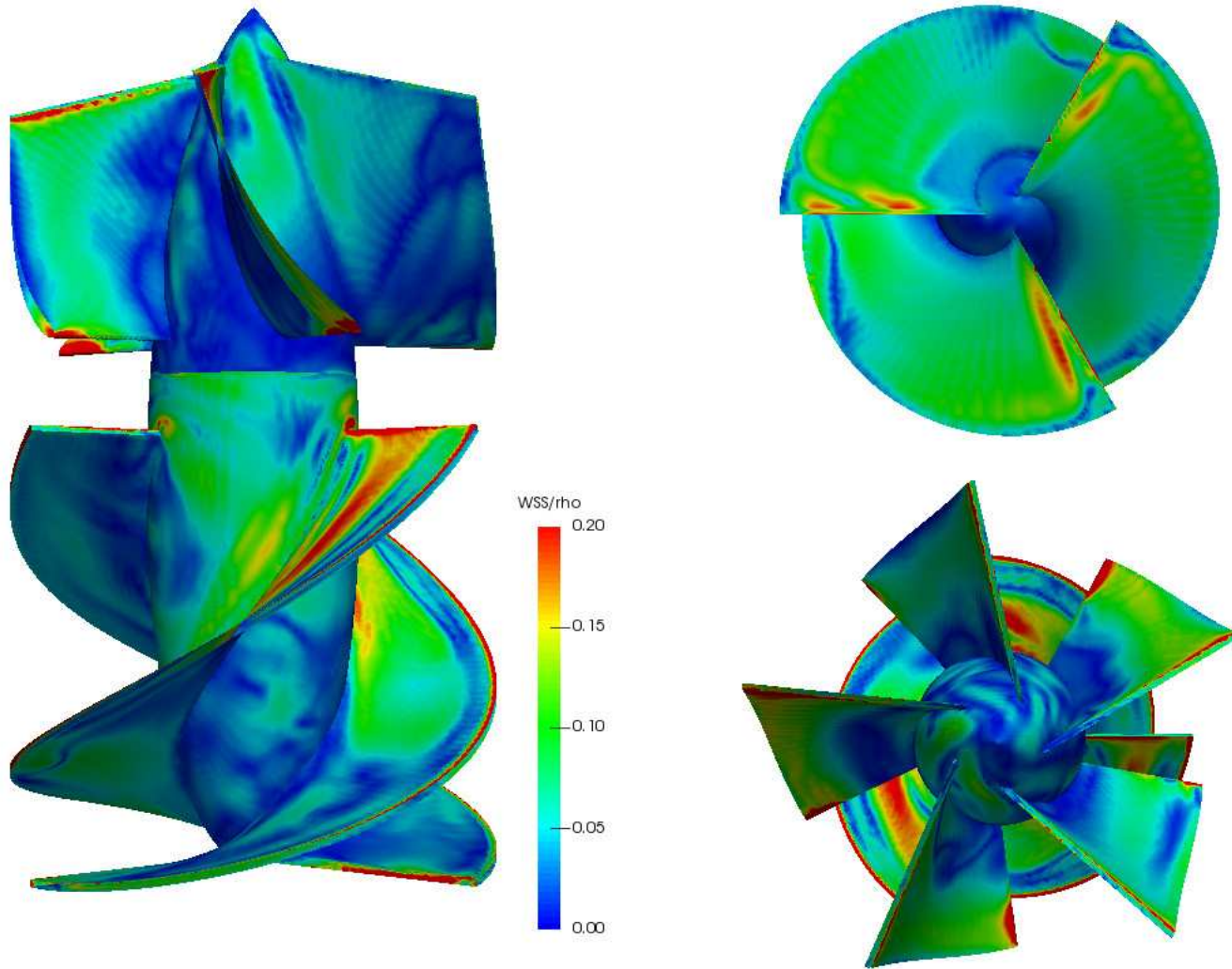
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

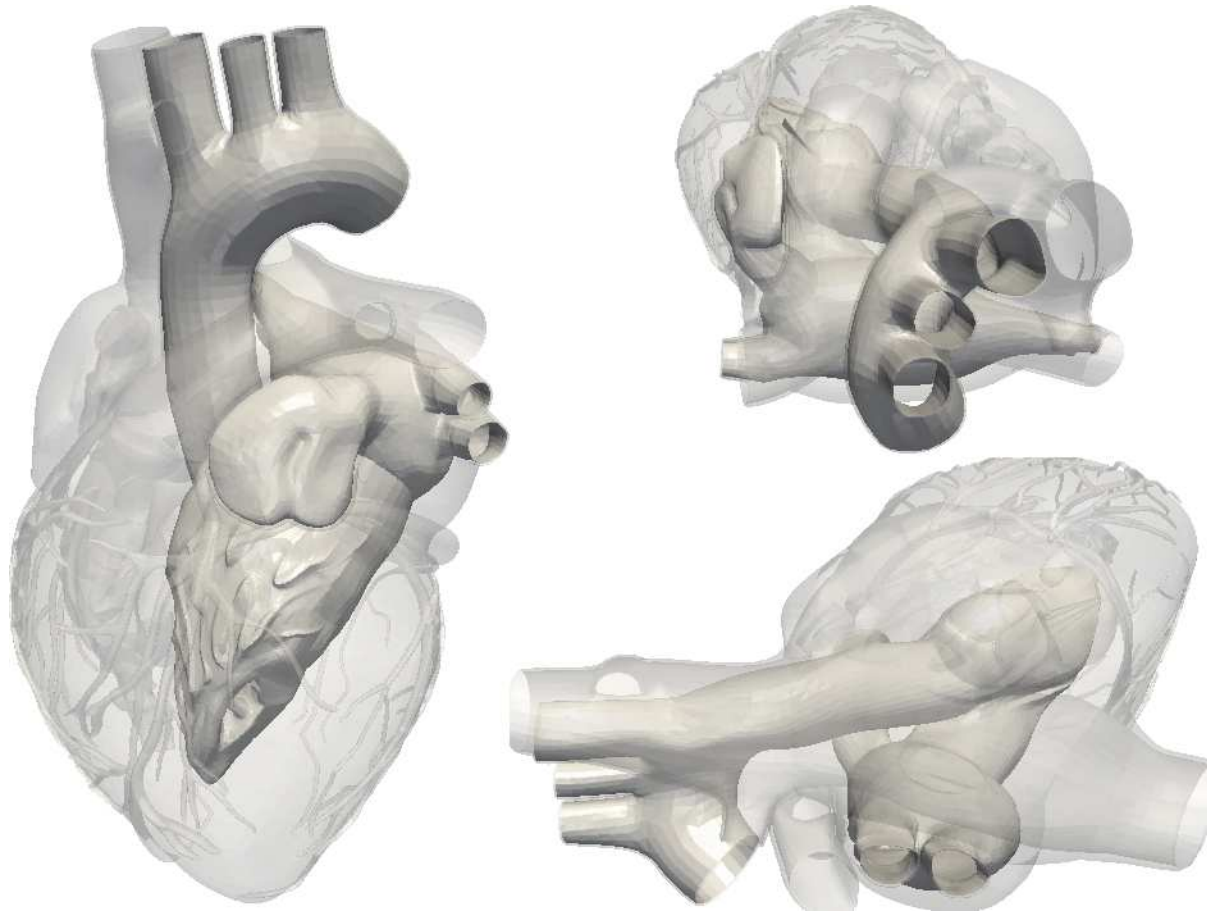
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

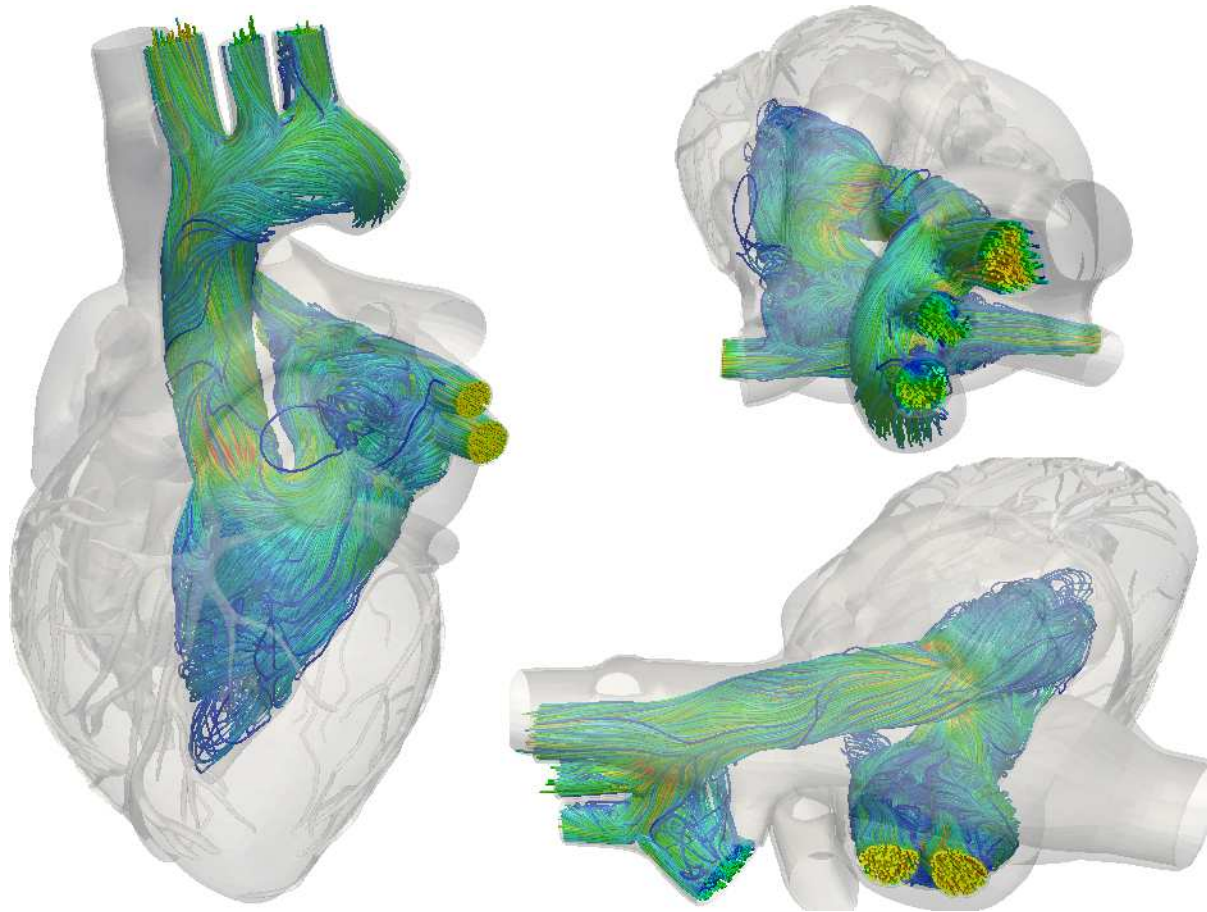
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

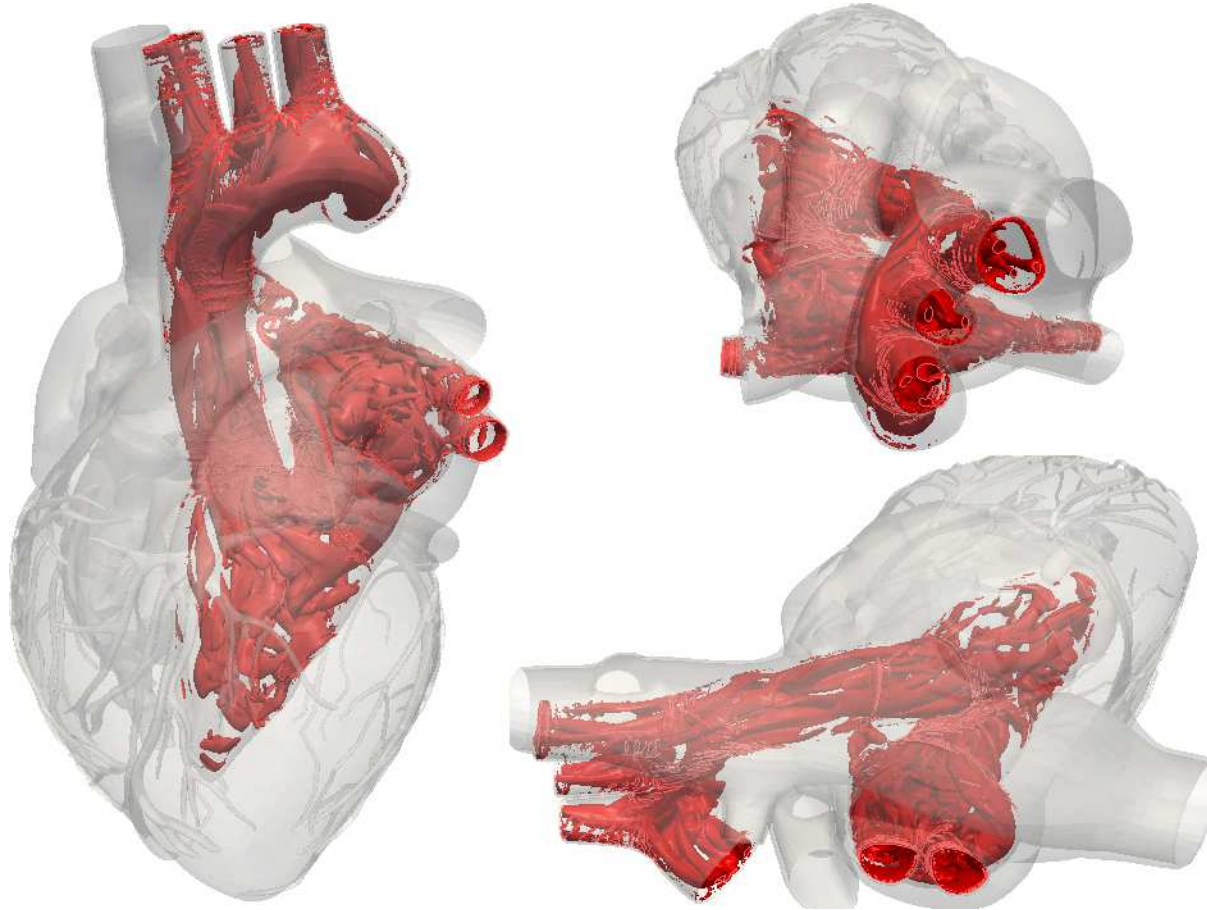
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

W metodzie dynamiki molekularnej rozważany jest ruch wszystkich molekuł. Równanie ruchu wynika z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{G}_i + \sum_{j=1 \neq i}^N \mathbf{f}_{ij} \quad (259)$$

Siły działające na molekułę można podzielić na siły zewnętrzne  $G$  typu grawitacji i siły wzajemnego oddziaływania  $\mathbf{f}_{ij} = -\nabla V$ . Siła wzajemnego oddziaływania wyrażana jest przez gradient potencjału Lennarda-Jonesa

$$V = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{\|\mathbf{r}\|} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{\|\mathbf{r}\|} \right)^6 \right] \quad (260)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

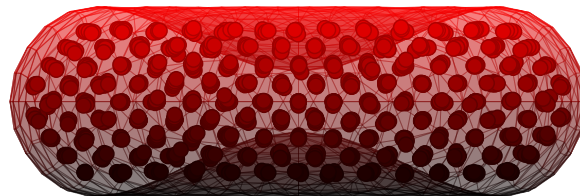
Literatura

# Opis mezoskopowy – metoda DPD

W metoda cząstek dyssypatywnych (DPD) rozważa się ruch supercząstek, które reprezentują całe grupy molekuł. Równanie ruchu ma postać

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{G}_i + \mathbf{f}_i^M + \mathbf{f}_i^{PP} + \sum_{j=1 \neq i}^N \left( \mathbf{f}_{ij}^C + \mathbf{f}_{ij}^D + \mathbf{f}_{ij}^R \right) \quad (261)$$

- $\mathbf{f}_{ij}^C$  siły zachowawcze
- $\mathbf{f}_{ij}^D$  siły dyssypatywne
- $\mathbf{f}_{ij}^R$  siły losowe
- $\mathbf{f}_i^{PP}$  siły między krwinkami
- $\mathbf{f}_i^M$  siły membrany



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis mezoskopowy – metoda DPD

Siły:

- dyssypatywne

$$\mathbf{f}_{ij}^D = -\gamma\omega_D (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \quad (262)$$

- losowe

$$\mathbf{f}_{ij}^R = \sigma\omega_R \hat{\mathbf{r}}_{ij} \frac{\theta_{ij}}{\sqrt{\Delta t}} \quad (263)$$

- zachowawcze

$$\mathbf{f}_{ij}^C = \alpha\omega_R \hat{\mathbf{r}}_{ij} \quad (264)$$

gdzie  $\omega_D = \omega_R^2$  and  $\sigma^2 = 2\gamma k_B T$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

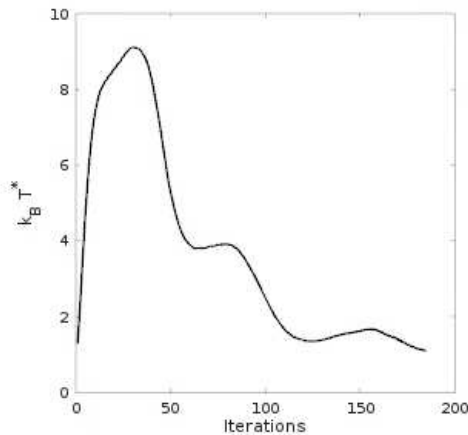
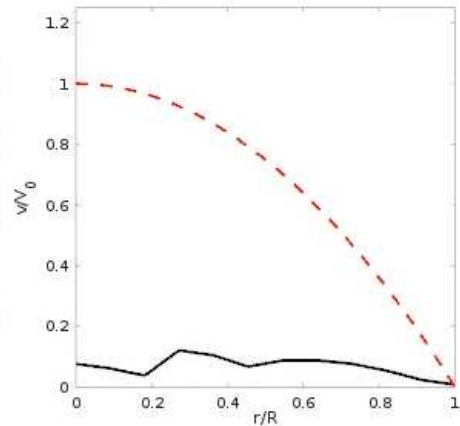
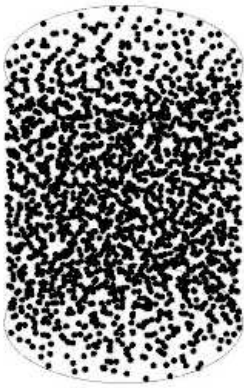
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Opis mezoskopowy – metoda DPD



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Deformacja krwinek

Metody transportu pasywnego/aktywnego:

- całkowite kontinuum, (płyn i krwinki)
- semi-kontinuum, (ciągły płyn, dyskretne krwinki)
- cząsteczkowe (dyskretne płyn i krwinki)

Modele odkształcalnych krwinek:

- sprężyna-tłumik (spring-damper)
- sieć spektryn (spectrin network model)
- elastyczny (elastic immersed boundary model)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Model sprężyna-tłumik

Równanie ruchu

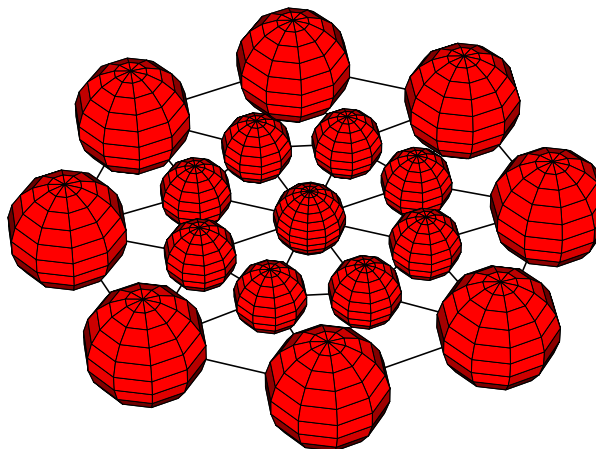
$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i \quad (265)$$

