Bioprzepływy/Bioreologia

Krzysztof Tesch

WIMiO
Politechnika Gdańska

Spis zagadnień

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Wstęp

- Znaczenie bioprzepływów
  - Praktyczne (choroby, testowanie urządzeń, wybór metod, transport leków)
  - Poznawcze (wyodrębnienie i zrozumienie zjawisk)
- Rodzaje bioprzepływów
  - Krew i inne ciecze
  - Powietrze (w tym układ oddechowy)
- Wyzwania i trudności
  - Złożoność geometrii przepływu (1D, 3D, MRI, DU, DSA, CT)
  - Złożone i nieliniowe własności naczyń układu krwionośnego
  - Niestacjonarny charakter przepływu
  - Nienewtonowskie cechy krwi

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Podstawowe równania

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Symbole

$$\mathbf{u} = u_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + u_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + u_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1}$$

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\imath}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{\imath}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{6}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{7}$$

lub

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{8}$$

lub

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

Niewiadome ρ, u_x, u_y, u_z

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie zachowania masy – uproszczenia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{10}$$

- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{11}$$

  Niewiadome ρ, u_x, u_y, u_z
- $\rho = \mathrm{const}$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{12}$$

  Niewiadome u_x, u_y, u_z
- $\rho = \mathrm{const}$ i potencjalność $\mathbf{u} = \nabla \varphi \iff \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \tag{13}$$

  Niewiadoma φ

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie zachowania pędu

Dwa rodzaje sił

- masowe

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_V}{\mathrm{d}V} \tag{14}$$

- powierzchniowe

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_S}{\mathrm{d}S} \tag{15}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie zachowania pędu

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{18}$$

Trzy równania skalarne, które odpowiadają

$$m\,\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{19}$$

Niewiadome ρ, u_x, u_y, u_z, σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yx}, σ_{yy}, σ_{yz}, σ_{zx}, σ_{zy}, σ_{zz}

Zwykle $\mathbf{f} = \mathbf{g}$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie zachowania momentu pędu

Z równanie tego wynika, że

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Pozwala to zredukować liczbą niewiadomych o trzy ρ, u_x, u_y, u_z, σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yy}, σ_{yz}, σ_{zz}

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie zachowania energii

Energia całkowita

$$e_c = \frac{u^2}{2} + e + \Pi + \frac{p}{\rho} \tag{21}$$

Równanie zachowania energii

$$\rho \frac{\mathrm{d}e_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}} \cdot \mathbf{u}\right) + \lambda \nabla^2 T \tag{22}$$

Jeżeli $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$ to $\frac{\mathrm{d}e_c}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\frac{u^2}{2} + e + \Pi + \frac{p}{\rho} = \mathrm{const} \tag{23}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie energii wewnętrznej

Energia wewnętrzna $\mathrm{d}e = c_v \, \mathrm{d}T$

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \lambda \nabla^2 T \tag{24}$$

Funkcja dyssypacji

$$\phi_\mu = 2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D2}} \geqslant 0 \tag{25}$$

Niewiadome ρ, u_x, u_y, u_z, σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yy}, σ_{yz}, σ_{zz}, T

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Hipoteza Newtona

Dekompozycja na część odwracalną $-p\boldsymbol{\delta}$ i nieodwracalną (lepką) $\boldsymbol{\tau}$ w postaci

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{26}$$

Dla płynów newtonowskich

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{27}$$

gdzie

$$\mathbf{D}^{\mathrm{D}} = \mathbf{D} - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D} \tag{28}$$

Zamiast sześciu niewiadomych σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yy}, σ_{yz}, σ_{zz} mamy teraz tylko dwie p, μ

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równania Naviera–Stokesa i Eulera

- $\rho = \mathrm{var},\ \mu = \mathrm{var}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \left(2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}}\right) \tag{29}$$

- $\rho = \mathrm{const},\ \mu = \mathrm{var}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{30}$$

- $\rho = \mathrm{var},\ \mu = \mathrm{const}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \tfrac{1}{3}\mu \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) \tag{31}$$

- $\rho = \mathrm{const},\ \mu = \mathrm{const}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{32}$$

- $\mu = 0$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p \tag{33}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ i $\mu = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{34}$$

i równanie zachowania pędu (Naviera–Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{35}$$

Daje to cztery równania skalarne i cztery niewiadome p, u_x, u_y, u_z.

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ i $\mu = f(T)$ mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{36}$$

równanie zachowania pędu (Naviera–Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{37}$$

i równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T \tag{38}$$

Daje to pięć równań skalarnych i pięć niewiadomych T, p, u_x, u_y, u_z.

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu ściśliwego $\rho = \mathrm{var}$, $\mu = \mathrm{const}$ i $c_v = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{39}$$

równanie zachowania pędu (Naviera–Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\, \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \tfrac{1}{3}\mu \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u} \right) \tag{40}$$

równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \lambda \nabla^2 T \tag{41}$$

i równanie stanu $p = \rho R T$. Daje to sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych ρ, T, p, u_x, u_y, u_z.

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu ściśliwego $\rho = \mathrm{var}$, $\mu = f_1(T)$ i $c_v = f_2(T)$ mamy równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{42}$$

równanie zachowania pędu (Naviera–Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\, \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \left(2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}}\right) \tag{43}$$

równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \lambda \nabla^2 T \tag{44}$$

i równanie stanu $p = \rho R T$. Daje to osiem równań skalarnych i niewiadomych ρ, T, p, u_x, u_y, u_z, μ, c_v.

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Domknięte układy równań

Płyn nienewtonowski.
Równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{45}$$

Równanie Naviera–Stokesa

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{46}$$

Wzór na lepkość według wybranego modelu

$$\mu = f(\gamma) \tag{47}$$

Daje to pięć równań skalarnych i pięć niewiadomych p, u_x, u_y, u_z, μ.

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Warunki na konturach opływanych

- Warunek nieprzenikalności $u_n = 0$ na brzegu dla przepływów lepkich i nielepkich
- Warunek adhezji $u_l = 0$ dla płynów lepkich (dodatkowy). Czyli $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na brzegu
- Jeżeli mamy przepływ z wymianą ciepła, to możemy zadać jeden z warunków:
  - Dirichleta $T = f(x, y, z, t)$
  - Neumanna $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f(x, y, z, t)$ lub $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ (adiabatyczność)
  - mieszany $\alpha T - \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f(x, y, z, t)$ (Dirichlet + Neumann)

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Pozostałe warunki brzegowe

- Na wlocie podajemy rozkład prędkości $\mathbf{u} = f(x, y, z, t)$ i temperatury $T = f(x, y, z, t)$ jeżeli mamy wymianę ciepła. Dla przepływów ściśliwych dodatkowo ciśnienie p lub gęstość ρ.
- Na wylocie powinno się zadawać składowe normalną $(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ i styczną $(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \hat{\boldsymbol{l}}$ wektora naprężenia $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Te informacje są na ogół niedostępne. Uproszczone warunki na wylocie mają postać: $p = f(x, y, z, t)$. Jeżeli jest wymiana ciepła, to na ogół zakłada się, że $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$.
- warunek symetrii $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ dla wszystkich skalarów φ
- warunek periodyczności $\varphi_A(P) = \varphi_B(P')$ dla periodycznych powierzchni A i B

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Bioreologia

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Cechy krwi

- Lepkość plazmy
- Hematokryt
- Odkształcalność
- Agregacja czerwonych krwinek
- Wpływ temperatury na lepkość krwi
- Granica płynięcia τ_0

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

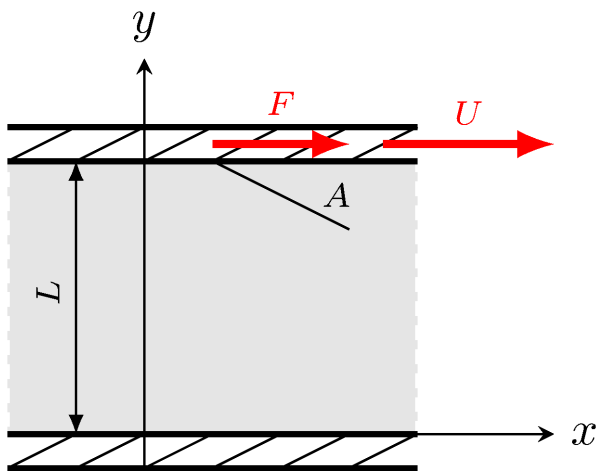
Płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \tag{48}$$

- Płyny newtonowskie
- Płyny nienewtonowskie
  - Uogólnione płyny newtonowskie
  - Modele płynów typu różniczkowego
  - Modele płynów typu całkowego
  - Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Płyny newtonowskie