Siła wywarta na cząstki składa się z sił zewnętrznych  $\mathbf{G}_i$  i sił 'kształtu'  $\mathbf{F}_i$  danych wzorem

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_{is} + \mathbf{f}_{id} + \mathbf{f}_{ib} \quad (266)$$

gdzie

- $\mathbf{f}_{is}$  siły sprężyste
- $\mathbf{f}_{id}$  siły tłumiące
- $\mathbf{f}_{ib}$  siły gnące



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Model sprężyna-tłumik

## ■ siły sprężyste

$$\mathbf{f}_{is} = -k \sum_{j \in N_b} \Delta \mathbf{r}_{ij} \quad (267)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{ij} = (r_{ij}(t) - r_{ij}(t_0)) \hat{\mathbf{r}}_{ij}(t) \quad (268)$$

## ■ siły tłumiące

$$\mathbf{f}_{id} = -2\beta \mathbf{v}_i - 2\beta_* \sum_{j \in N_b} \Delta \hat{\mathbf{r}}_{ij} (\Delta \mathbf{v}_{ij} \cdot \Delta \hat{\mathbf{r}}_{ij}) \quad (269)$$

## ■ siły gnące

$$\mathbf{f}_{ib} = \frac{\gamma}{|N_b|} \sum_{j \in N_b} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (270)$$

$$\mathbf{f}_{jb} = \frac{-\mathbf{f}_{ib}}{|N_b|} \quad (271)$$

Podstawowe  
równania

---

Bioreologia

---

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

---

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

---

Sieci naczyń

---

Prawa Murraya

---

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

---

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

---

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

---

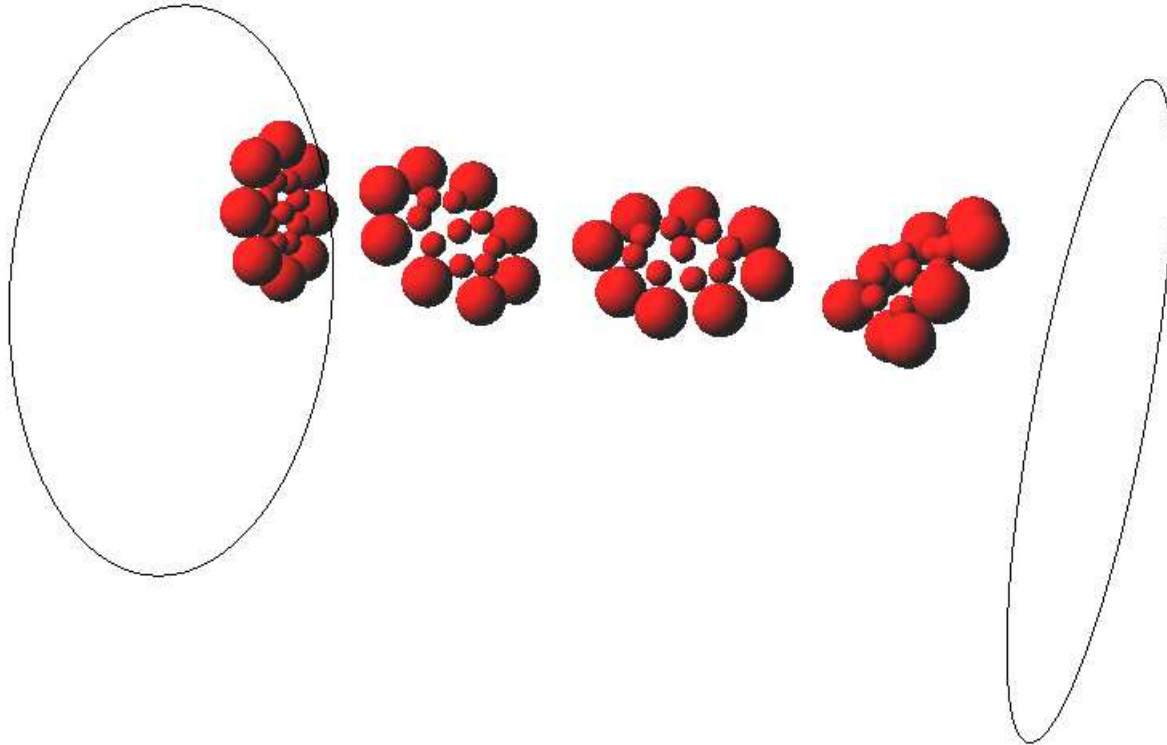
Laboratorium

---

Literatura

---

# Model sprężyna-tłumik – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Równanie ruchu ma postać

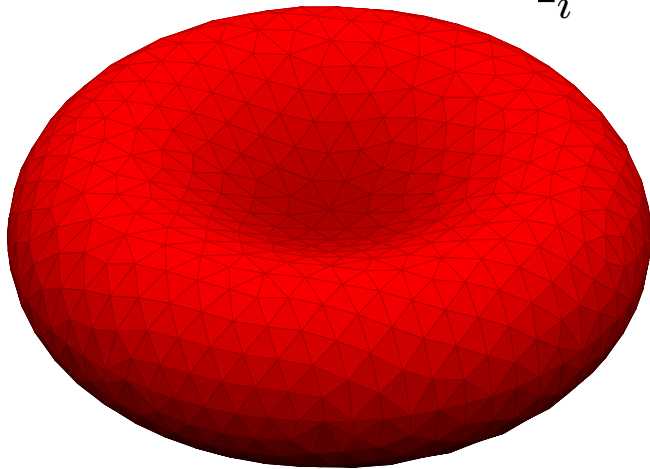
$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{f}_i^{FS} + \mathbf{f}_i^{PP} + \mathbf{f}_i^M \quad (272)$$

Energia sieci

$$E = E_{i-p} + E_b + E_a + E_v \quad (273)$$

Wywierane siły

$$\mathbf{f}_i^M = - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (274)$$



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Energia sieci składa się z:

- sumy energii 'na płaszczyźnie' (siły elastyczne + dyssypatywne)  $E_{i-p}$
- energii gięcia

$$E_b = \sum_i k_b (1 - \cos(\theta_i - \theta_0)) \quad (275)$$

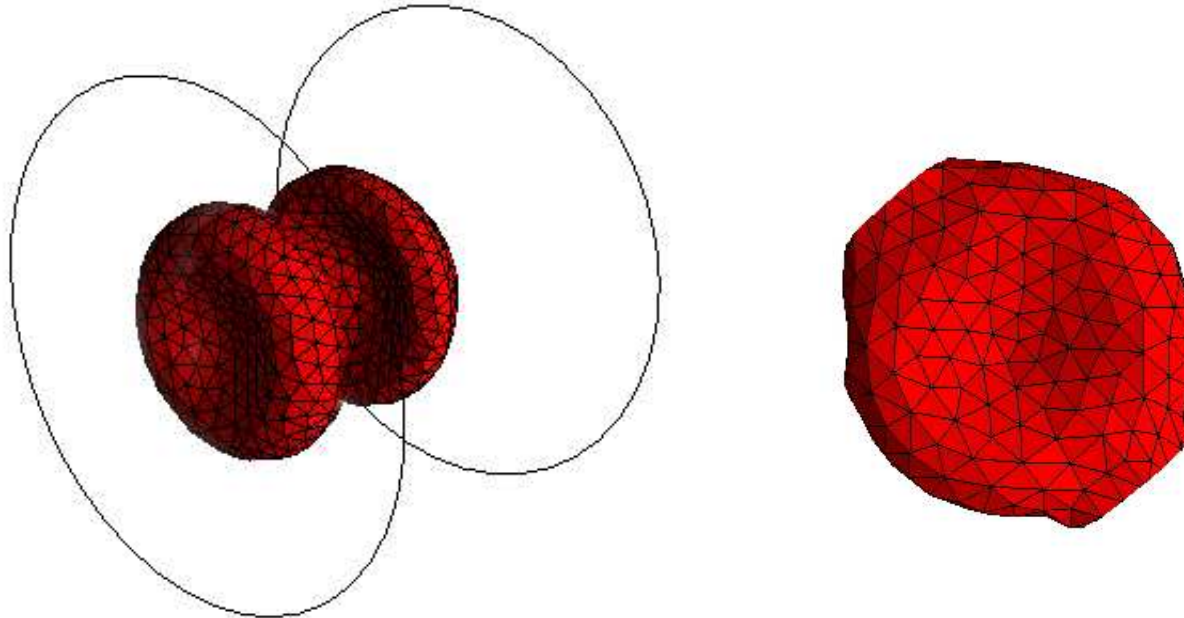
- energia związana z zachowaniem powierzchni (globalnej + lokalnej)

$$E_a = k_a \frac{(A - A_0)^2}{2A_0} + \sum_i k_{ai} \frac{(A_i - A_{0i})^2}{2A_{0i}} \quad (276)$$

- energia związana z zachowaniem objętości

$$E_v = k_v \frac{(V - V_0)^2}{2V_0} \quad (277)$$

# Sieć spektryn – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Równanie ruchu ma postać

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i \quad (278)$$

Siły wywierana na węzły krwinki składają się z

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i^{FS} + \mathbf{f}_i^{PP} + \mathbf{f}_i^M \quad (279)$$

Siły elastyczne  $\mathbf{f}_i^M$  składają się z

$$\mathbf{f}_i^M = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_V \quad (280)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

- Siły rozciągające

$$\mathbf{f}_s = k_s \kappa \frac{\Delta L}{L_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (281)$$

- Siły gnące

$$\mathbf{f}_b = k_b \frac{\Delta \theta}{\theta_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (282)$$

- Siły zachowujące powierzchnie (globalne + localne)

$$\mathbf{f}_a = k_a \frac{\Delta S_a}{S_{a0}} \hat{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{f}_A = k_A \frac{\Delta S}{S_0} \hat{\mathbf{w}} \quad (283)$$

- Siły zachowujące objętość

$$\mathbf{f}_V = k_V \frac{\Delta V}{V_0} S_a \hat{\mathbf{n}} \quad (284)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

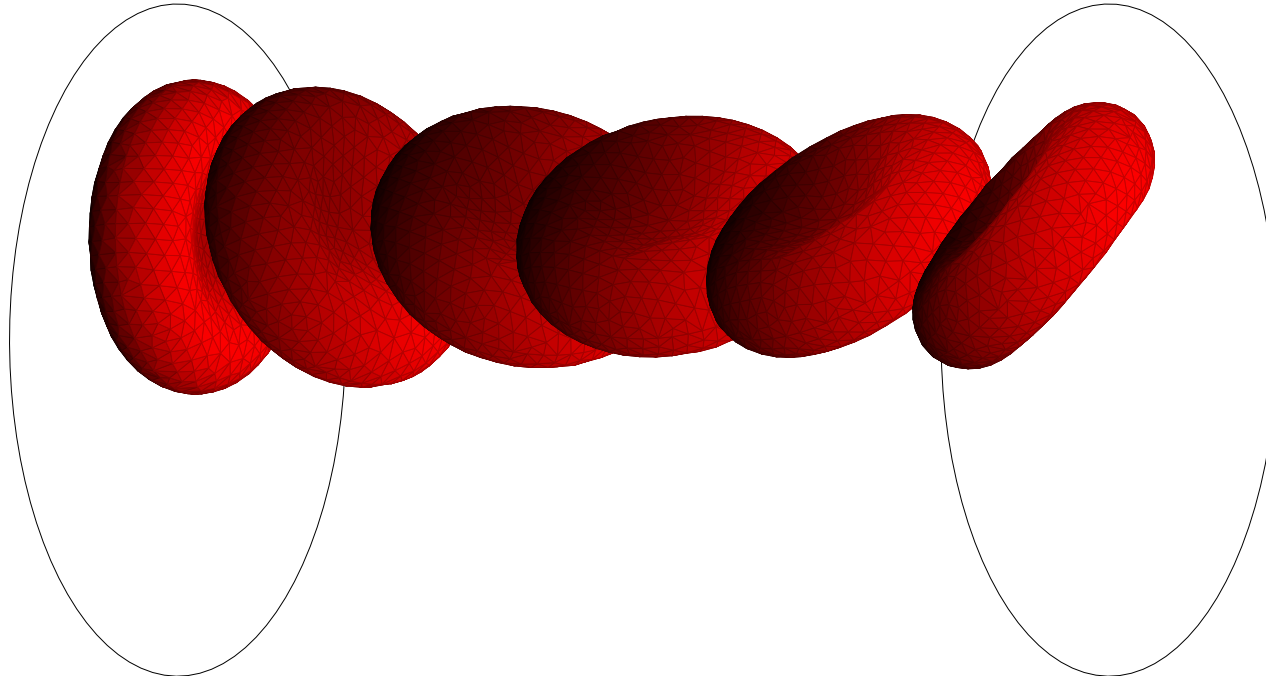
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Model elastyczny – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Urządzenia do wspomagania krążenia

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

**Urządzenia do wspomagania krążenia**

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Nawet najbardziej zaawansowane leczenie farmakologiczne nie wystarczy, aby zapobiec pogorszeniu zdrowia pacjentów z wadami serca. Inne metody (poza farmakologicznymi)

- transplantacja serca (kosztowna, brak dawców, odrzucanie przeszczepu, duża śmiertelność)
- sztuczne pompy sercowe:
  - ◆ mające na celu zastąpić chore serce
  - ◆ wspomagające pracę komór:
    - LVAD (left ventricular assist device)
    - RVAD (right ventricular assist device)
    - BIVAD (bi-ventricular assist device)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

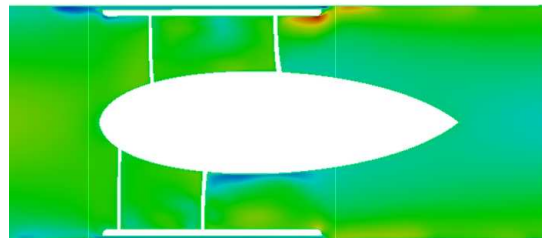
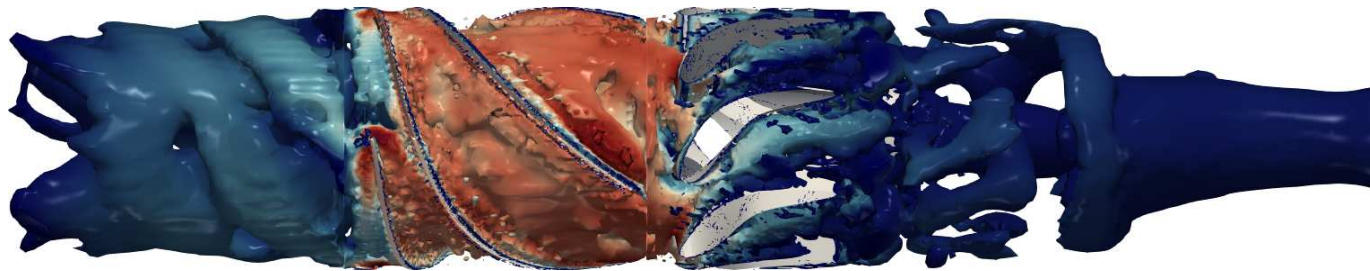
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

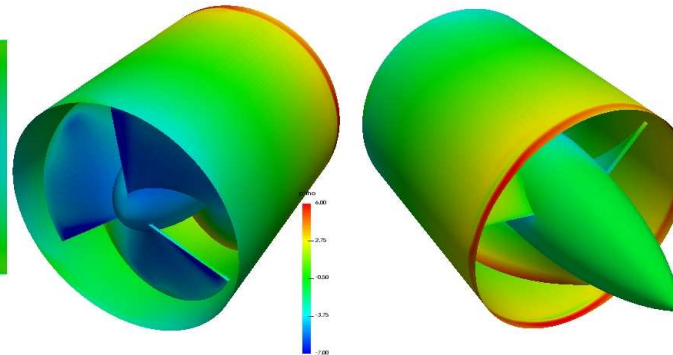
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

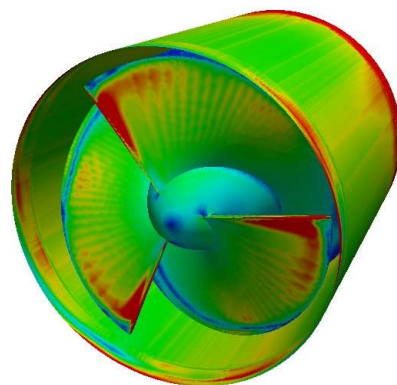
Literatura



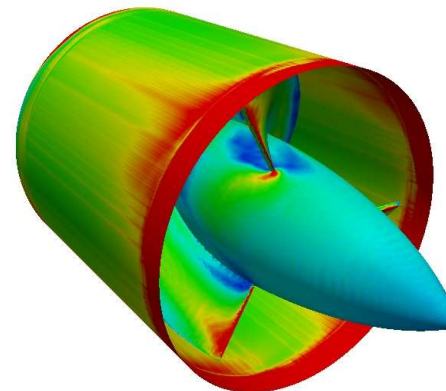
Uz  
-2.44 -0.95 0.54 2.03 3.52



1.00  
0.75  
0.50  
0.25  
0.00



WSS/rho  
0.10  
0.08  
0.05  
0.03  
0.00



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

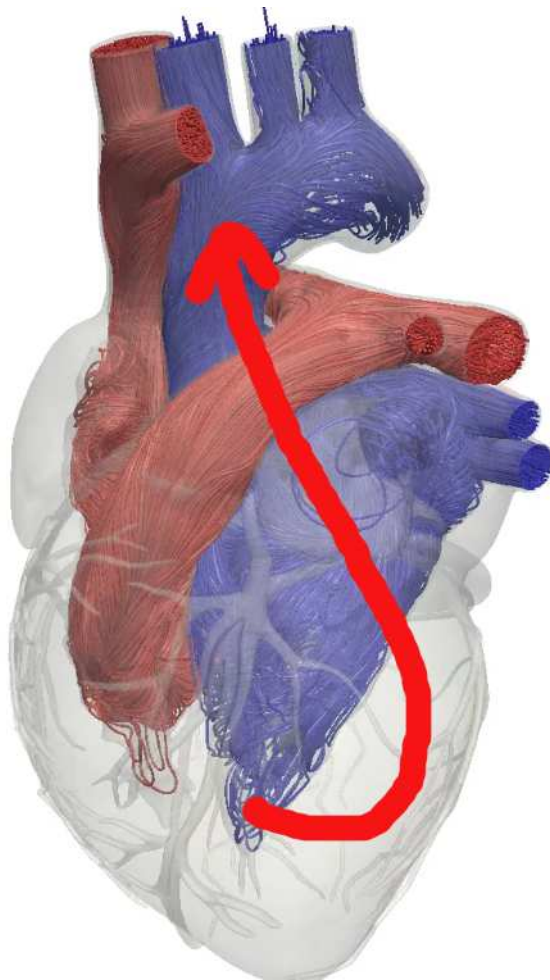
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Pompy wspomagające krążenie

Ludzie serce pracuje w sposób pulsacyjny!  
Stosowane pompy wspomagające (wirnikowe) zapewniają stały wydatek. Pompy wirnikowe są prostsze i mniejsze.

Rozróżniamy pompy wirnikowe:

- promieniowe (większe)
- osiowe (mniejsze ale wymagają dużo większych prędkości obrotowych)

Większe prędkości obrotowe mogą prowadzić do niszczenia krwinek (wysokie naprężenia styczne): trombogenność i hemoliza w szczególności.

Można minimalizować negatywne oddziaływanie pompy na krew poprzez zmniejszanie obrotów, ale przy zachowaniu przyrostu ciśnienia, co jest możliwe poprzez optymalizację kształtu pompy.

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

	Zakres	Opt.	Opis
$x_1$	[0.2; 1]	0.566	podziałka wirnika
$x_2$	[0.1; 0.5]	0.100	nieliniowość linii śrubowej
$x_3$	{2, ..., 4}	4	liczba łopatek wirnika
$x_4$	[0; 0.5]	0.251	dwa punkty splajnu wału
$x_5$	[0.7; 1]	0.700	
$x_6$	[0.7; 1]	1.000	
$x_7$	[0.7; 1.2]	0.813	
$x_8$	{4, ..., 8}	8	liczba łopatek kierowniczych
$x_9$	[0; 45°]	45.00°	górny kąt skręcenia łopatek kierowniczych
$x_{10}$	[0; 30°]	30.00°	dolny kąt skręcenia łopatek kierowniczych
$x_{11}$	[0.2; 0.6]	0.600	punkt opisujący kształt łopatki kierowniczej
$x_{12}$	[0; 0.3]	0.300	
$x_{13}$	[0.05; 0.3]	0.300	punkt opisujący grubość łopatki kierowniczej
$x_{14}$	[0.05; 0.2]	0.175	

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

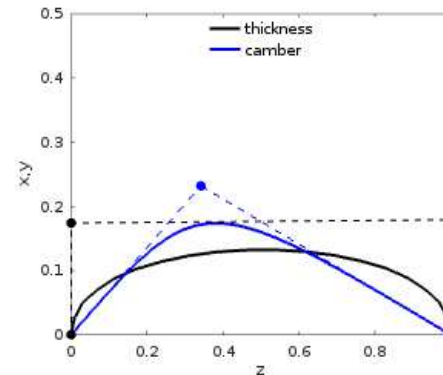
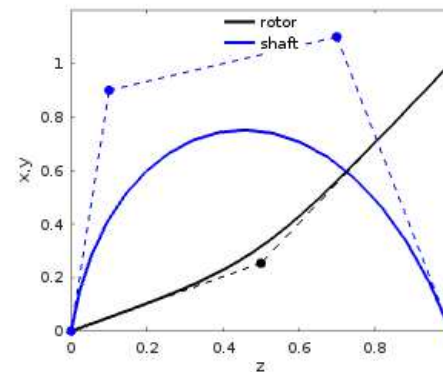
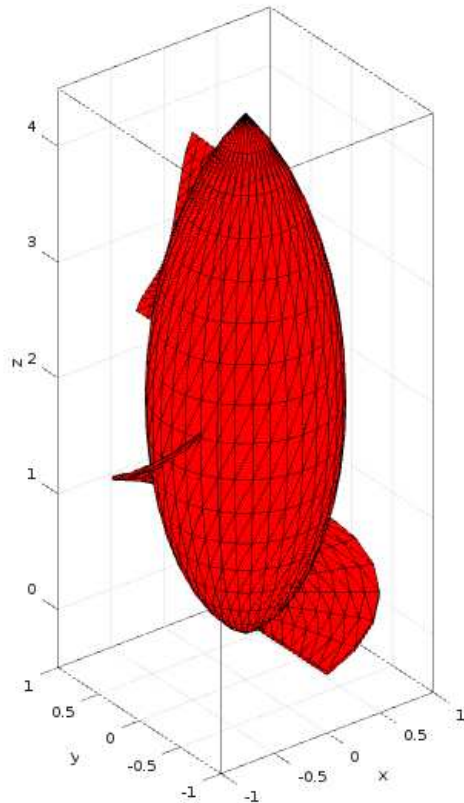
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – wał



(0.52808, 0.94409)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

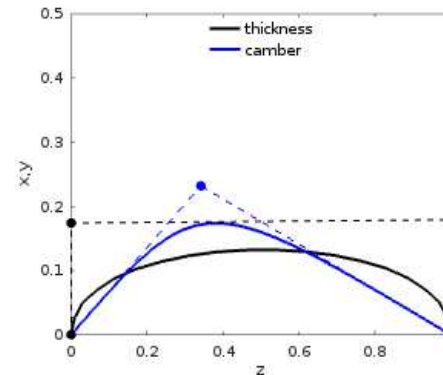
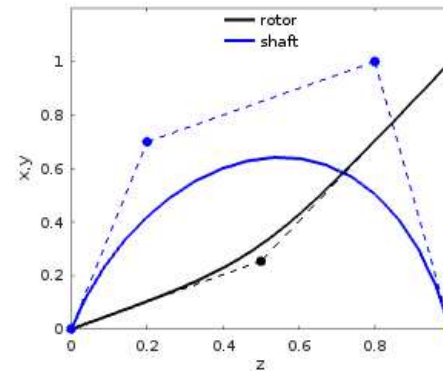
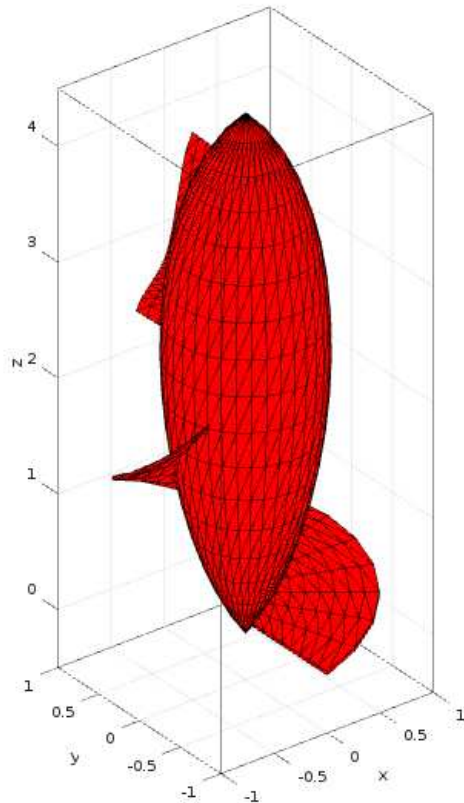
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Geometria – wał



(0.52808, 0.94409)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

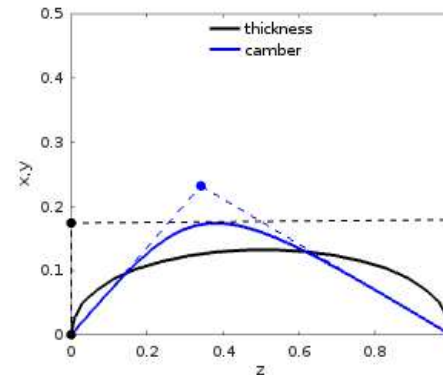
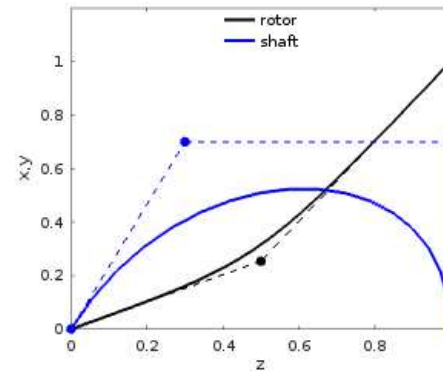
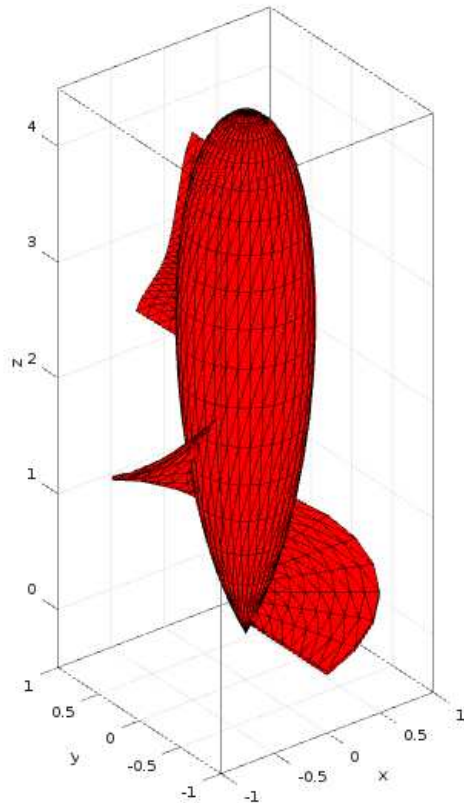
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – wał



(0.86681, 0.7059)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

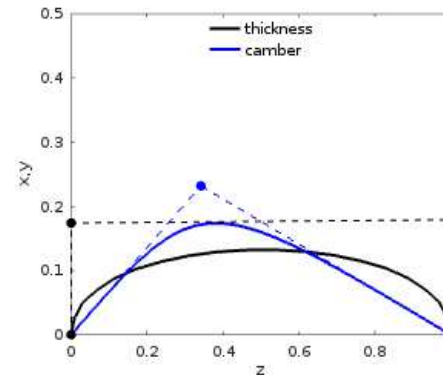
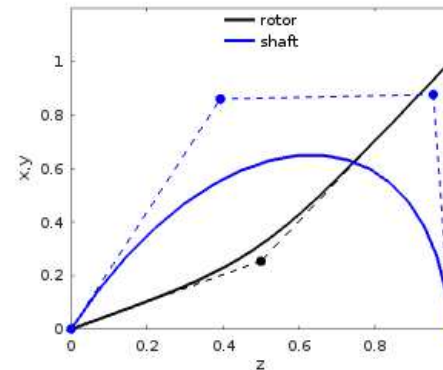
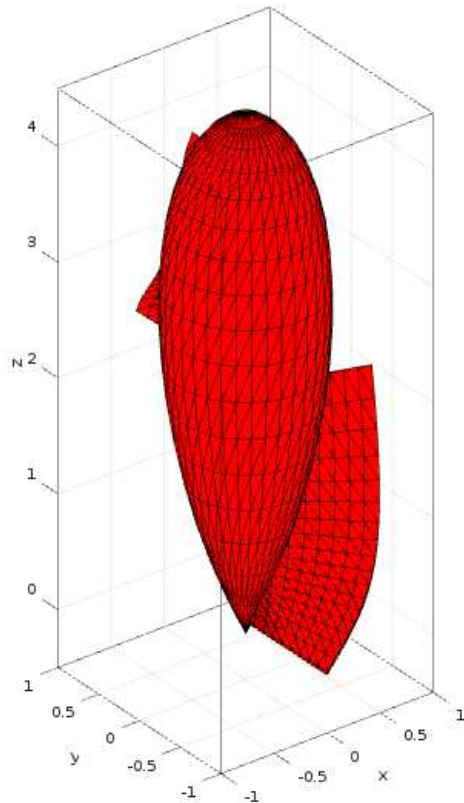
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – podziałka wirnika



(0.99796, 0.61251)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

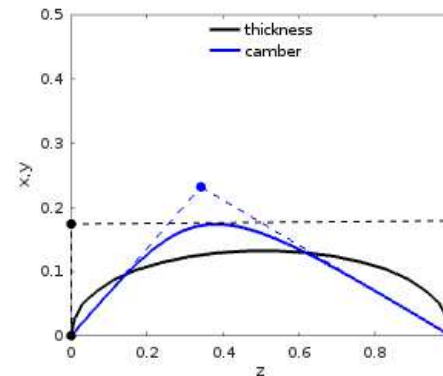
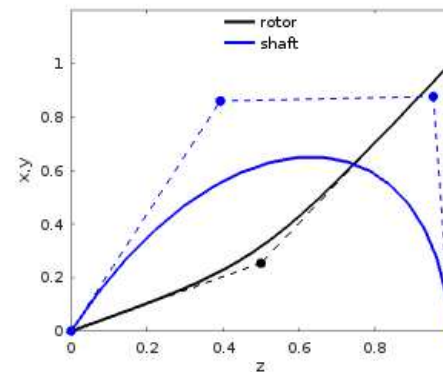
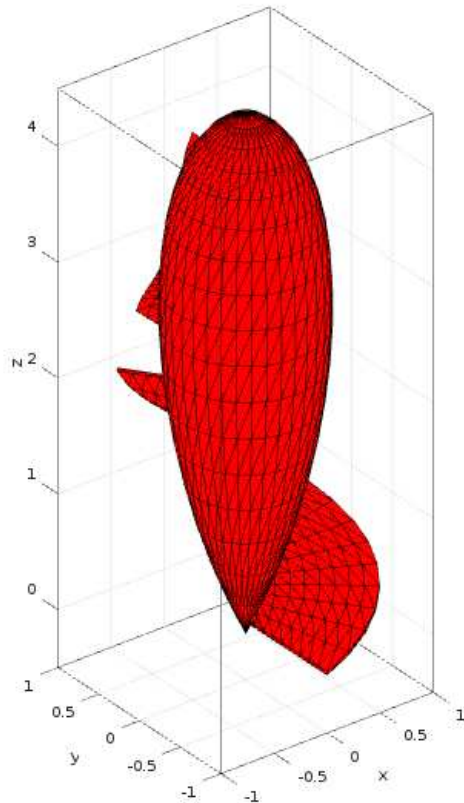
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – podziałka wirnika



(0.9639, 0.96458)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

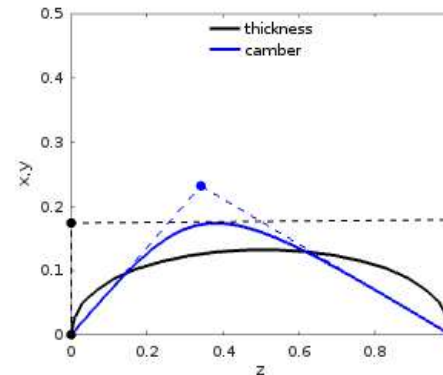
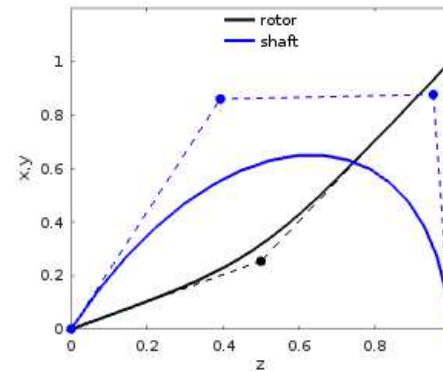
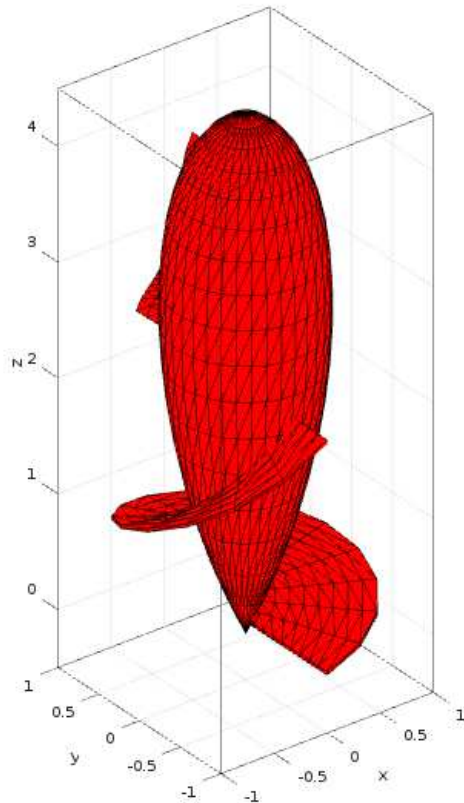
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – podziałka wirnika



(0.042674, 1.1879)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – nieliniowość linii śrubowej

Równanie linii śrubowej

$$x(t) = R \cos t \quad (285)$$

$$y(t) = R \sin t \quad (286)$$

$$z(t) = f(t) \quad (287)$$

Nieliniowość jest spowodowana nieliniową funkcją  $f$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

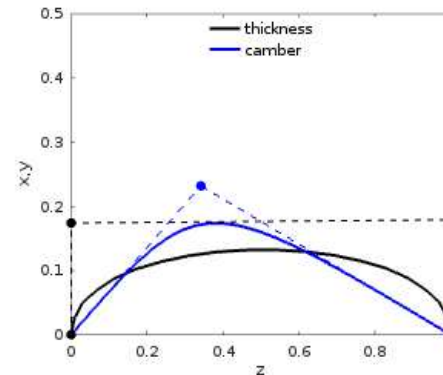
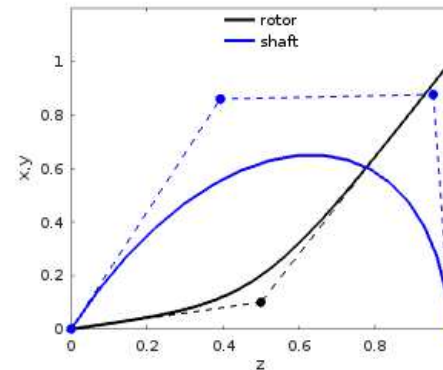
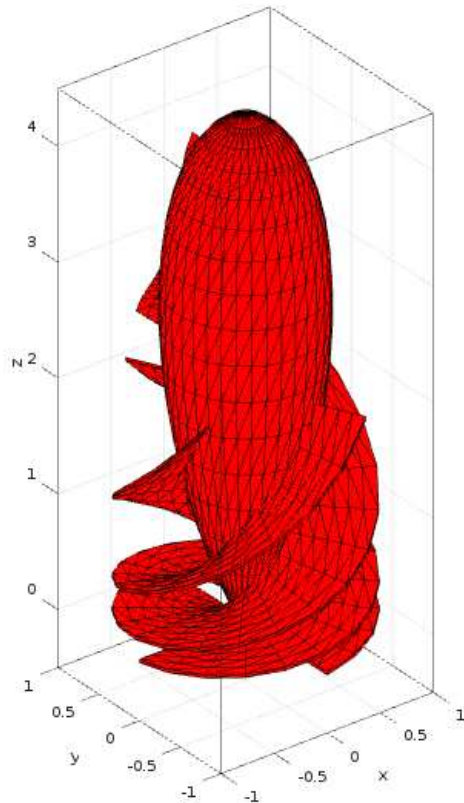
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – Nieliniowość linii śrubowej