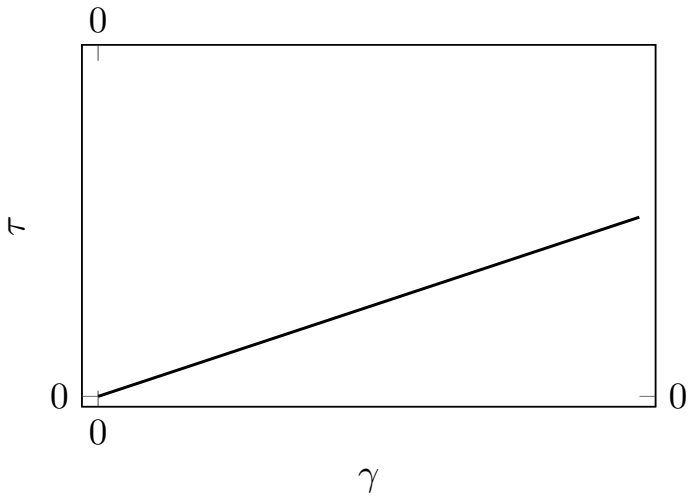


$$\frac{F}{A} \sim \frac{U}{L} \tag{49}$$

$$\tau_{xy} \sim \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{50}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{51}$$

$$\tau = \mu \gamma \tag{52}$$



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{53}$$

$\boldsymbol{\tau} = f(\nabla \mathbf{u})$, ale $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$, więc $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{D})$
Z twierdzenia Cayleya–Hamiltona

$$\boldsymbol{\tau} = a_0\boldsymbol{\delta} + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 \tag{54}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + a_2\mathbf{D}^2 \tag{55}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Płyny newtonowskie

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + a_2 \mathbf{D}^2$$

$$\tau_{xy} = a_0\, 0 + a_1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \left(a_2 \mathbf{D}^2\right)_{xy} \tag{56}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{57}$$

$a_1 = 2\mu,\ a_2 = 0$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 \tag{58}$$

$a_1 = 2\mu,\ a_2 = 0$

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D} \tag{59}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{60}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + a_0)\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D} \tag{61}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + a_0)\,\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{62}$$

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = (-p + a_0)\operatorname{tr}\boldsymbol{\delta} + 2\mu\operatorname{tr}\mathbf{D} \tag{63}$$

$$p = -\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}, \quad \operatorname{tr}\boldsymbol{\delta} = 3, \quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

$$-3p = (-p + a_0)\,3 \tag{64}$$

$$a_0 = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{65}$$

Ostatecznie...

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \tag{66}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Uogólnione płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \tag{67}$$

- Płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie $\boldsymbol{\tau} \neq 2\mu\mathbf{D}$
  - Uogólnione płyny newtonowskie
  - Modele płynów typu różniczkowego
  - Modele płynów typu całkowego
  - Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

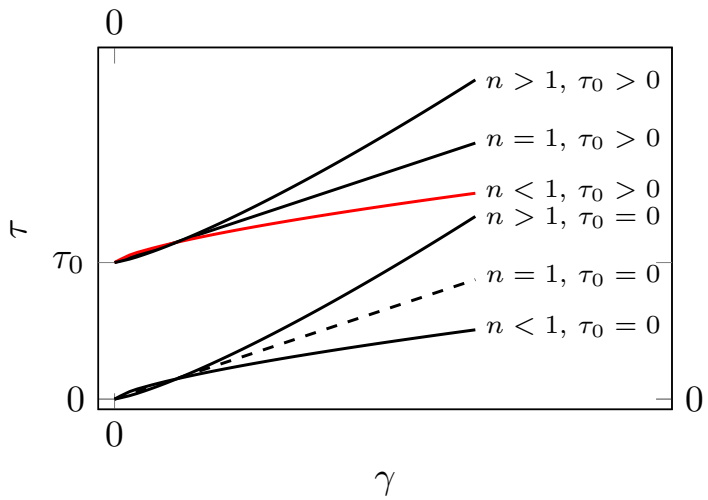
Uogólnione płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D} \tag{68}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu(\gamma)\mathbf{D} \tag{69}$$

Krzywa płynięcia

$$\tau = \mu(\gamma)\gamma \tag{70}$$



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

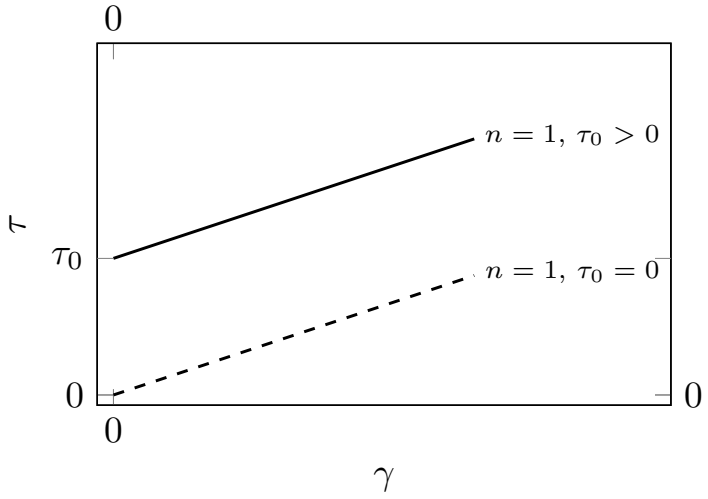
Model Binghama

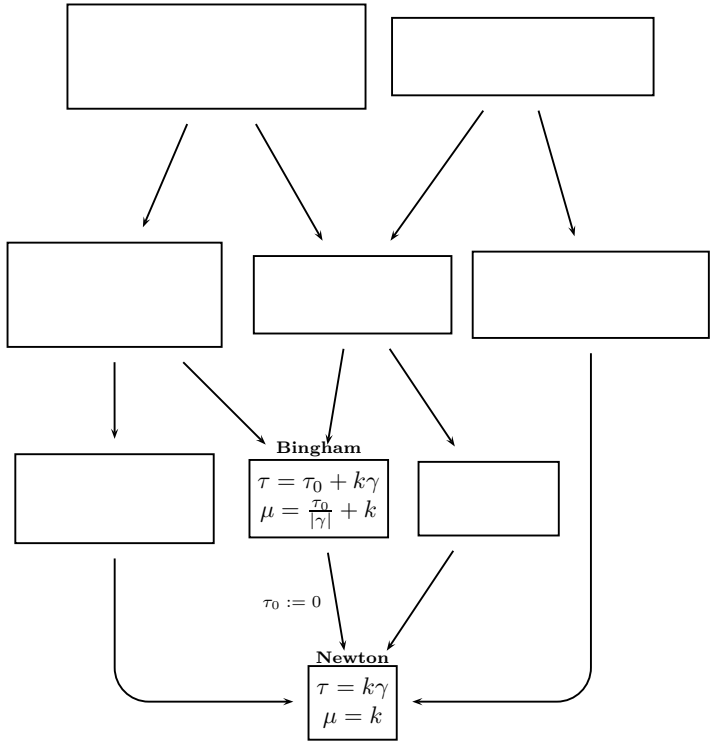
$$\tau = \tau_0 + k\gamma \tag{71}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau_0}{|\gamma|} + k \tag{72}$$