(0.99412, 0.89069)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

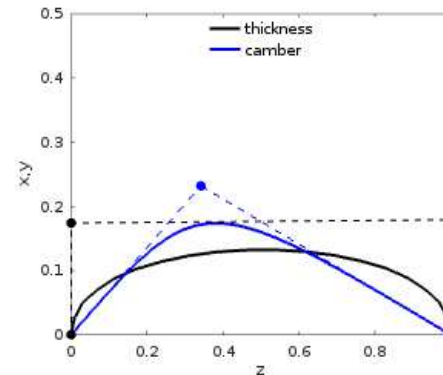
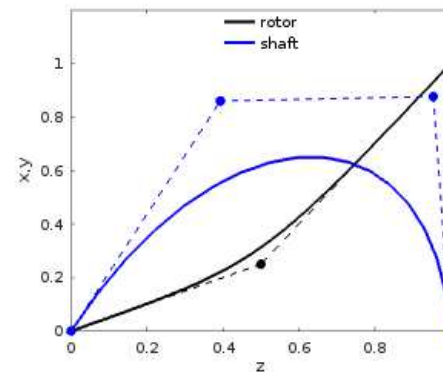
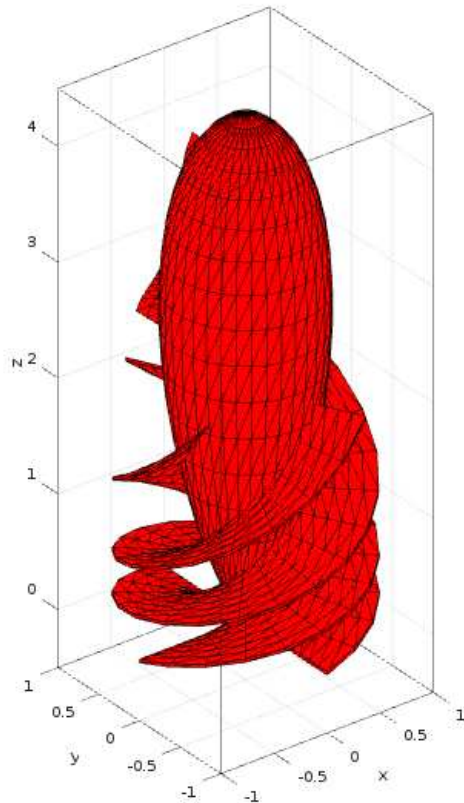
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – Nieliniowość linii śrubowej



(0.56535, 1.1707)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

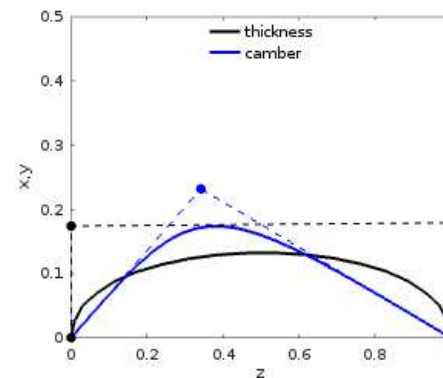
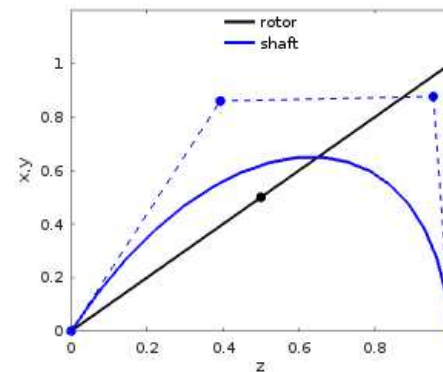
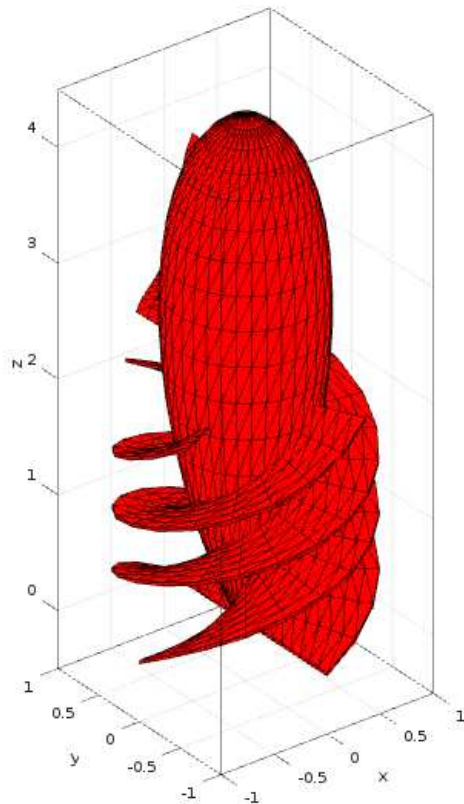
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Geometria – Nieliniowość linii śrubowej



(-0.72392, 0.80385)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

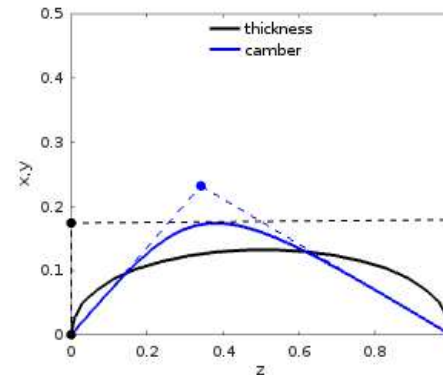
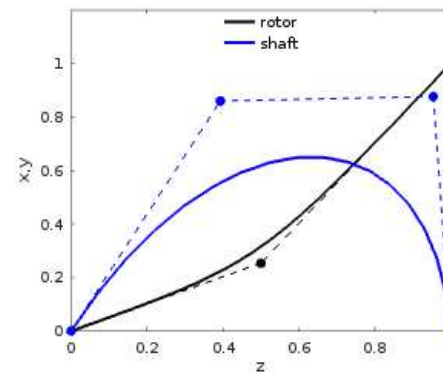
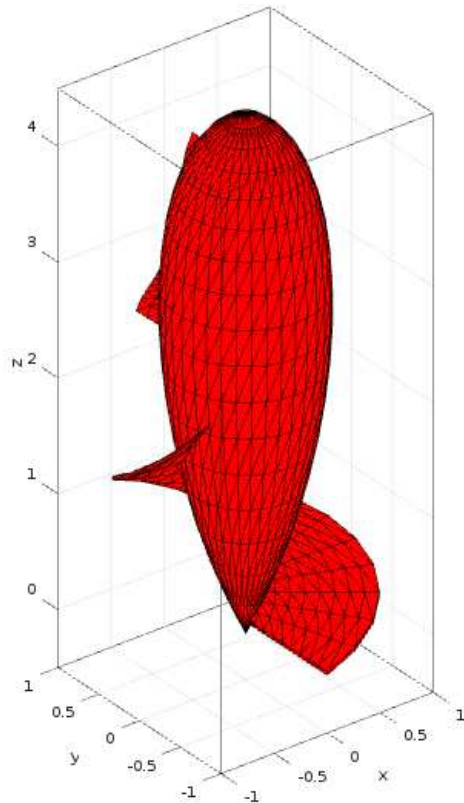
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – liczba łopatek wirnika



(0.3344, 1.1994)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

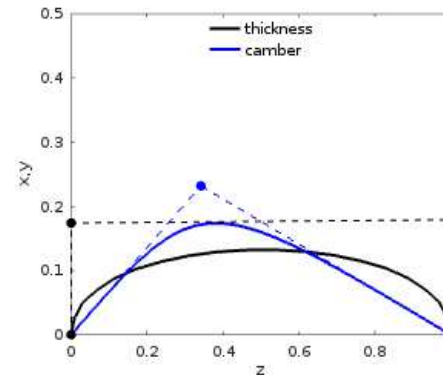
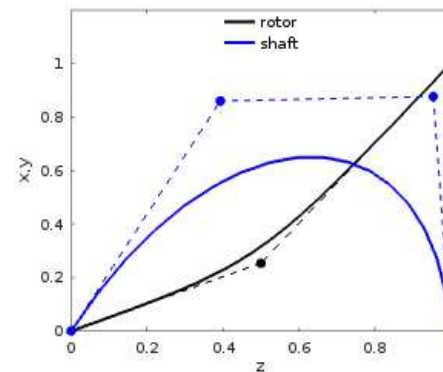
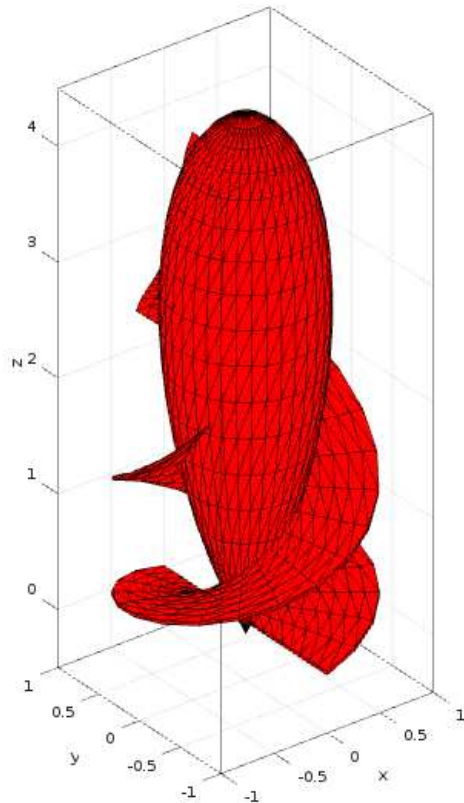
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – liczba łopatek wirnika



(-0.054135, 0.88383)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

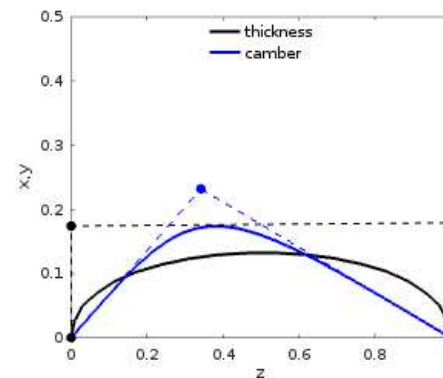
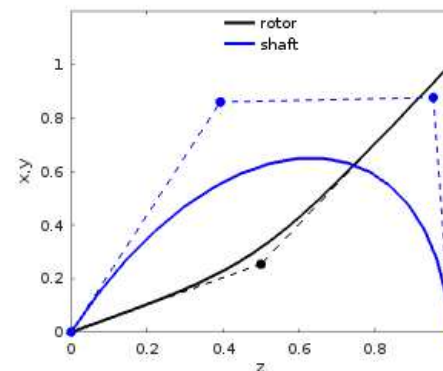
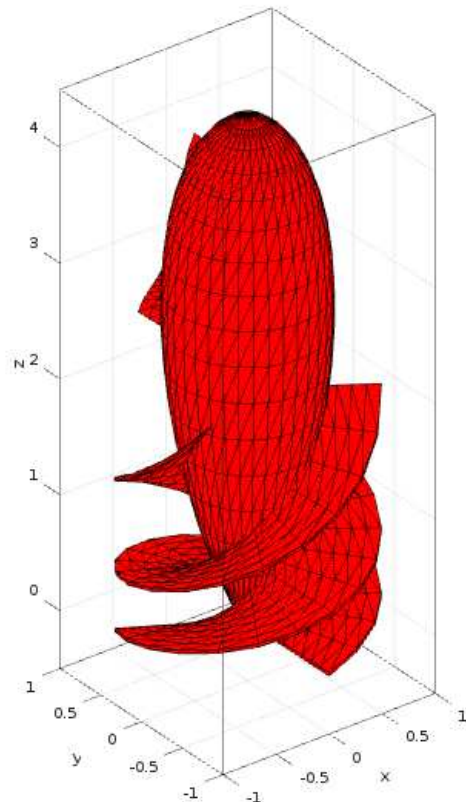
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – liczba łopatek wirnika



(-0.12491, 0.30075)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

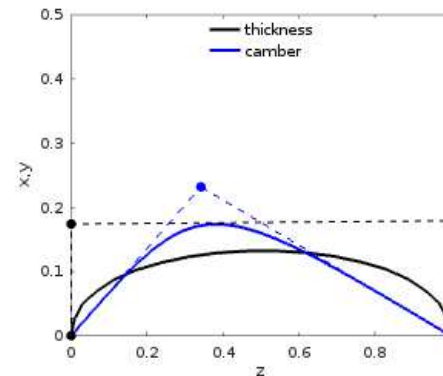
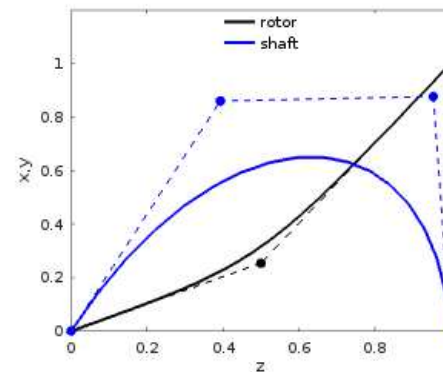
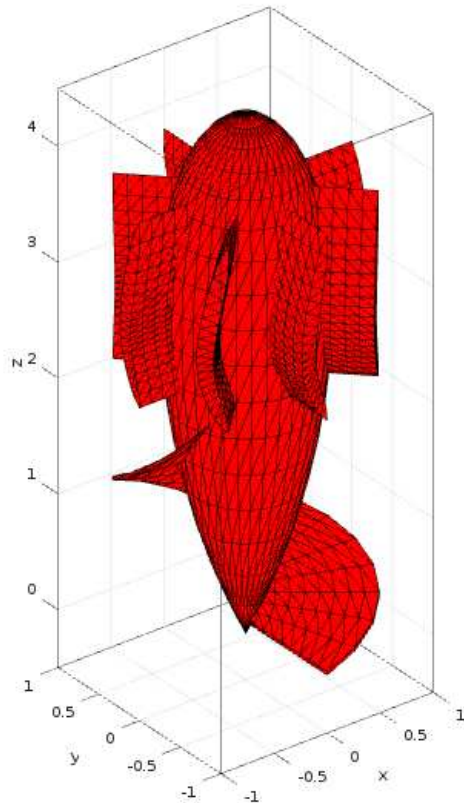
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – kąty skręcenia łopatek kierowniczych



(0.19664, 1.1764)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

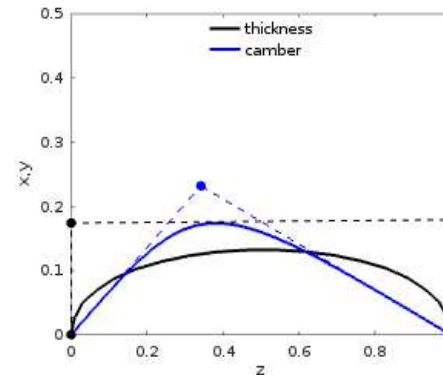
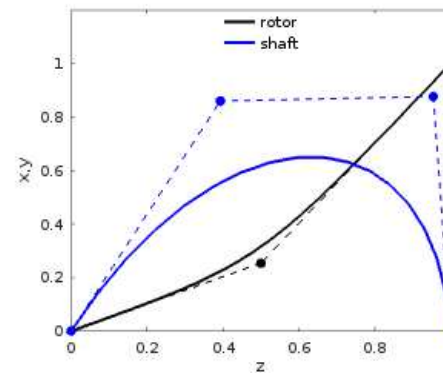
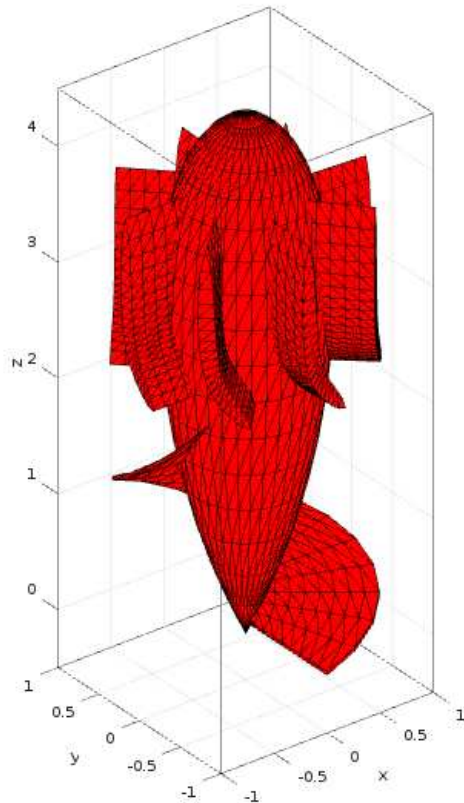
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – kąty skręcenia łopatek kierowniczych



(0.38642, -0.12782)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

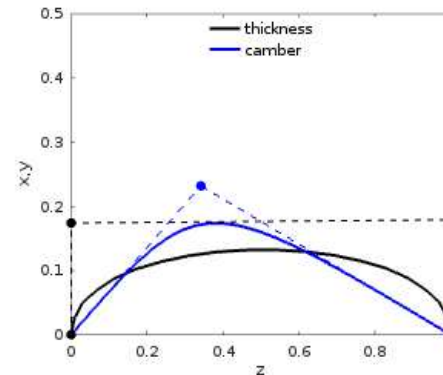
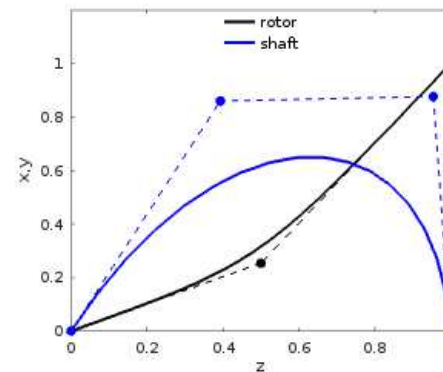
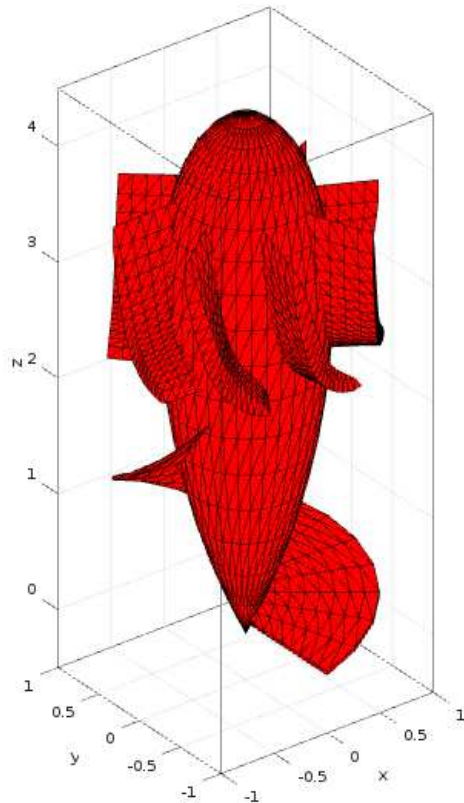
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – kąty skręcenia łopatek kierowniczych



(0.91497, 0.27782)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

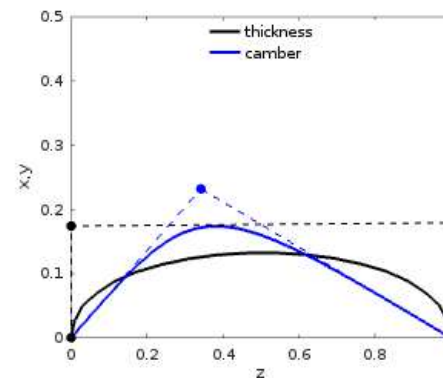
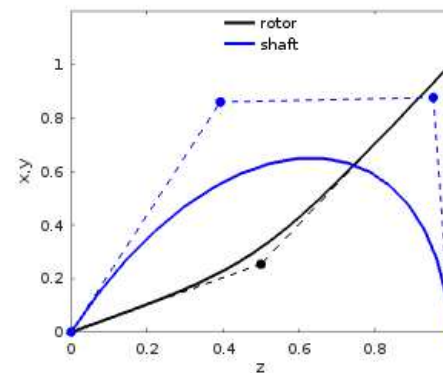
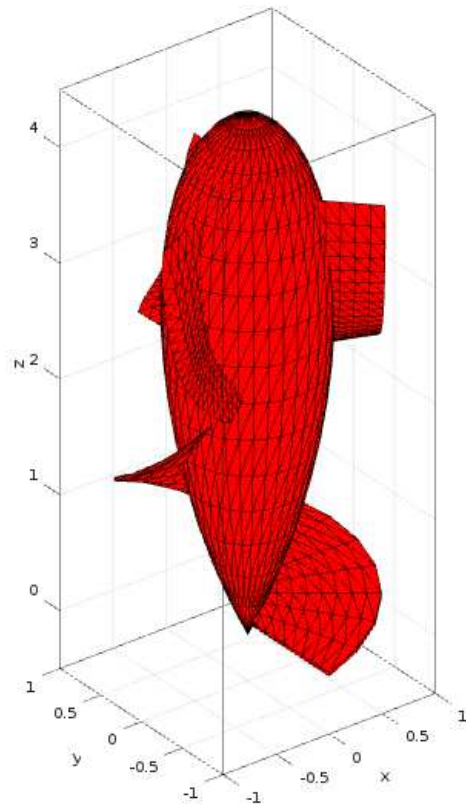
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – liczba łopatek kierowniczych



(0.98512, 0.80344)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

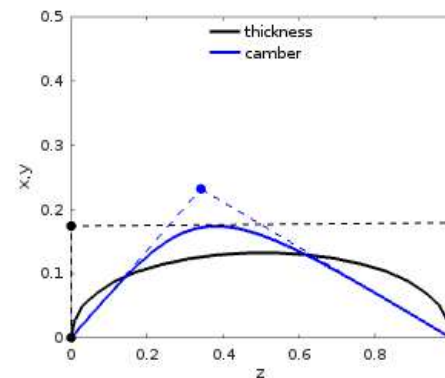
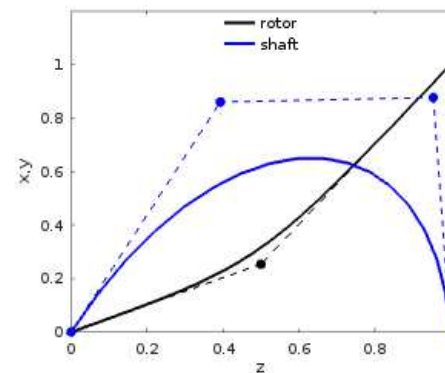
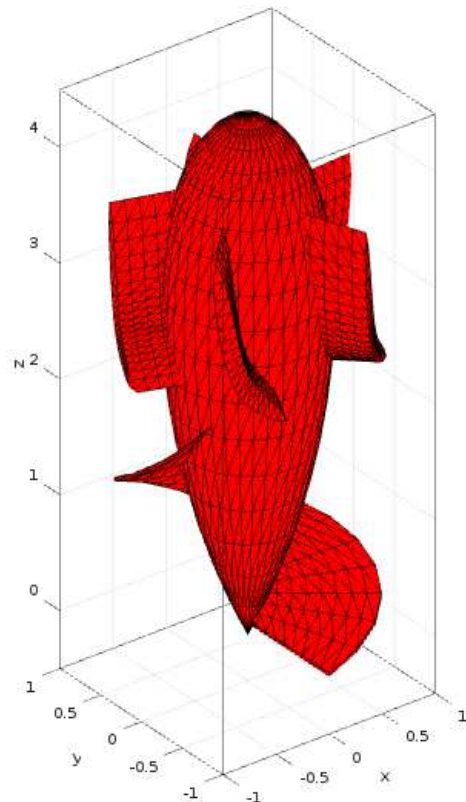
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Geometria – liczba łopatek kierowniczych



(0.1075, 1.1304)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

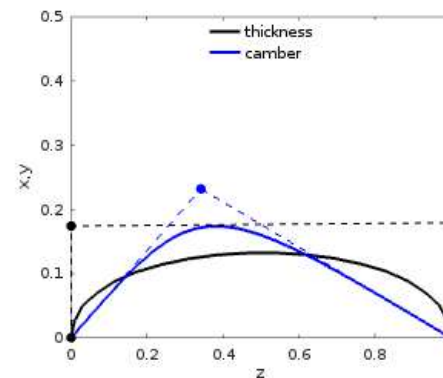
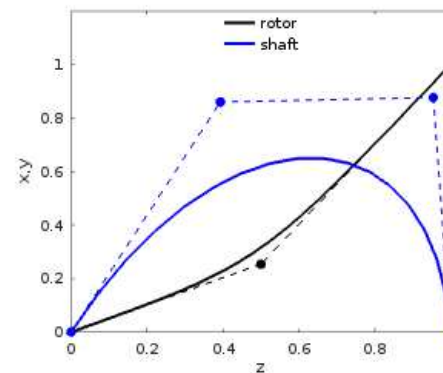
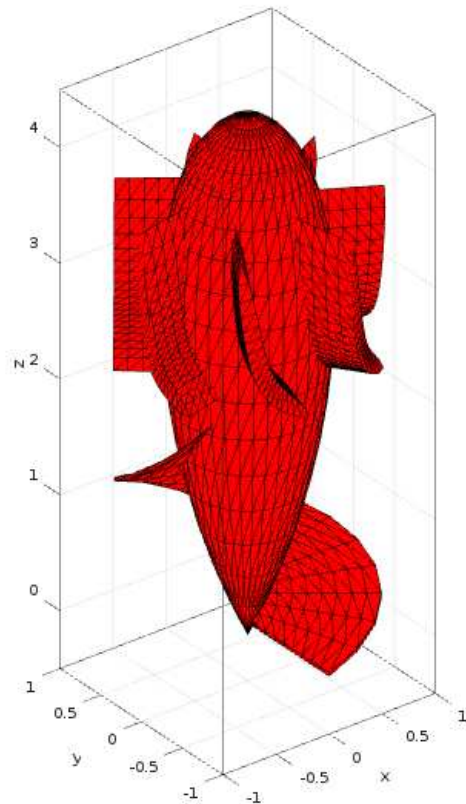
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – liczba łopatek kierowniczych



(0.76629, 0.97135)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

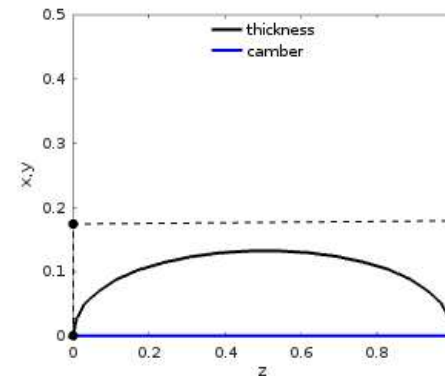
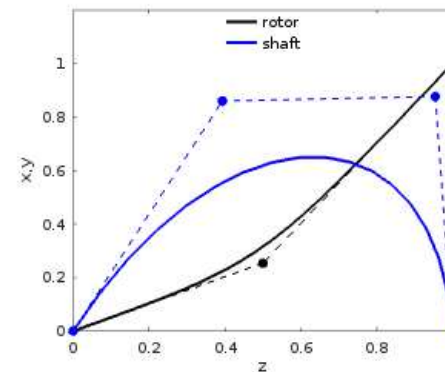
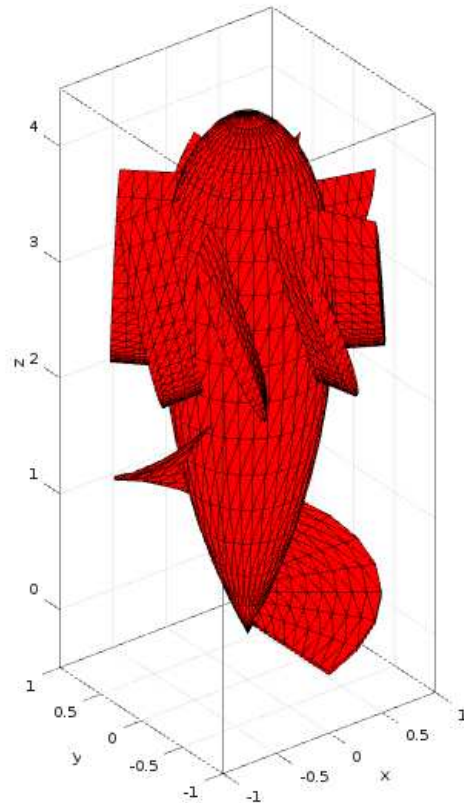
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – kształt łopatki kierowniczej



(0.037086, 0.19093)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

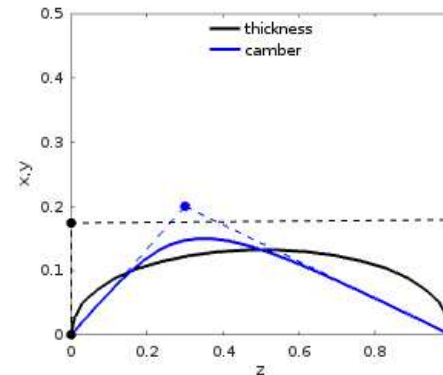
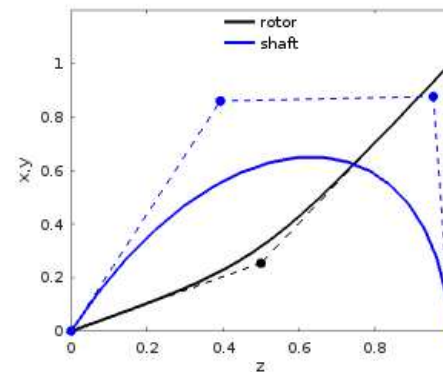
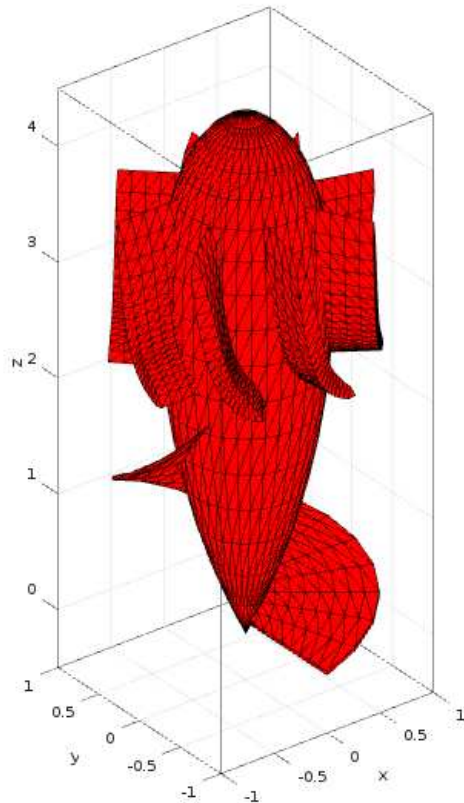
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – kształt łopatki kierowniczej



(0.24605, 0.066807)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

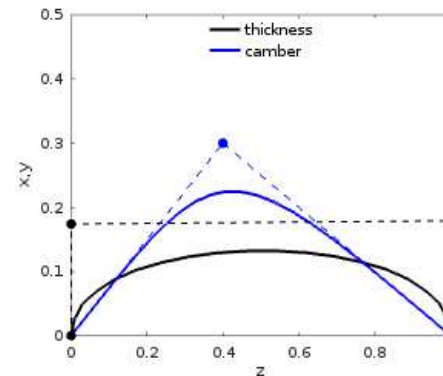
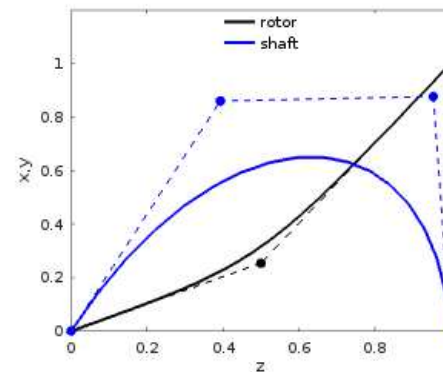
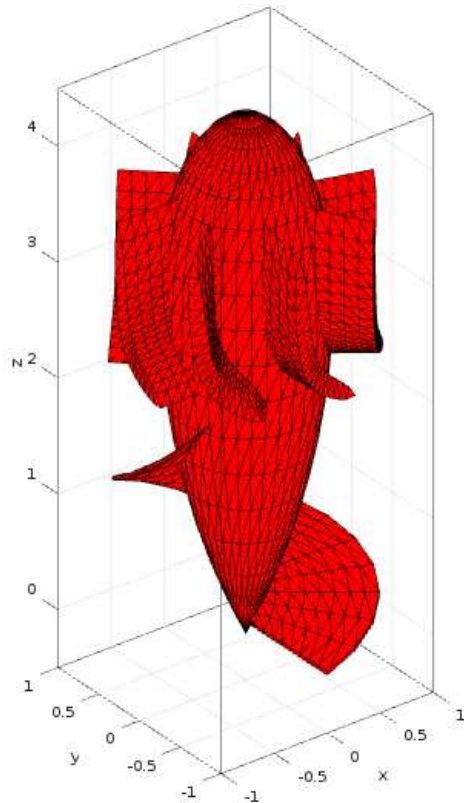
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – kształt łopatki kierowniczej



(-0.3396, 0.53068)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

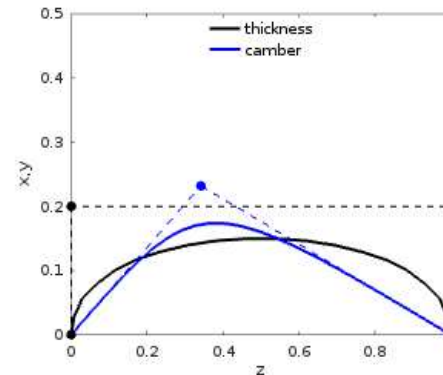
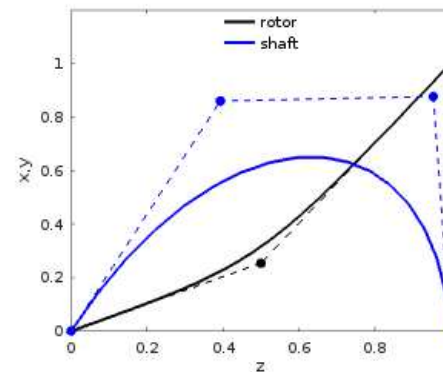
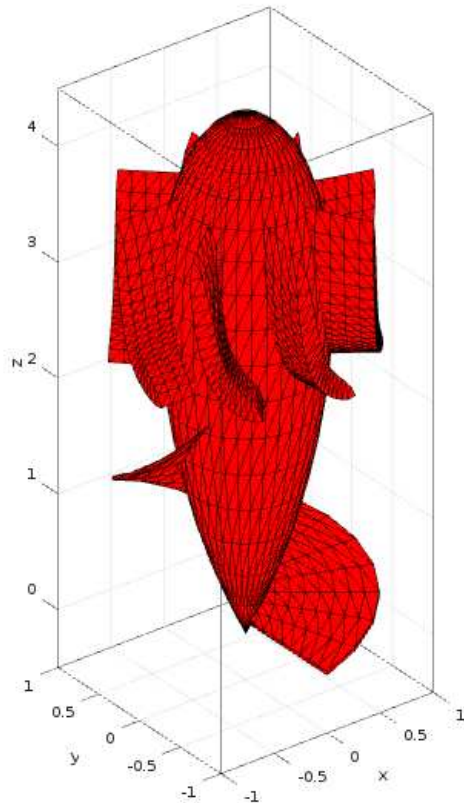
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – grubość łopatki kierowniczej



(0.87496, 0.92418)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

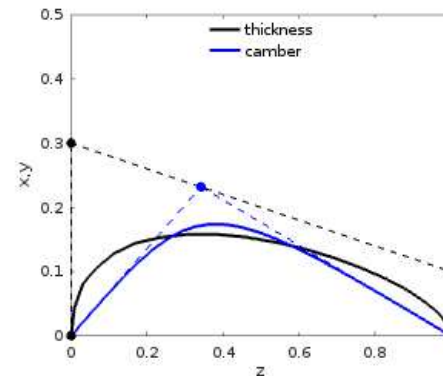
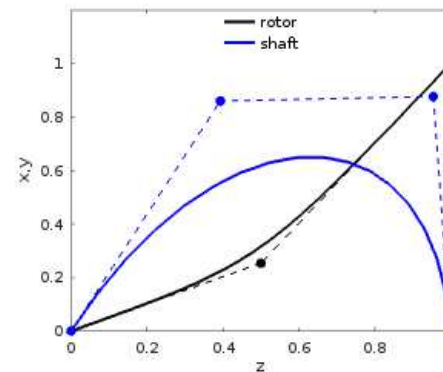
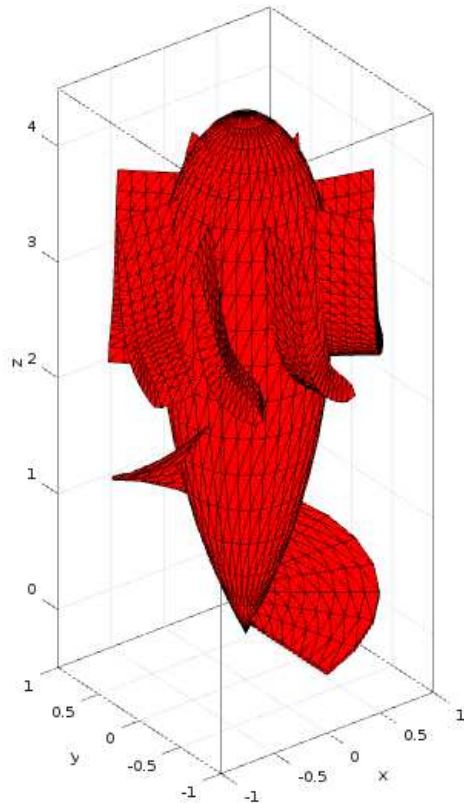
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – grubość łopatki kierowniczej



(0.46, 1.1879)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

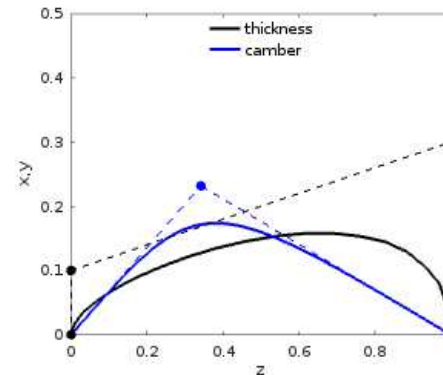
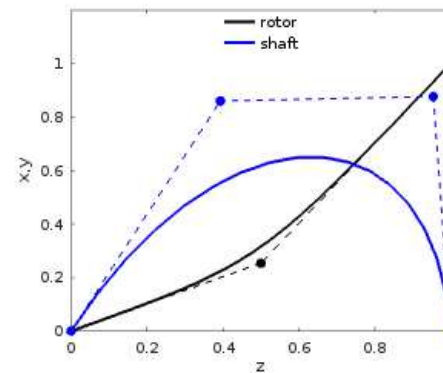
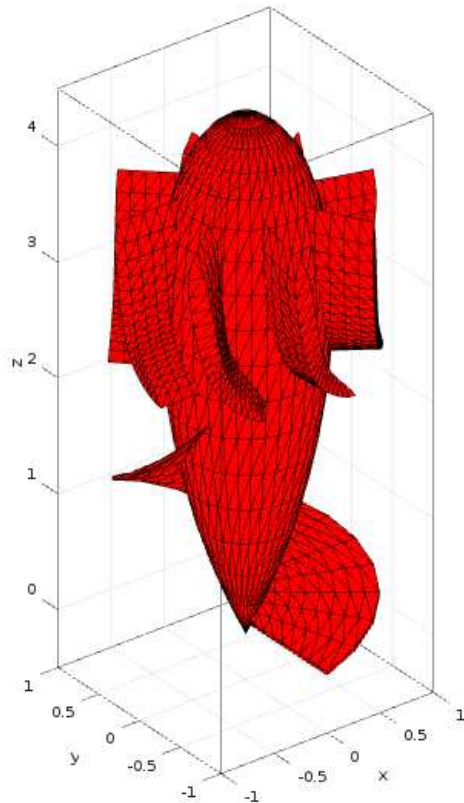
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Geometria – grubość łopatki kierowniczej