k – stała konsystencji

τ_0 – granica płynięcia





Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

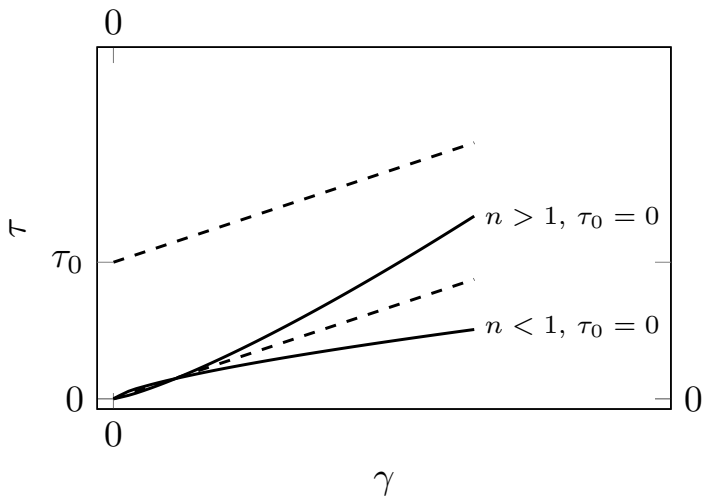
Model Ostwalda–de Waele

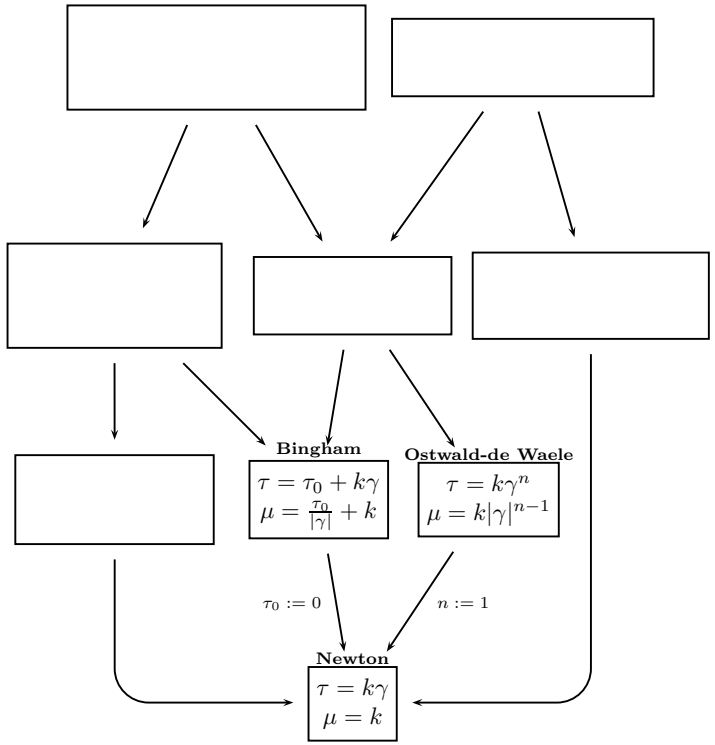
$$\tau = k\gamma^n \tag{73}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = k|\gamma|^{n-1} \tag{74}$$

n – bezwymiarowy parametr reologiczny

k – stała konsystencji





Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Ostwalda–de Waele – uogólnienia

$$\mu = k|\gamma|^{n-1} \tag{75}$$

dla $n < 1$ mamy $\lim_{\gamma\to\infty} \mu = 0$.

Modyfikacja modelu Ostwalda–de Waele

$$\mu = \begin{cases} \mu_0, & \gamma < \gamma_{min} \\ k|\gamma|^{n-1}, & \gamma \in [\gamma_{min}, \gamma_{max}] \\ \mu_\infty, & \gamma > \gamma_{max} \end{cases} \tag{76}$$

ale za to mamy dwa dodatkowe parametry μ_0 i μ_∞.

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Ostwalda–de Waele – uogólnienia

$$\mu = k|\gamma|^{n-1} \tag{77}$$

Wymagania/zalety:
$\lim_{\gamma\to 0}\mu = \mu_0$ oraz
$\lim_{\gamma\to +\infty}\mu = \mu_\infty$.

Przykładowa klasa funkcji

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = f\left(k|\gamma|\right) \tag{78}$$

Wady: dodatkowe parametry μ_0, μ_∞ i ewentualnie kolejne.

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Ostwalda–de Waele – uogólnienia

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = f\left(k|\gamma|\right) \tag{79}$$

- model Crossa

$$\mu = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (k|\gamma|)^n} \tag{80}$$

- Model Birda–Carreau

$$\mu = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\left(1 + (k|\gamma|)^2\right)^{\frac{1-n}{2}}} \tag{81}$$

- Carreau–Yasudy

$$\mu = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\left(1 + (k|\gamma|)^a\right)^{\frac{1-n}{a}}} \tag{82}$$

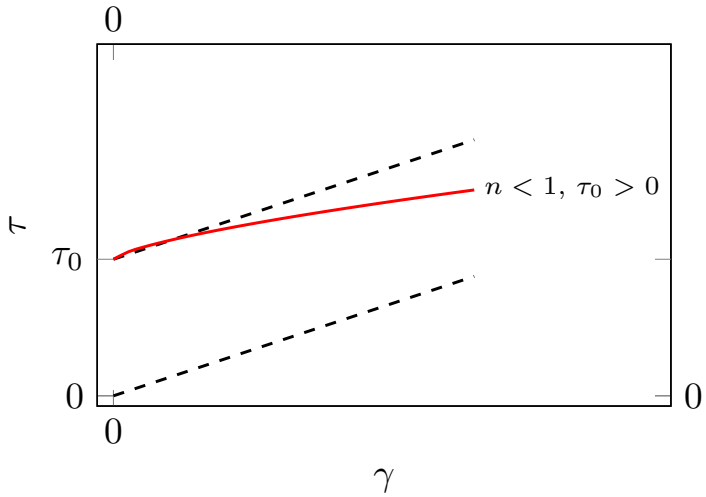
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

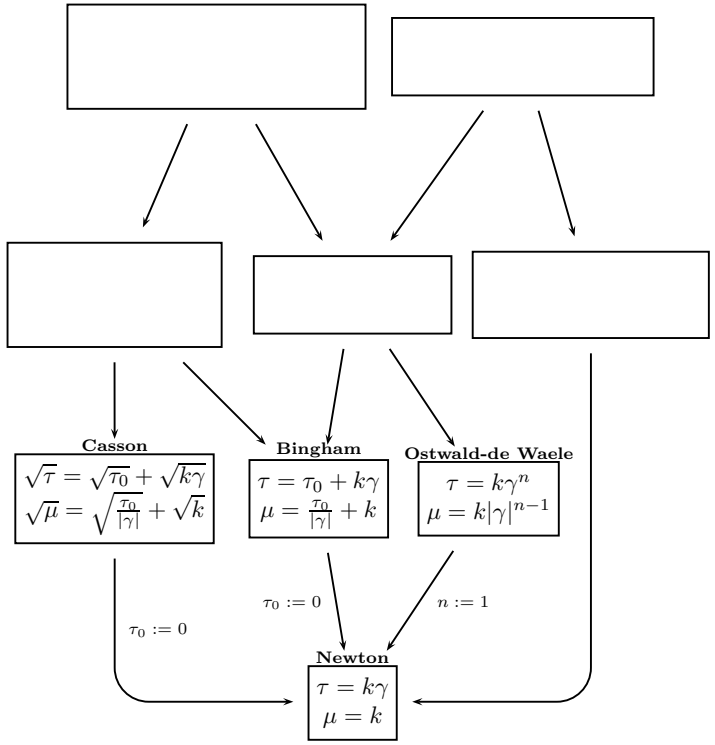
Model Cassona

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{k\gamma} \tag{83}$$

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{\frac{\tau}{\gamma}} = \sqrt{\tau_0 |\gamma|^{-1}} + \sqrt{k} \tag{84}$$

$\lim_{\gamma \to \infty} \mu = k$



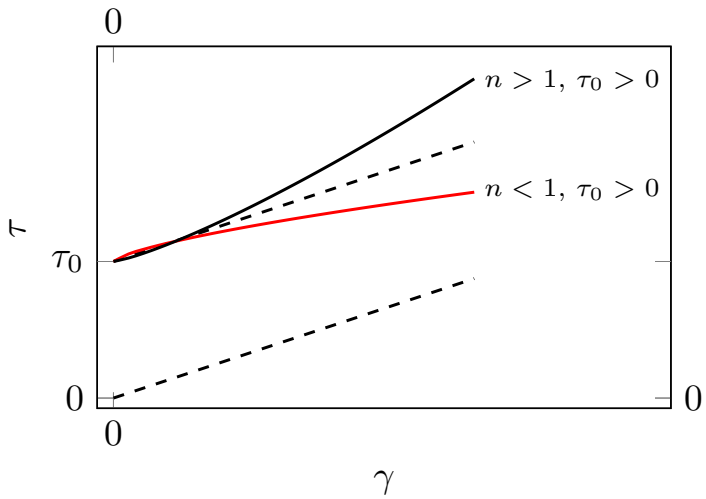


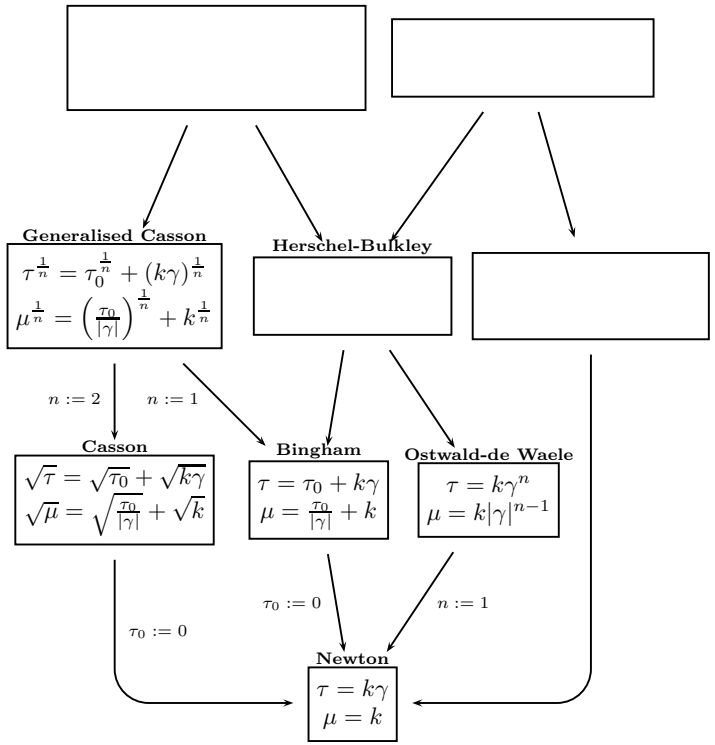
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Uogólniony model Cassona

$$\tau^{\frac{1}{n}} = \tau_0^{\frac{1}{n}} + (k\gamma)^{\frac{1}{n}} \tag{85}$$

$$\mu^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\tau_0|\gamma|^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} + k^{\frac{1}{n}} \tag{86}$$