(-0.26454, 0.45859)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

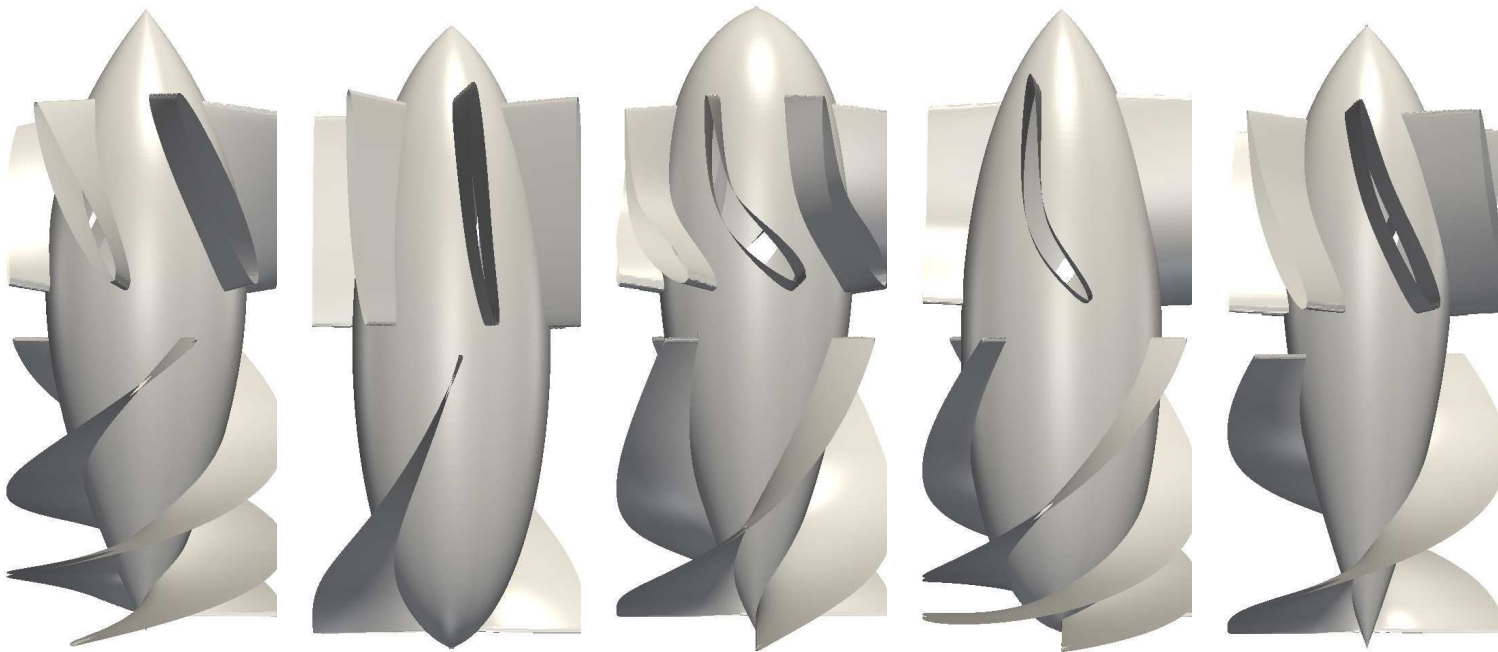
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Geometria – przykładowe losowe kształty



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

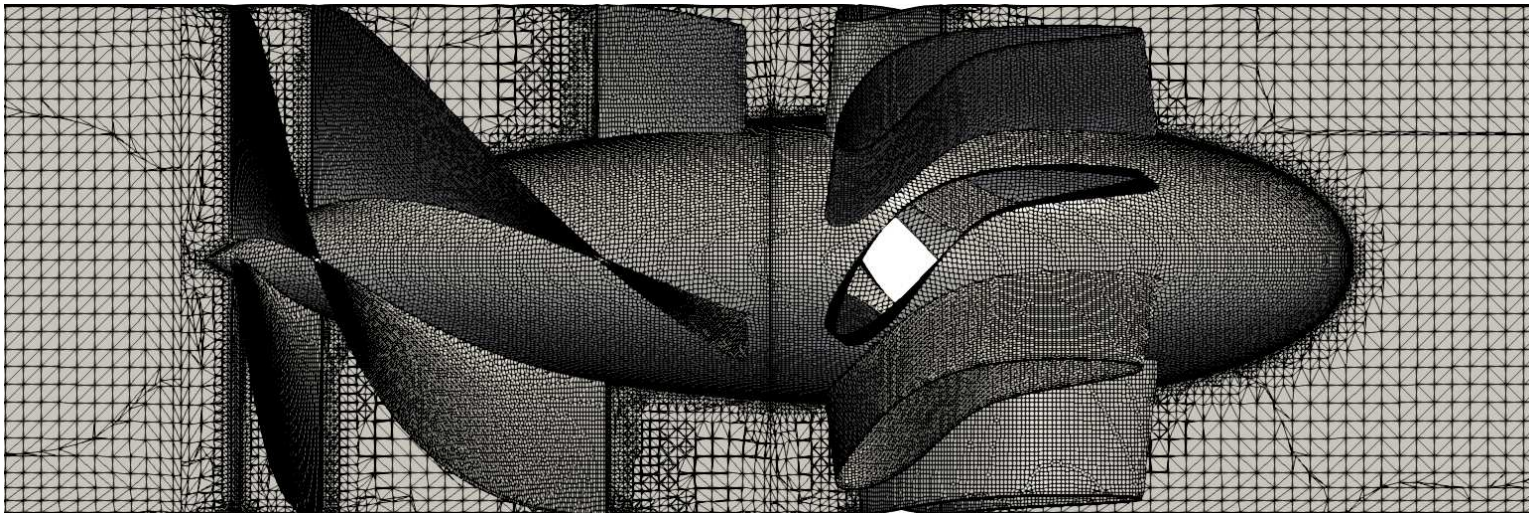
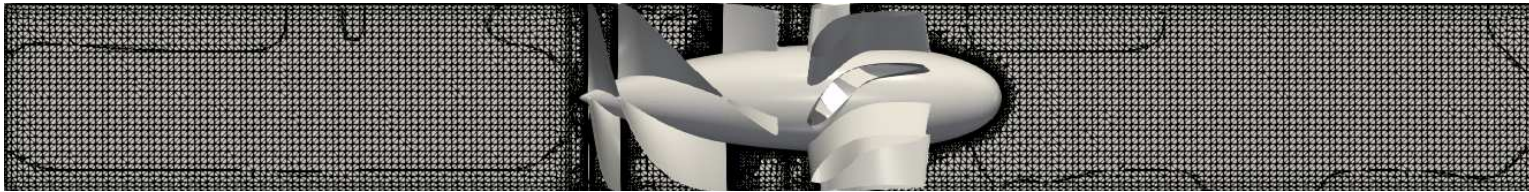
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Dyskretyzacja



Liczba węzłów 1 689 534, liczba objętości 1 495 877

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Jakość siatki

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

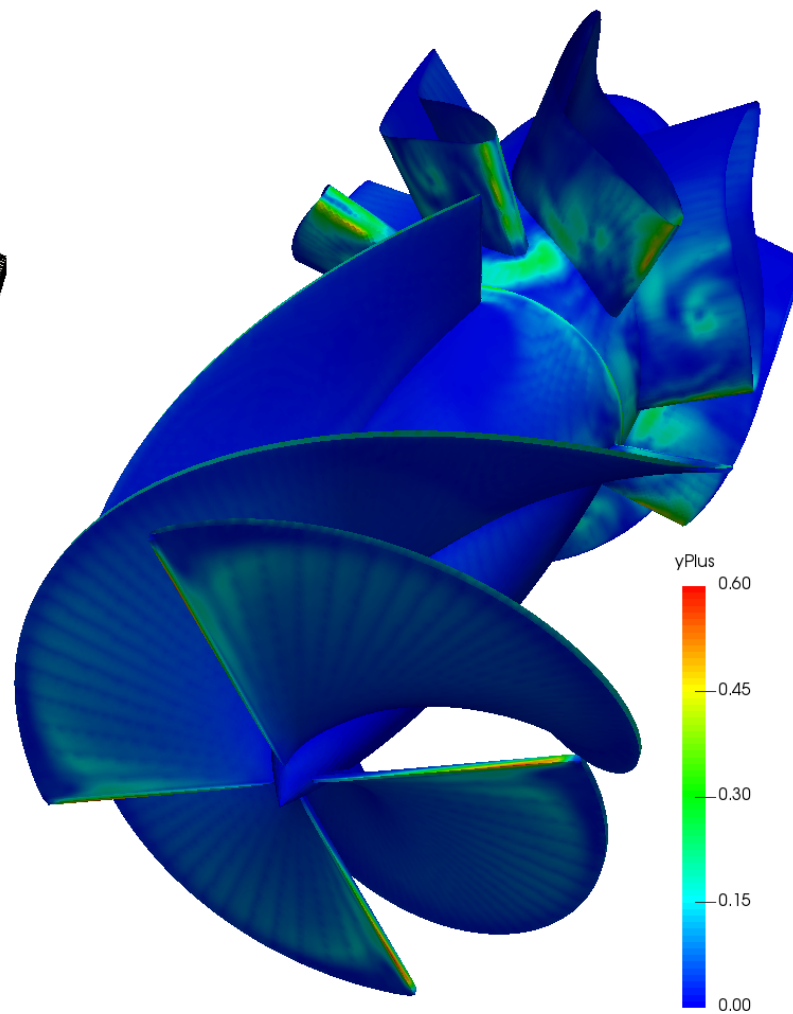
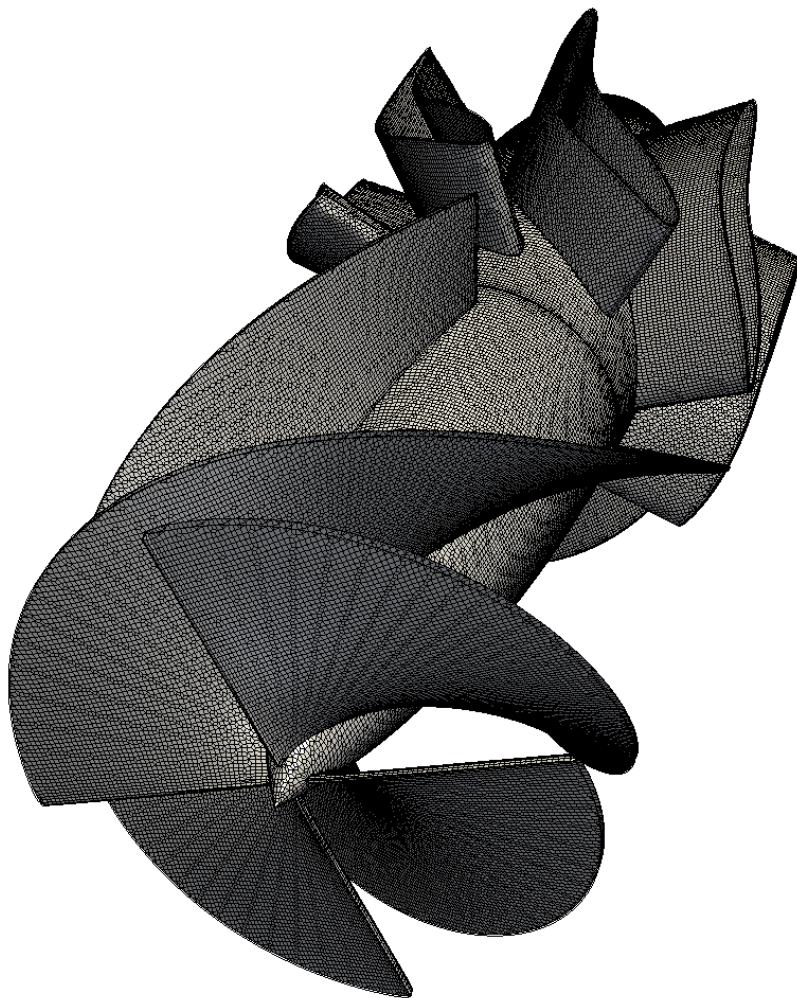
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Warunki brzegowe

- Wlot.  $\dot{V} = 3 \text{ dm}^3/\text{min}$  skierowany prostopadle do wlotu. Intensywność turbulencji 1% iloraz lepkości  $\nu_t/\nu = 1$ ;
- Wylot. Stałe ciśnienie;
- Ściany. Zerowa prędkość na kierownicy. Obroty wirnika  $n = 6000 \text{ obr}/\text{min}$ ;

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Optymalizacja – funkcja celu

Funkcja celu – maksymalny przyrost ciśnienia  $\Delta p$ .

$$\Delta p_0 = \min_{\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^D} (-\Delta p(\mathbf{x})) \quad (288)$$

Globalne minimum funkcji celu wyrażone jest przez

$$\mathbf{g} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^D} (-\Delta p(\mathbf{x})) \quad (289)$$

gdzie  $D = 14$  jest liczbą zmiennych i liczbą ograniczeń przestrzeni  $\Omega$  ( $L_i$  i  $U_i$  są odpowiednio dolnymi i górnymi ograniczeniami poszczególnych zmiennych)

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D : L_i \leq x_i \leq U_i \right\} \quad (290)$$

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

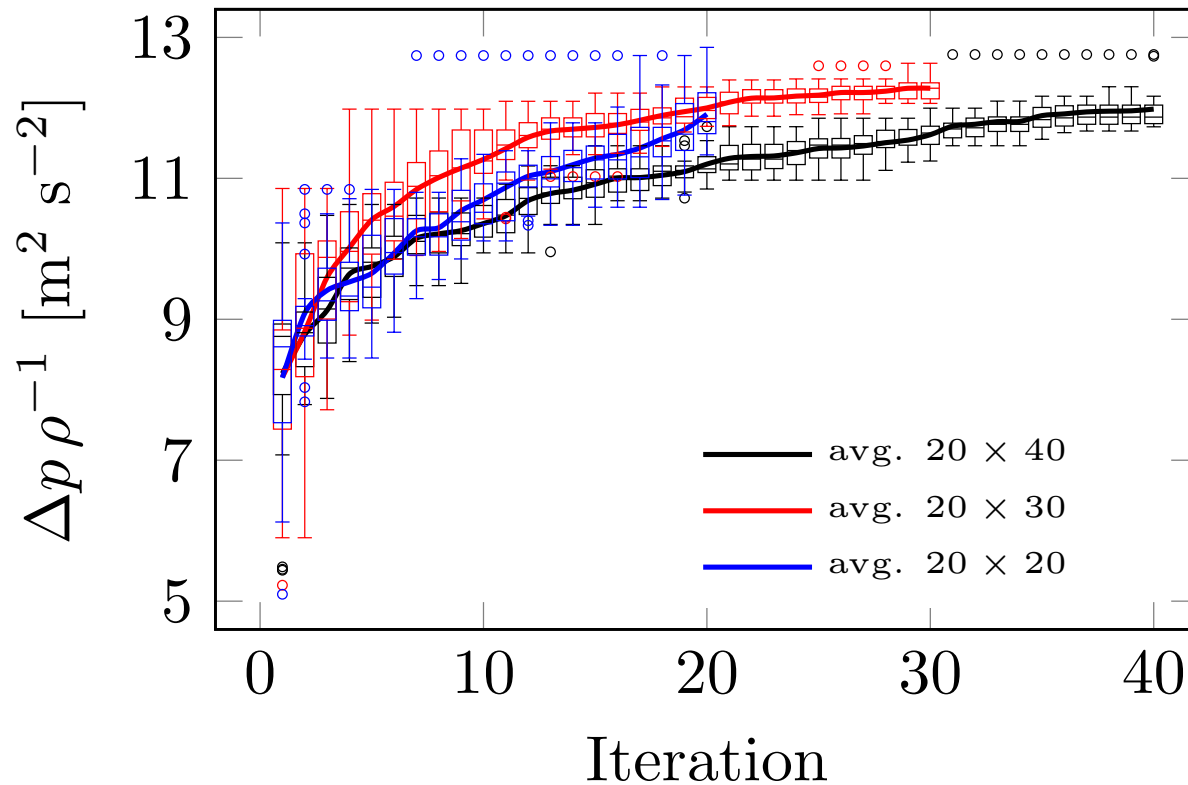
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Optymalizacja – zbieżność



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

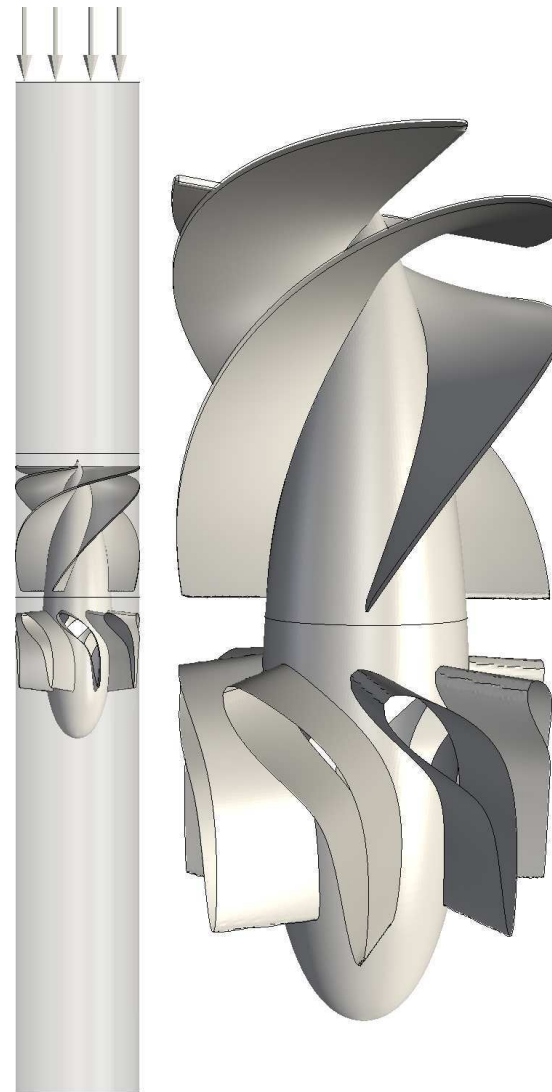
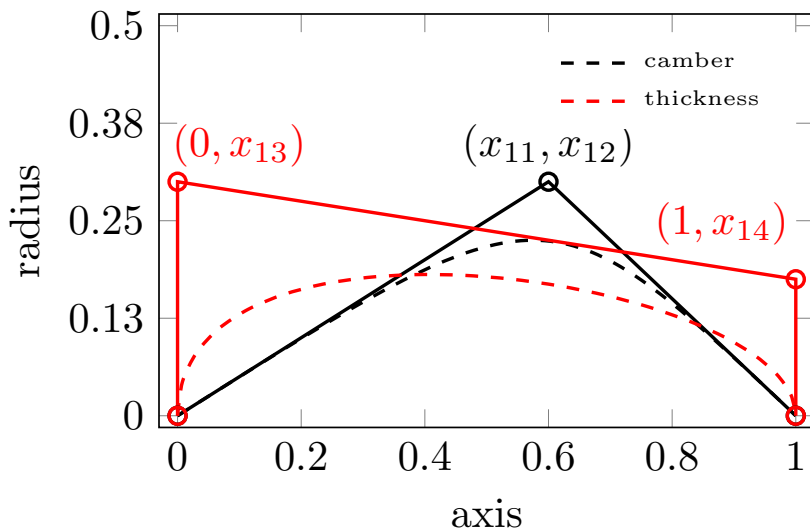
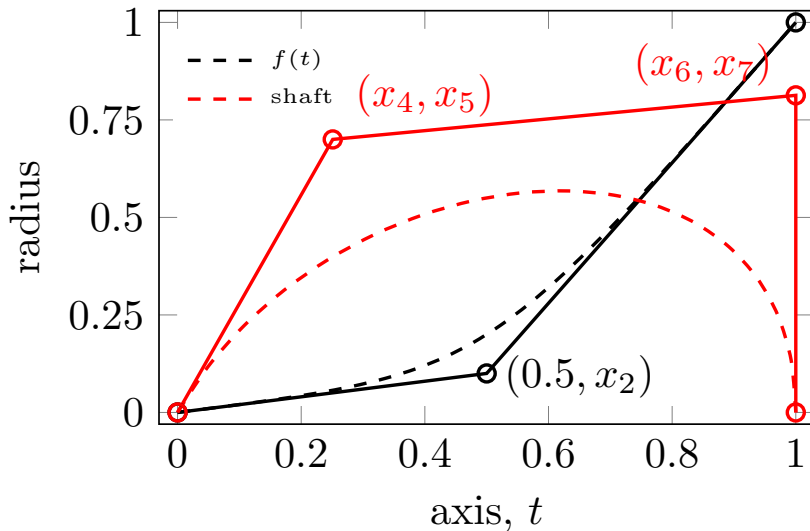
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Wyniki – najlepsze rozwiązanie



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

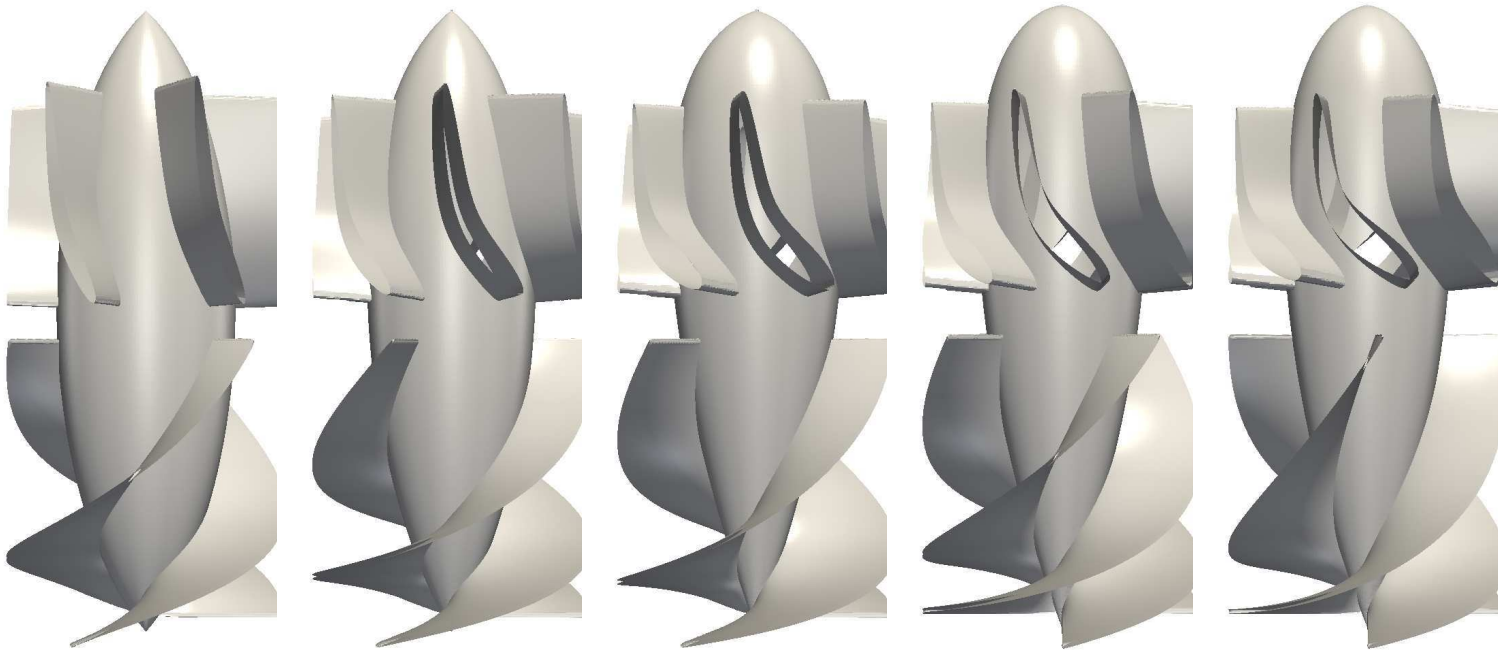
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Wyniki – średniego kształtu



Ewolucja średniego kształtu (iteracje 1, 6, 12, 17 i 20)

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

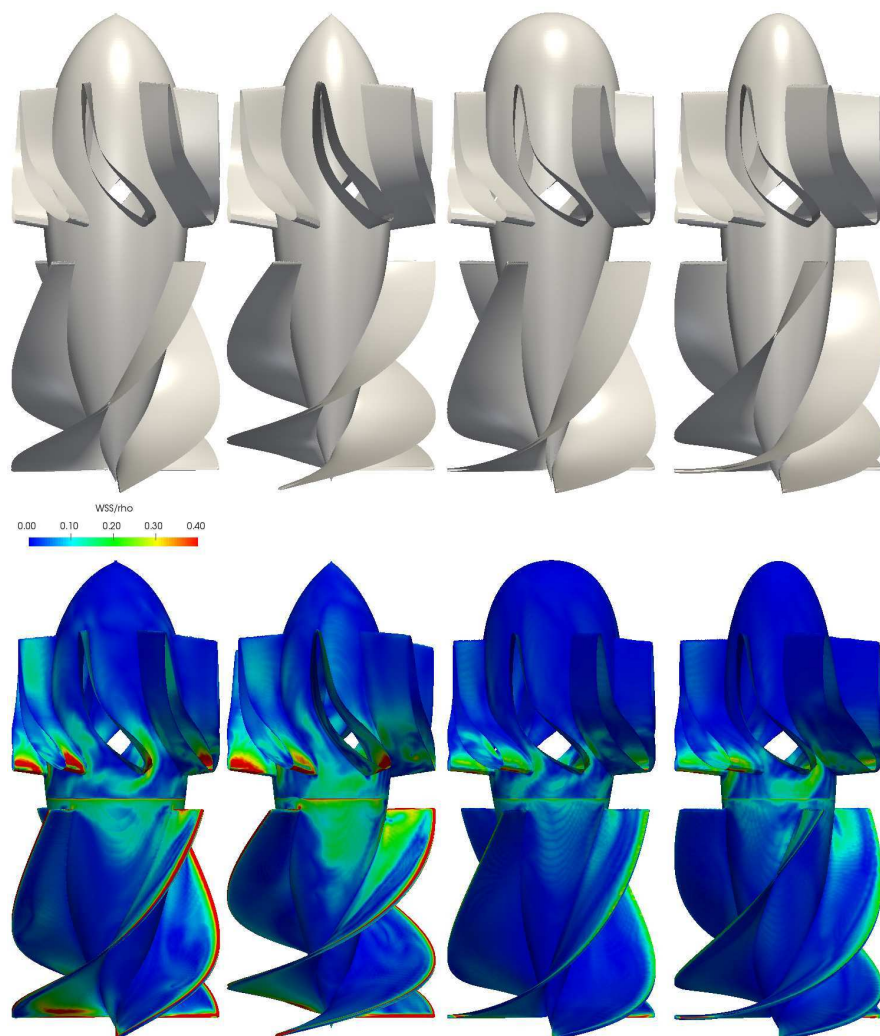
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Wyniki – najlepsze kształty (iter. 1, 2, 7,20)



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

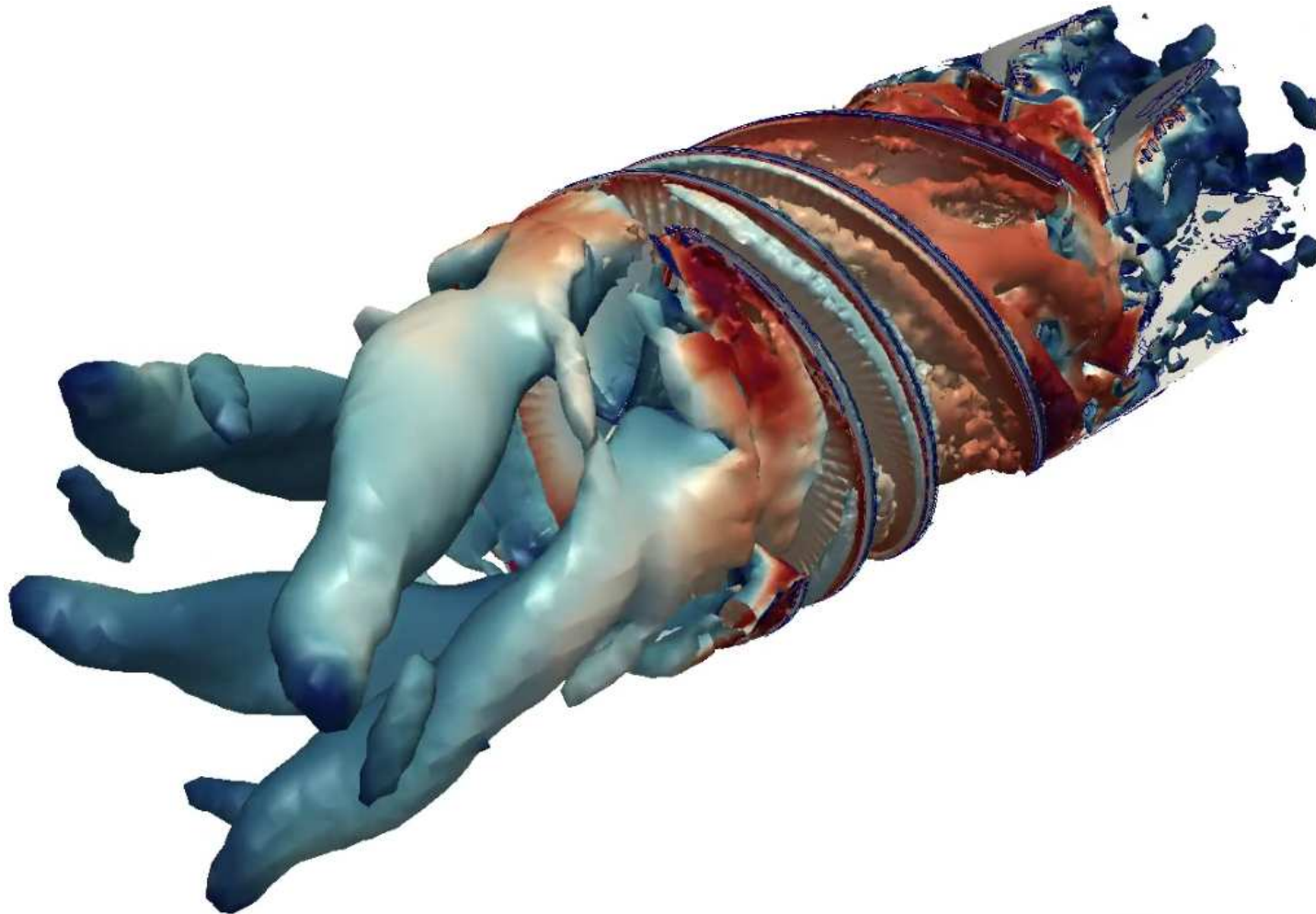
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Przepływ niestacjonarny – przykład



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Przepływy w układzie oddechowym

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

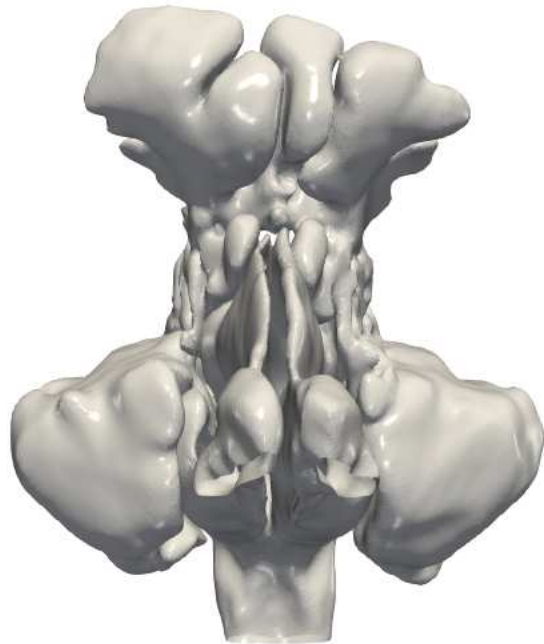
Urządzenia do wspomagania krążenia

**Przepływy w układzie oddechowym**

Laboratorium

Literatura

# Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

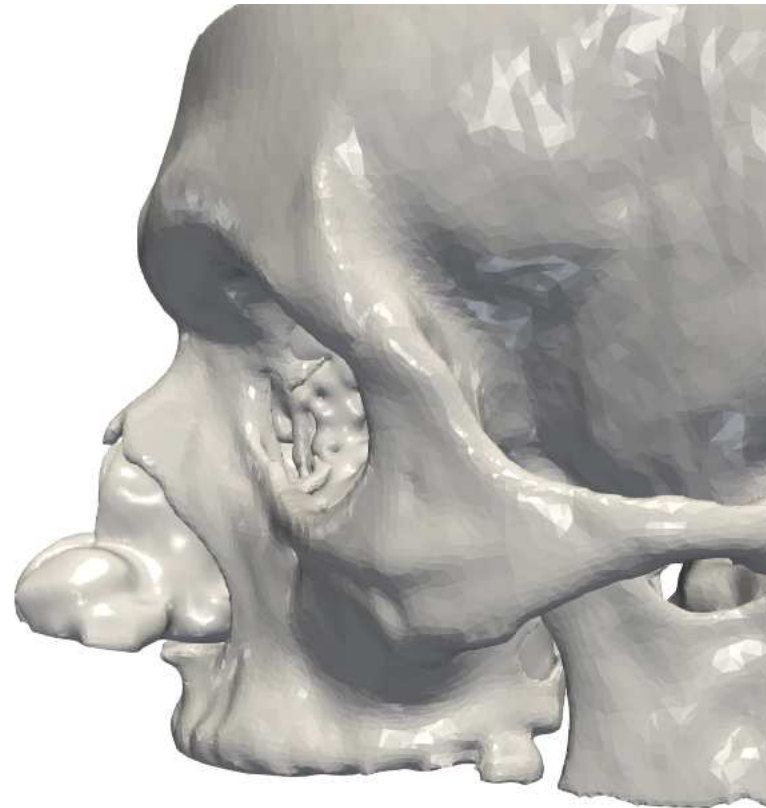
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

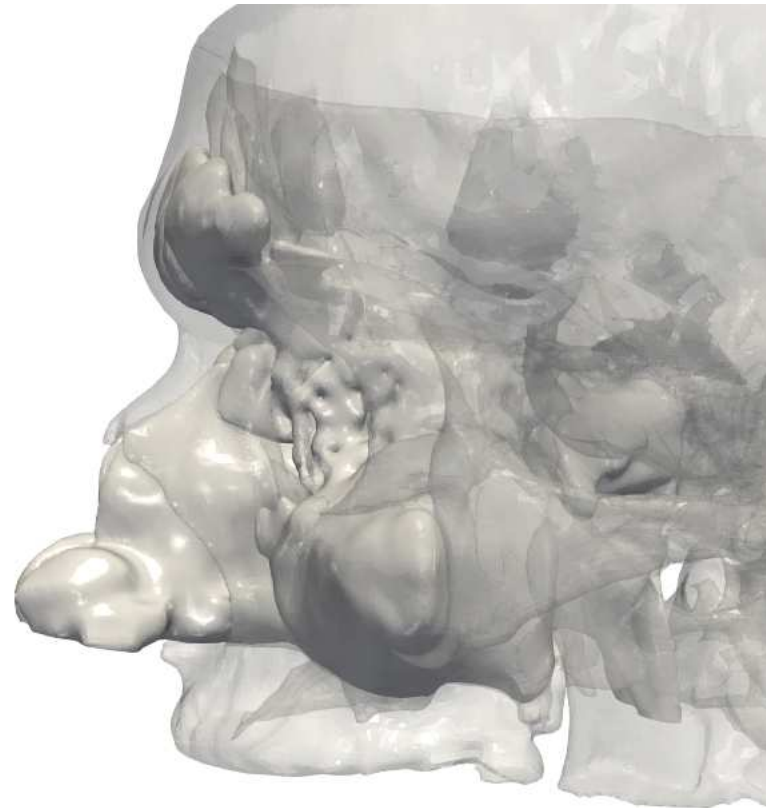
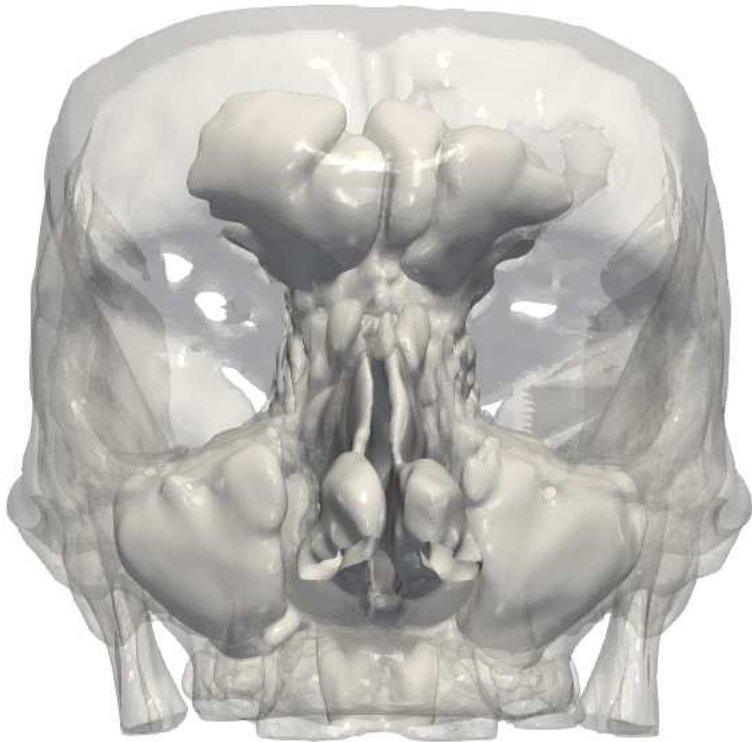
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