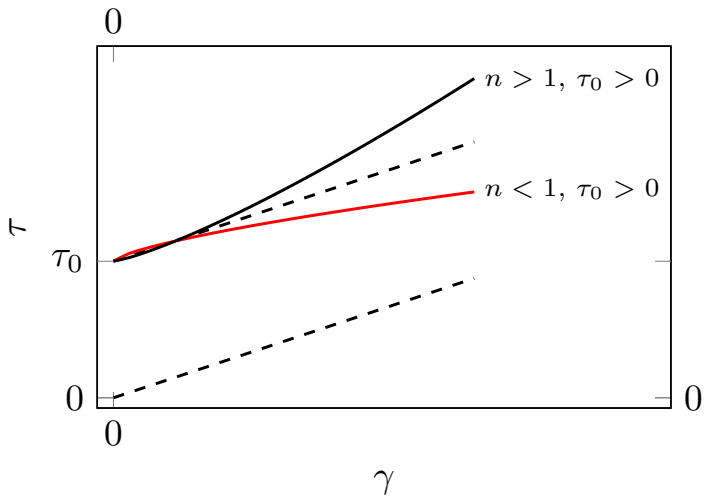
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

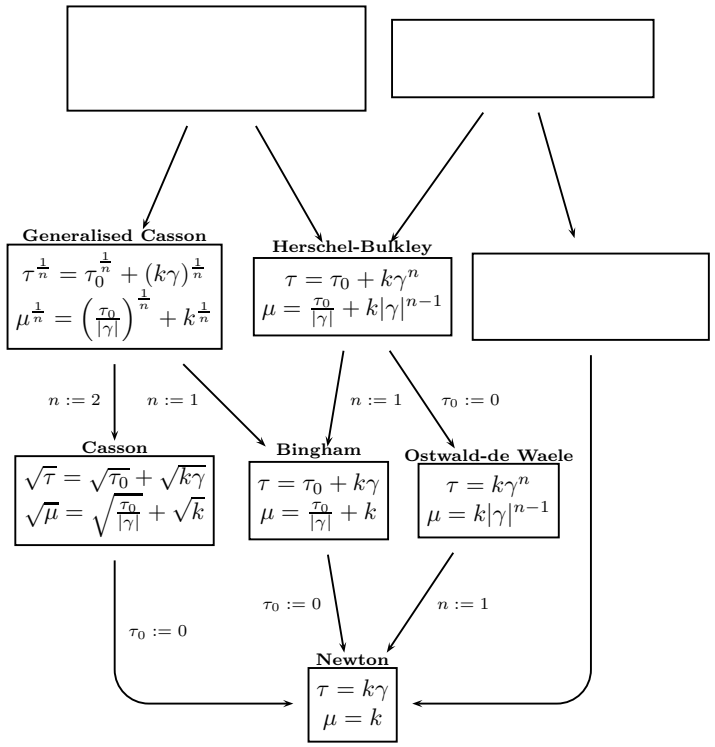
Model Herschela–Bulkleya

$$\tau = \tau_0 + k\gamma^n \tag{87}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \tau_0|\gamma|^{-1} + k|\gamma|^{n-1} \tag{88}$$

dla $n < 1 \quad \lim_{\gamma\to\infty} \mu = 0$





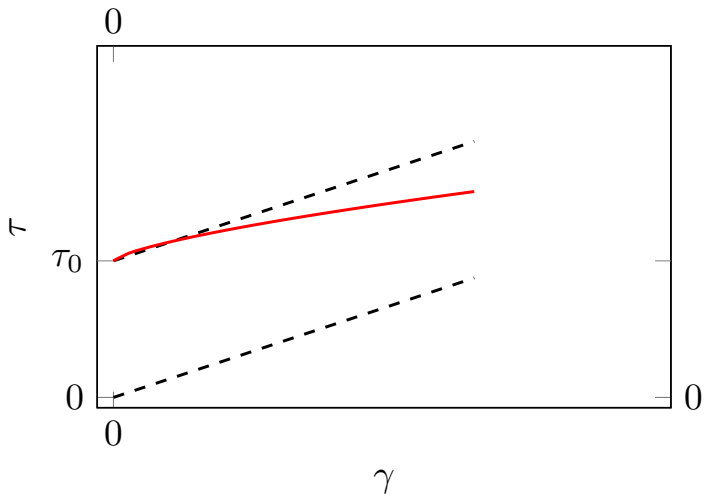
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

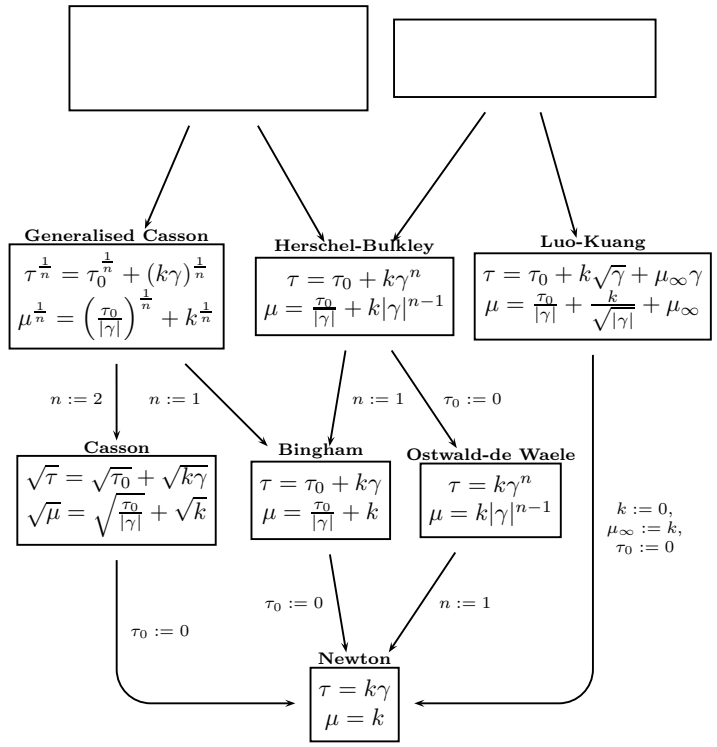
Model Luo–Kuanga

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{\gamma} + \mu_\infty \gamma \tag{89}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \tau_0 |\gamma|^{-1} + k|\gamma|^{-\frac{1}{2}} + \mu_\infty \tag{90}$$

$\lim_{\gamma\to\infty} \mu = \mu_\infty$





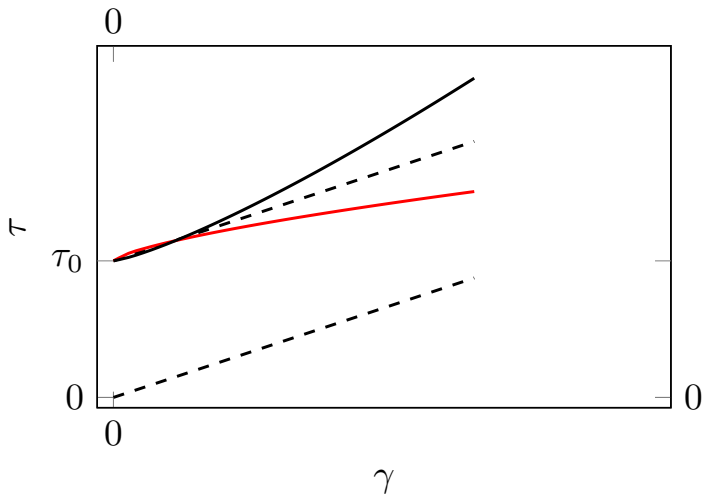
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

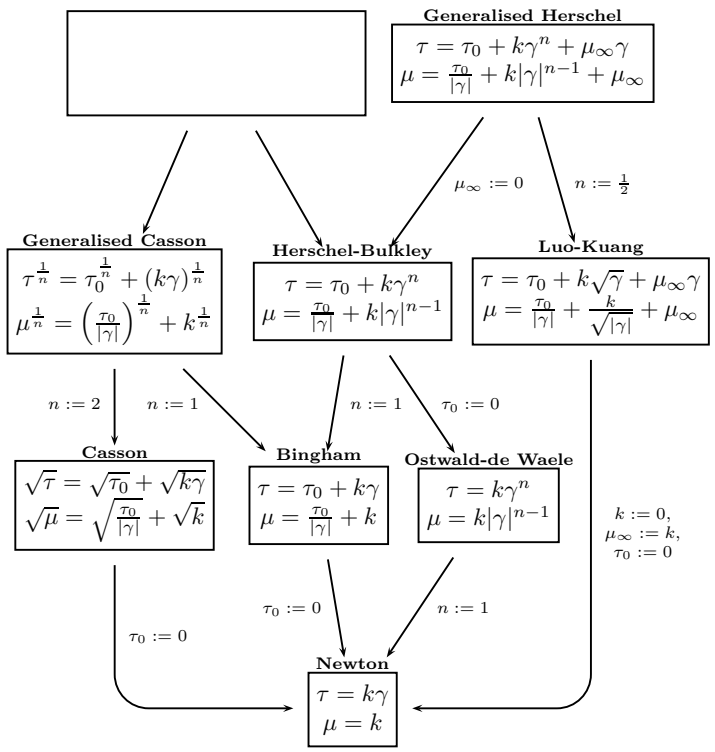
Uogólniony model Herschela

$$\tau = \tau_0 + k\gamma^n + \mu_\infty \gamma \tag{91}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \tau_0 |\gamma|^{-1} + k|\gamma|^{n-1} + \mu_\infty \tag{92}$$

$\lim_{\gamma \to \infty} \mu = \mu_\infty$



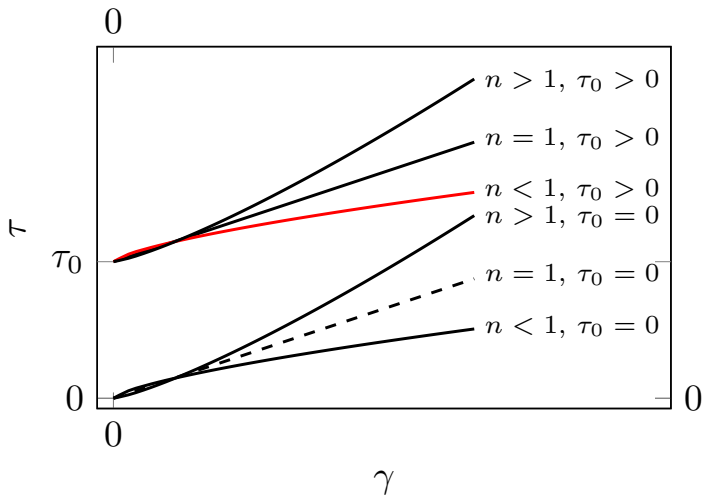


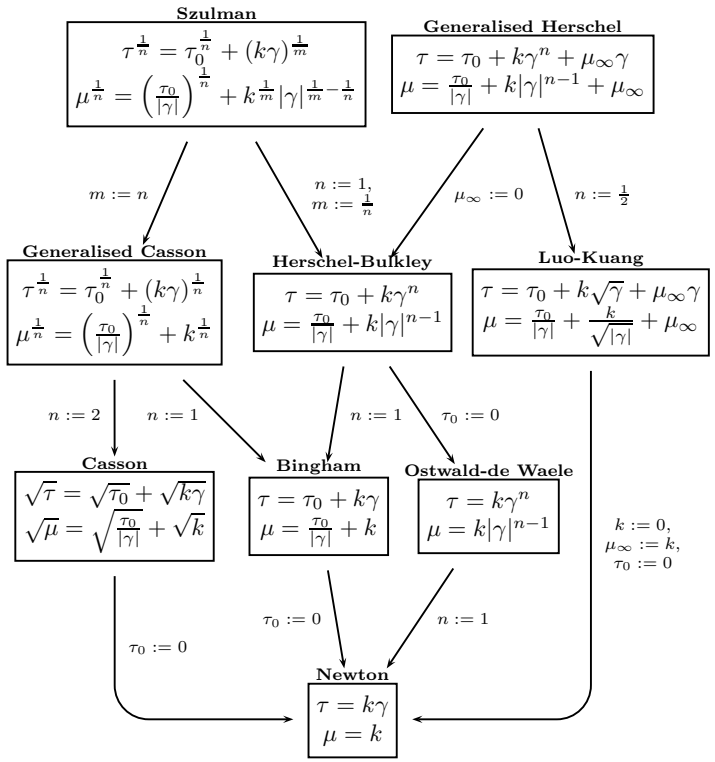
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Szulmana

$$\tau^{\frac{1}{n}} = \tau_0^{\frac{1}{n}} + (k\gamma)^{\frac{1}{m}} \tag{93}$$

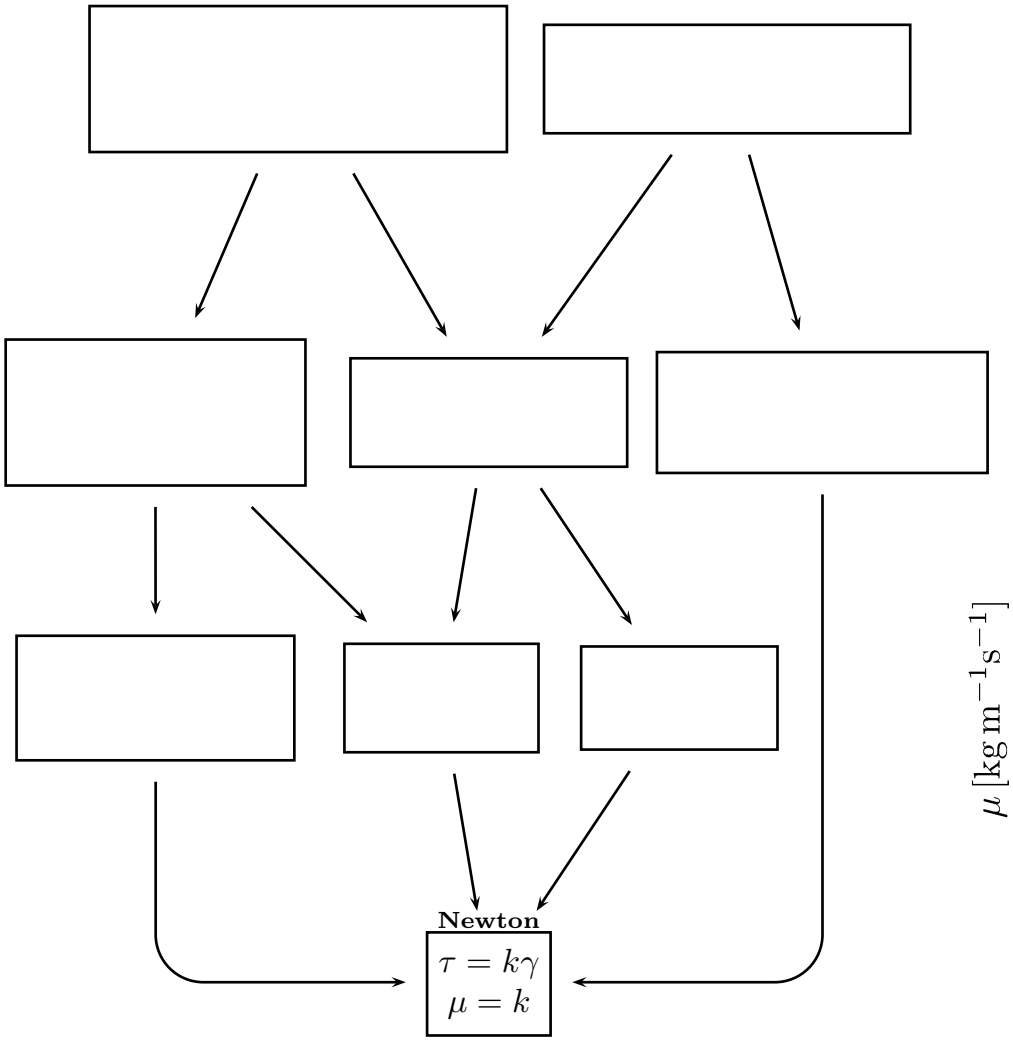
$$\mu = \left(\tau_0|\gamma|^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} + k^{\frac{1}{m}}|\gamma|^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}} \tag{94}$$

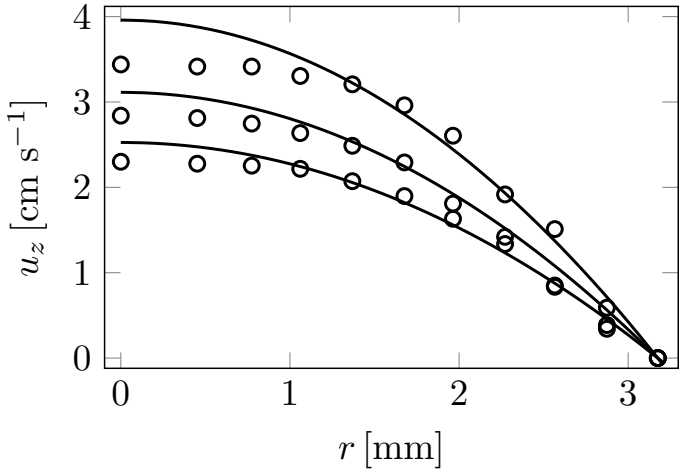


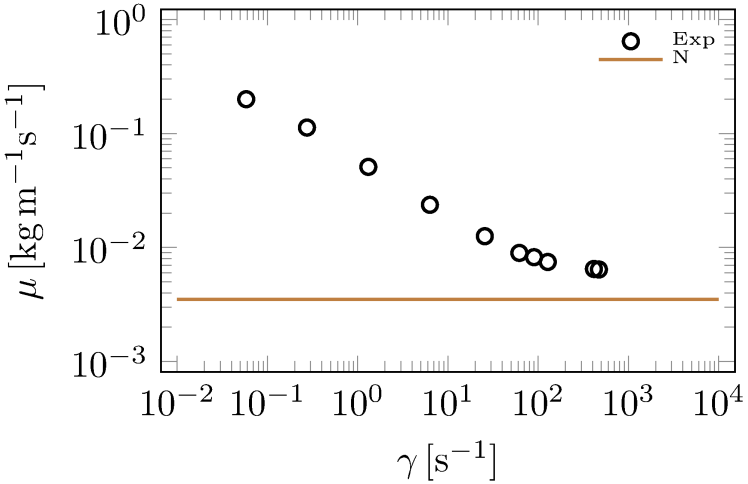


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model newtonowski

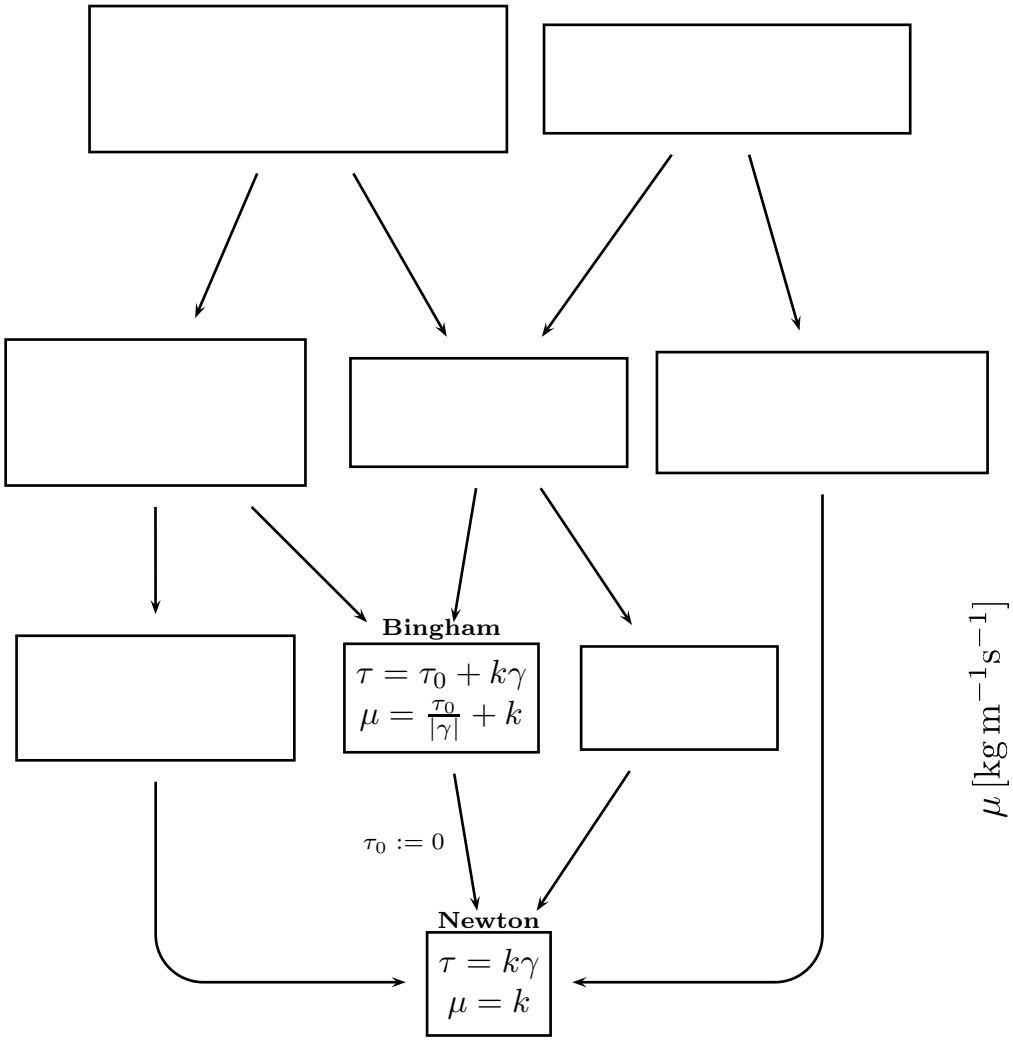


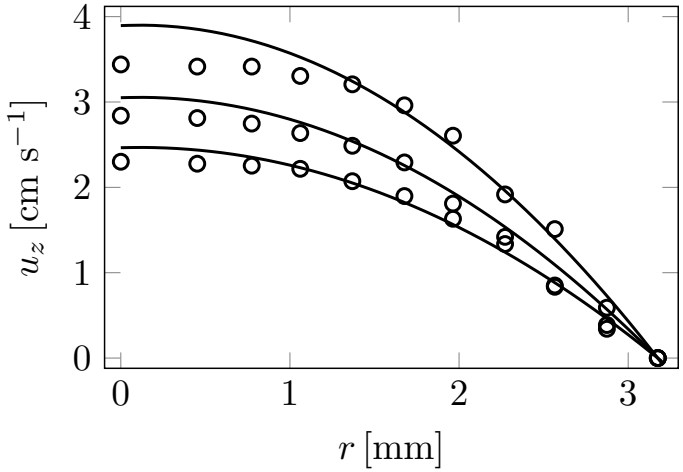


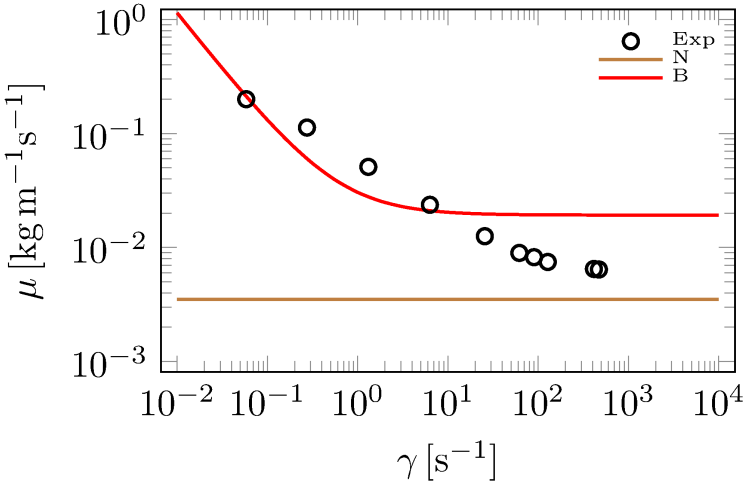


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Binghama

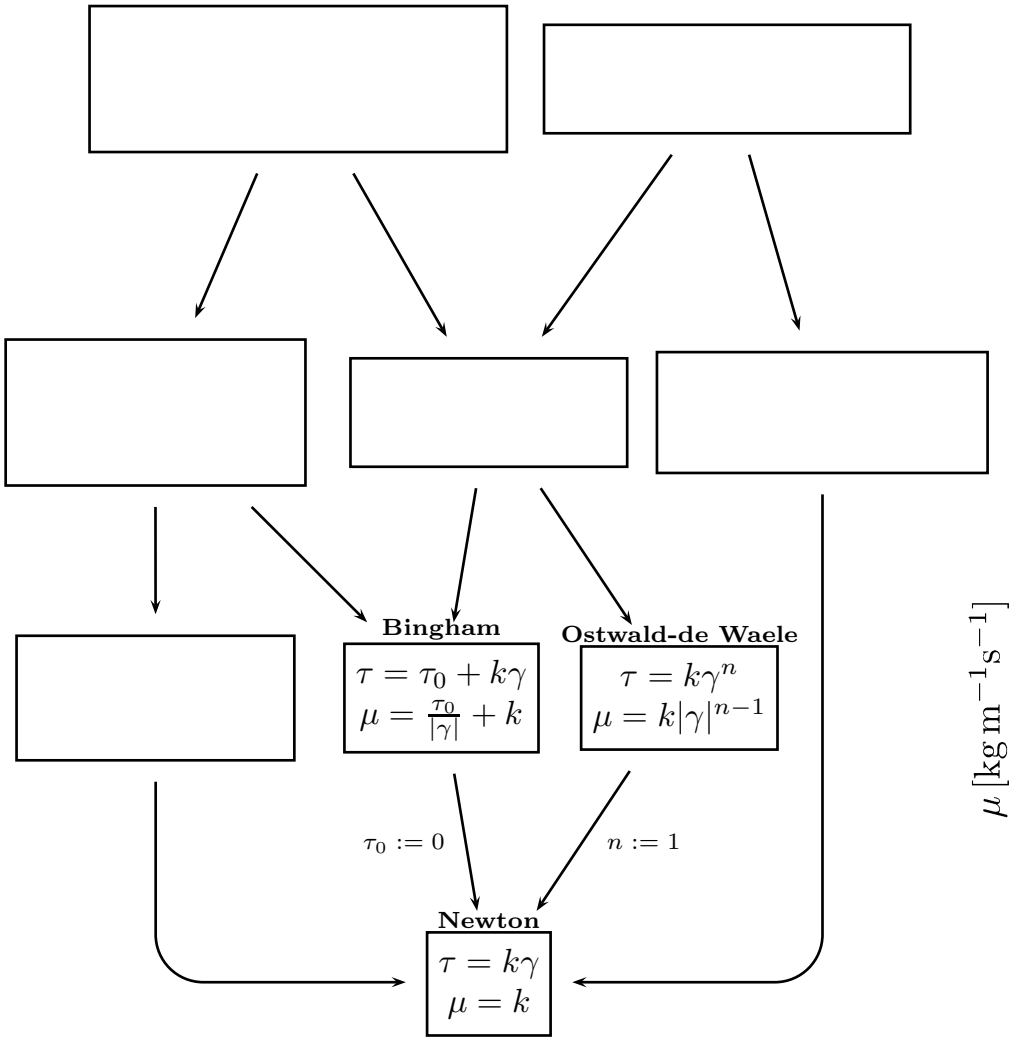


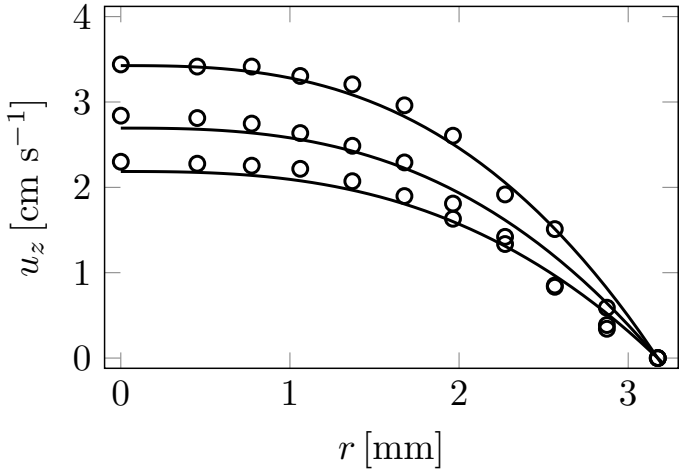


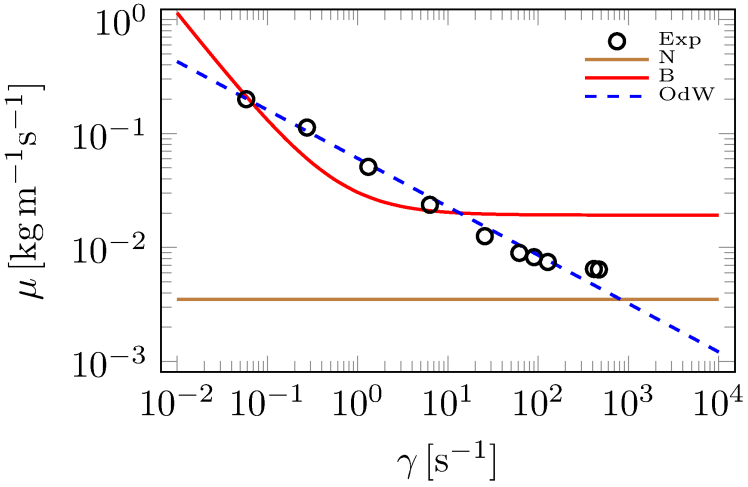


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Ostwalda–de Waele

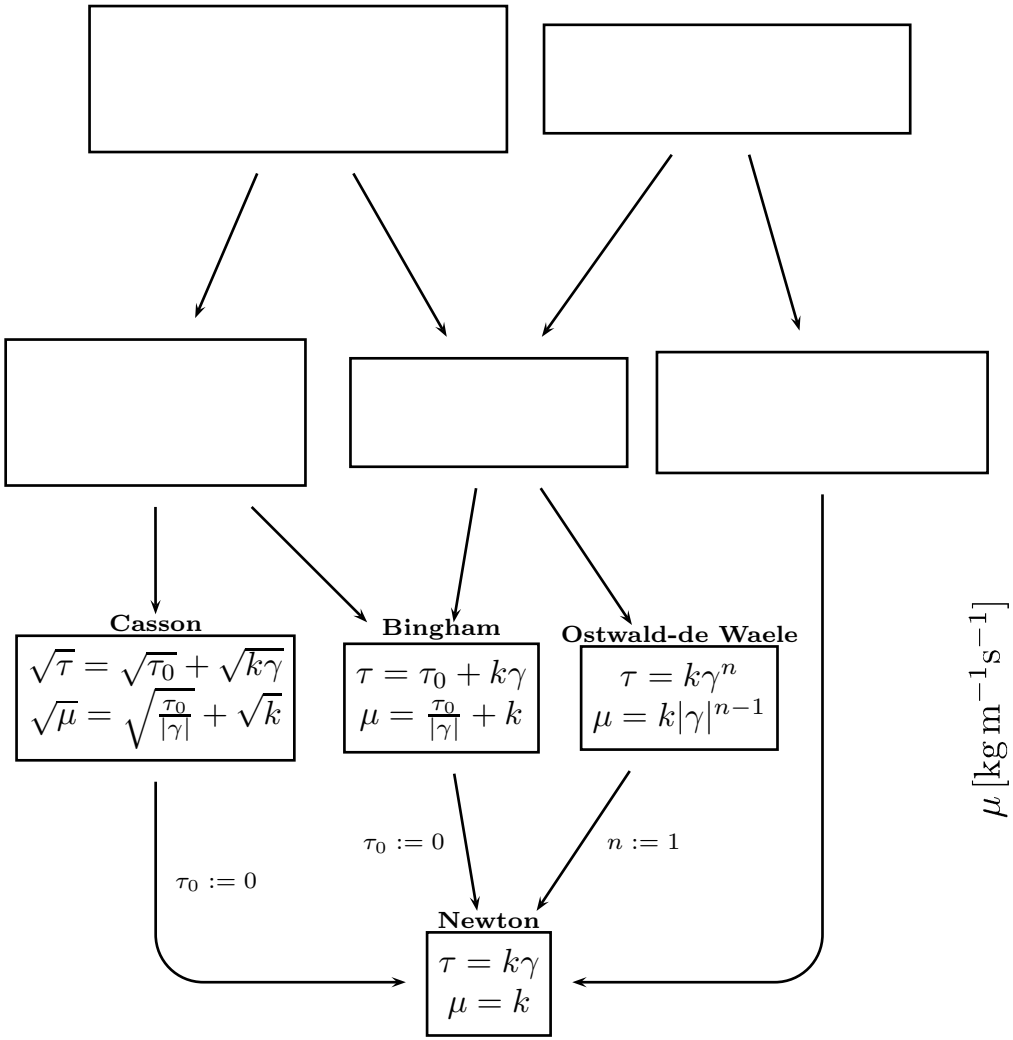


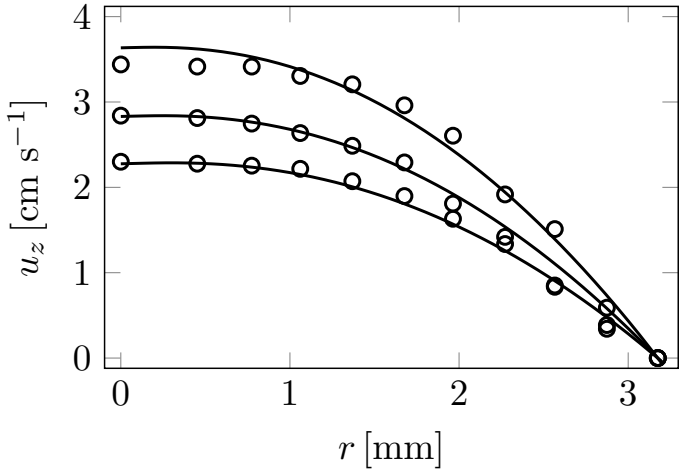


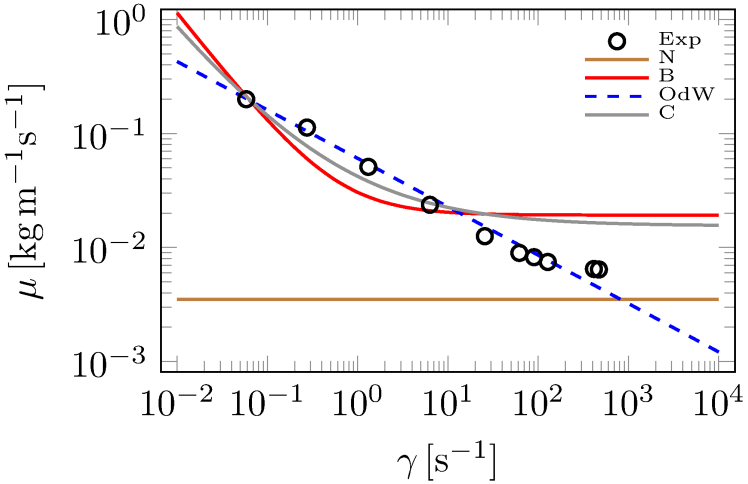


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Cassona

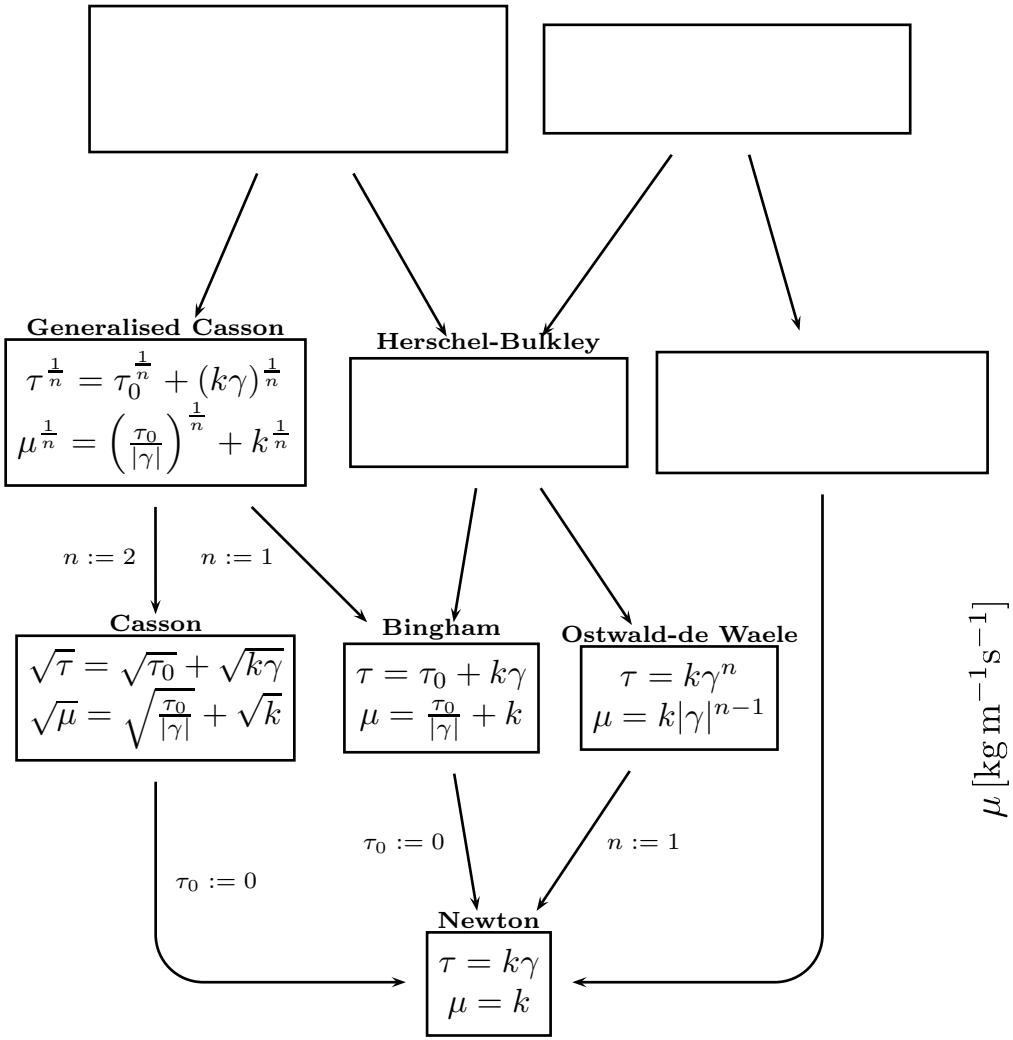


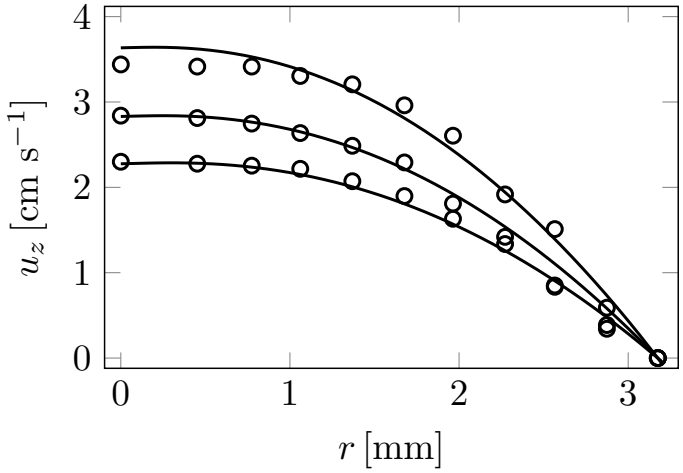


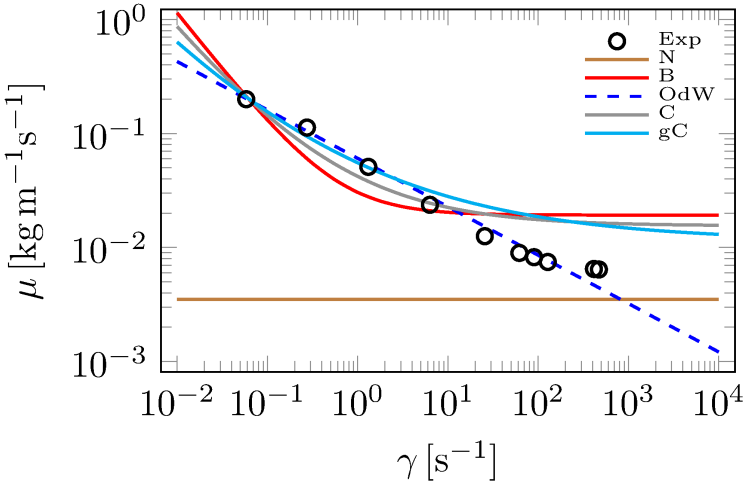


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Uogólniony model Cassona