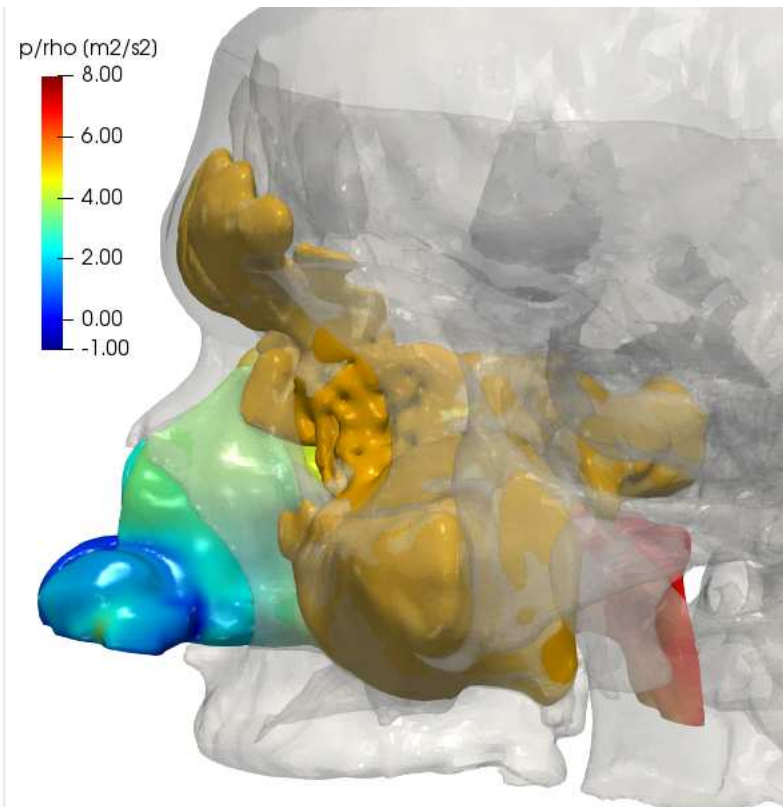
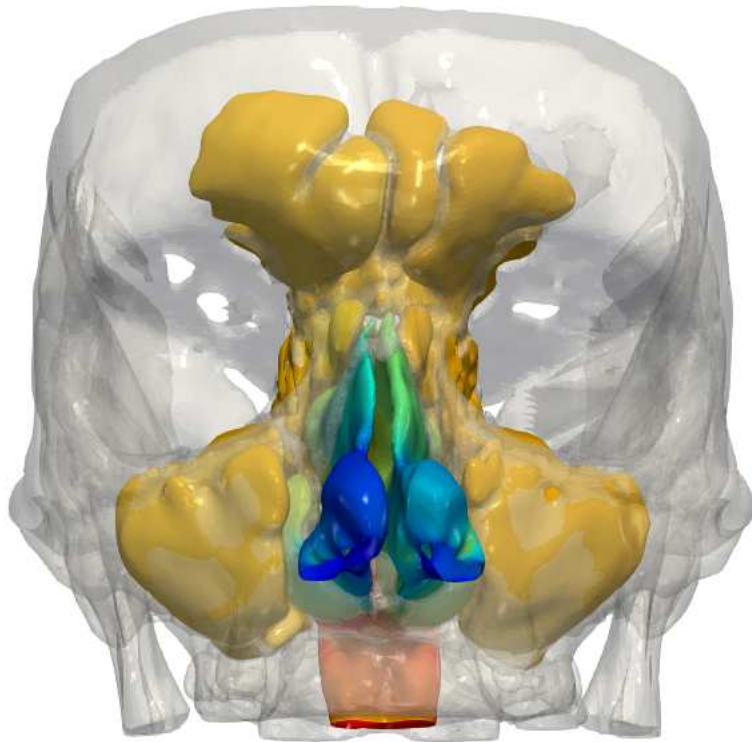
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

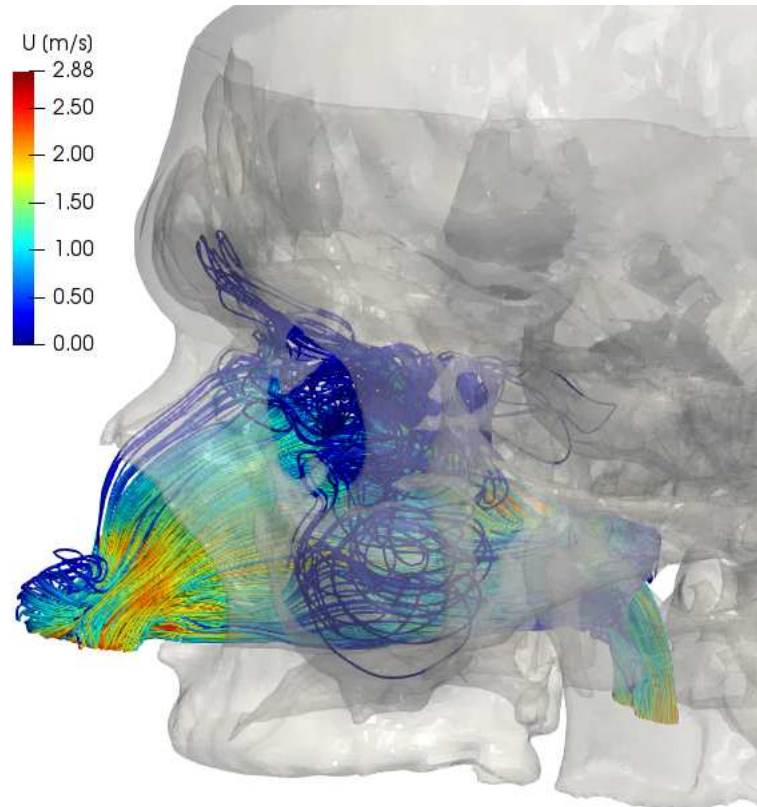
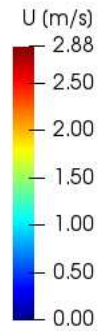
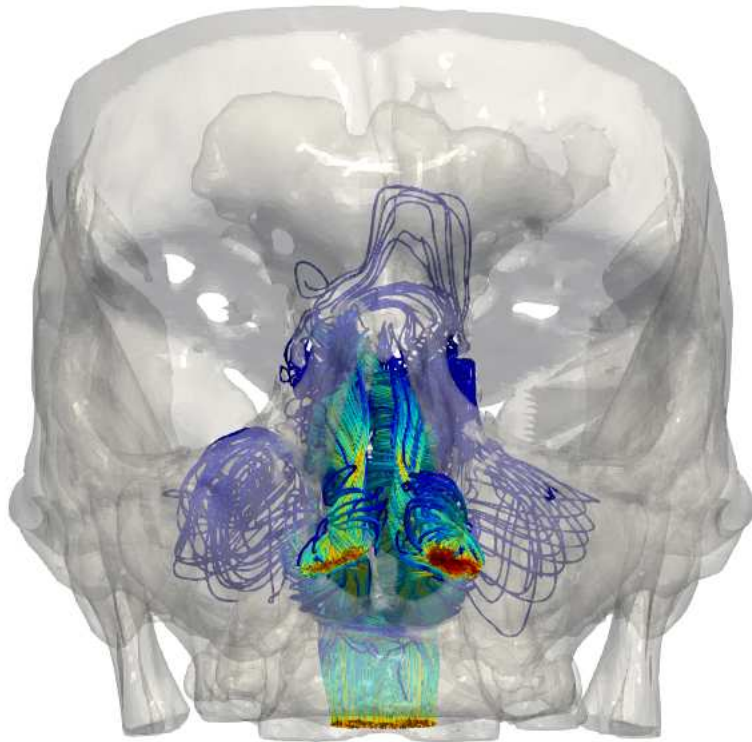
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

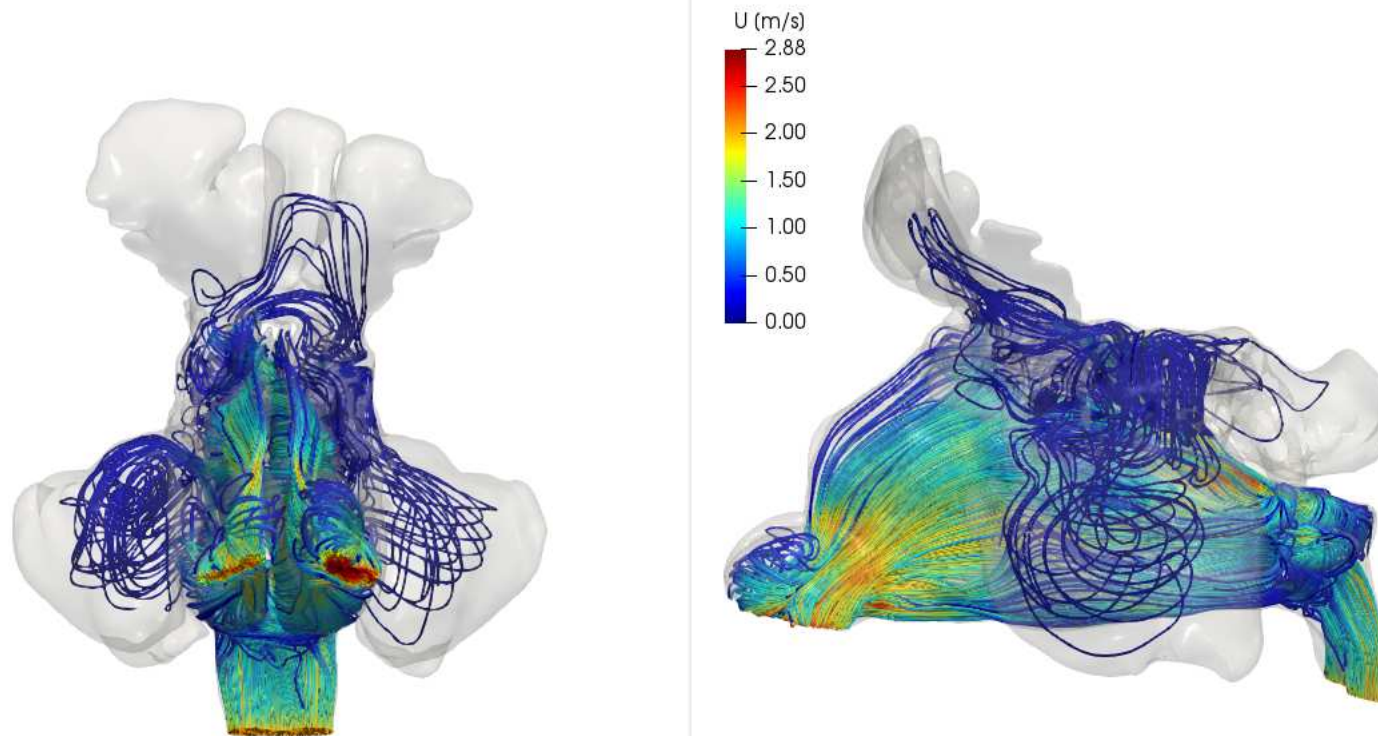
Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura



# Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

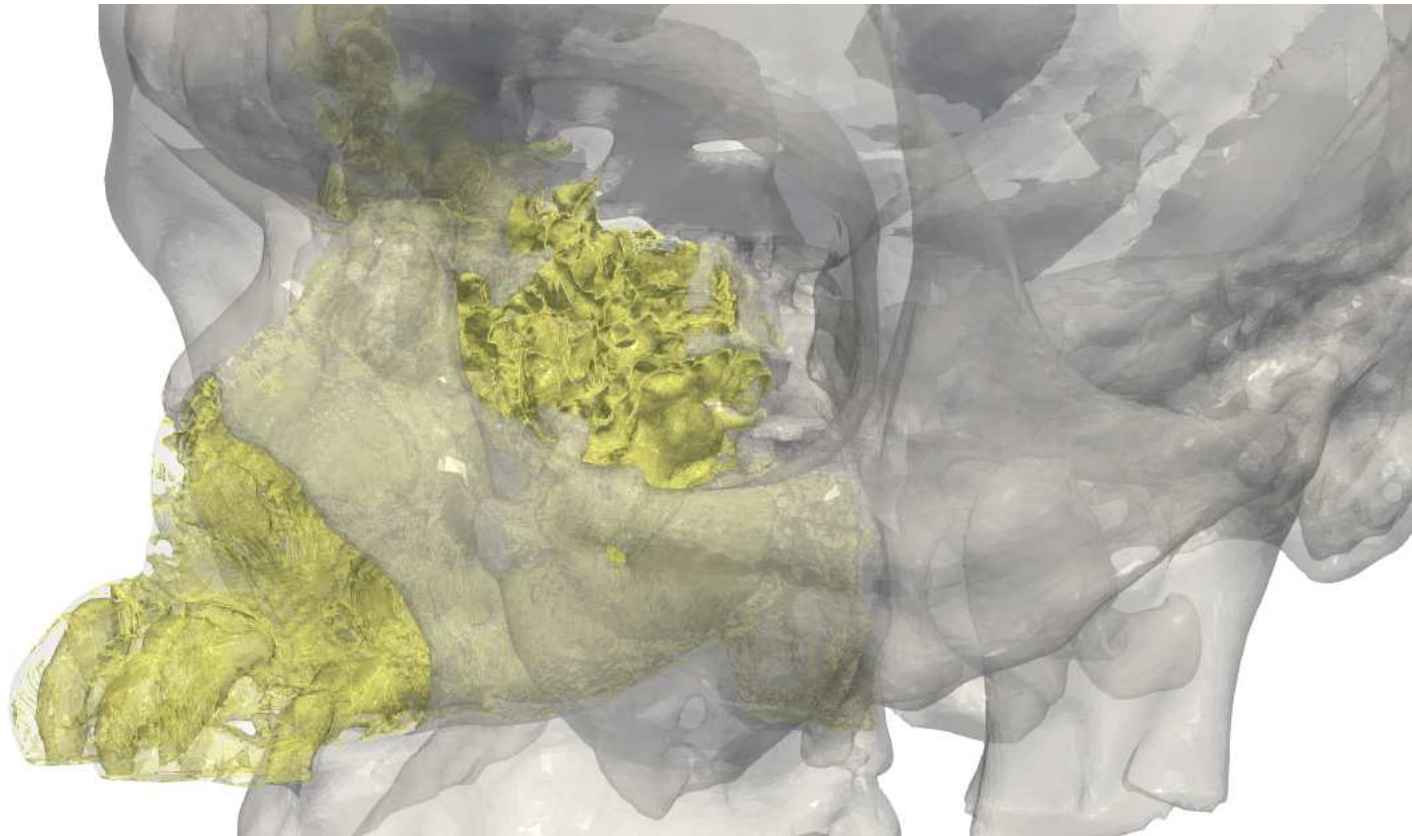
Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

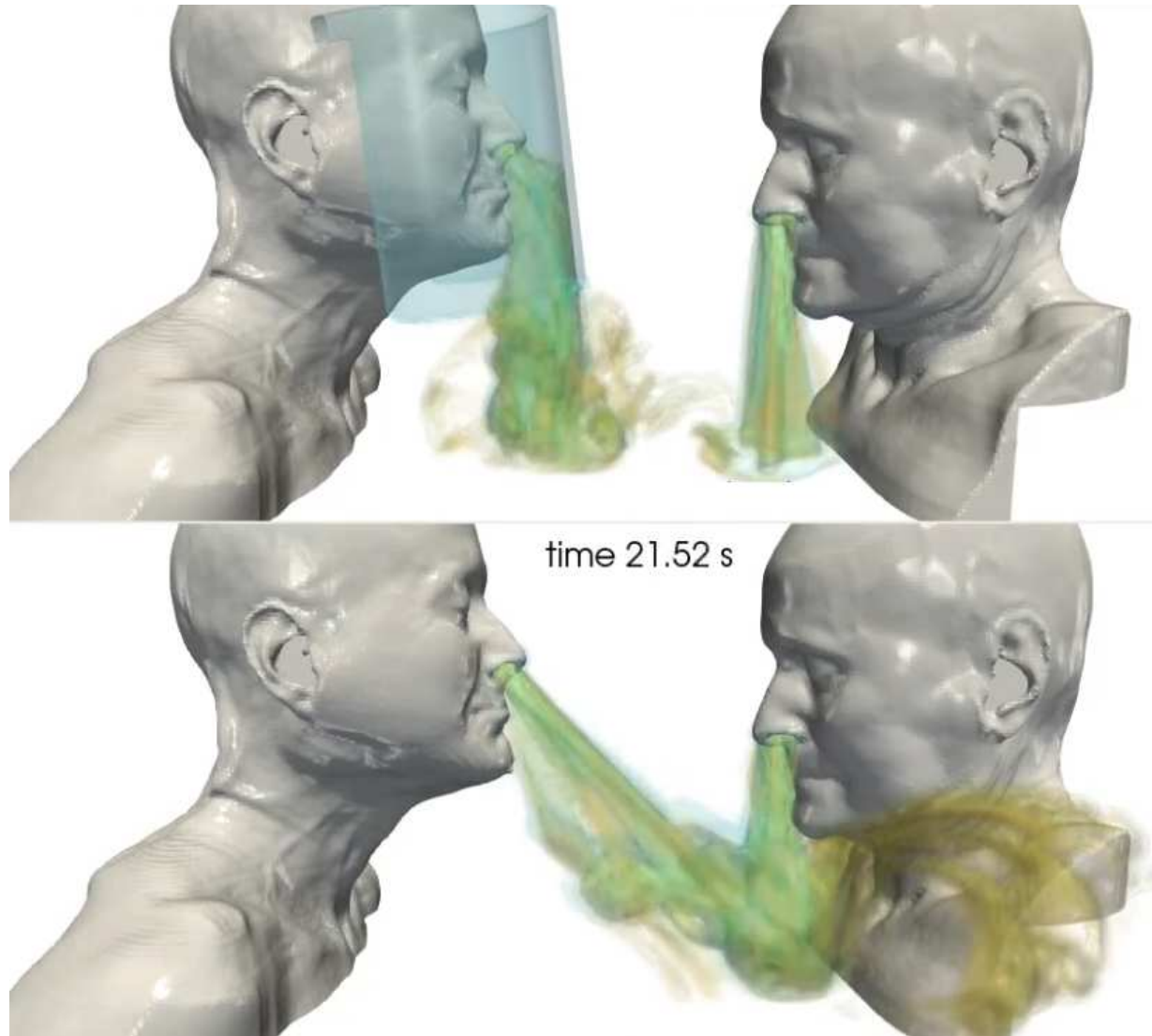
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

# Laboratorium

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

**Laboratorium**

Literatura

# Literatura

Podstawowe  
równania

Bioreologia

Przykładowe  
rozwiązania  
analityczne

Analogia  
mechaniczno-  
elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe  
modelowanie  
przepływów krwi

Urządzenia do  
wspomagania  
krążenia

Przepływy w  
układzie  
oddechowym

Laboratorium

**Literatura**

- [1] Tesch K., *Mechanika Płynów*, Wyd. PG, Gdańsk, 2008
- [2] Tesch K., *On Some Extensions of Murray's Law*, TASK Quarterly 14(3), 227–235, 2010 **LINK**
- [3] Tesch K., *Generalised Herschel Model Applied to Blood Flow Modelling*, TASK Quarterly 16(3-4), 253–262, 2012 **LINK**
- [4] Tesch K., *Wybrane zagadnienia modelowania przepływów krwi...*, Wyd. PG, Gdańsk, 2012
- [5] Tesch K., Kaczorowska K., *Arterial cannula shape optimization by means of the rotational firefly algorithm*, Engineering Optimization 48(3), 497–518, 2015
- [6] Kaczorowska K., Tesch K., *A Short Review of Blood Flow Modelling Methods: From Macro- to Microscales*, TASK Quarterly 21(1), 5–16, 2017 **LINK**
- [7] Tesch K., Kaczorowska K., *The Discrete-Continuous, Global Optimisation of an Axial Flow Blood Pump*, Flow, Turbulence and Combustion 104, 777–793, 2020 **LINK**
- [8] Tesch K., *Podstawy podstaw mechaniki płynów*, online, Gdańsk, 2020 **LINK**

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomaganie krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura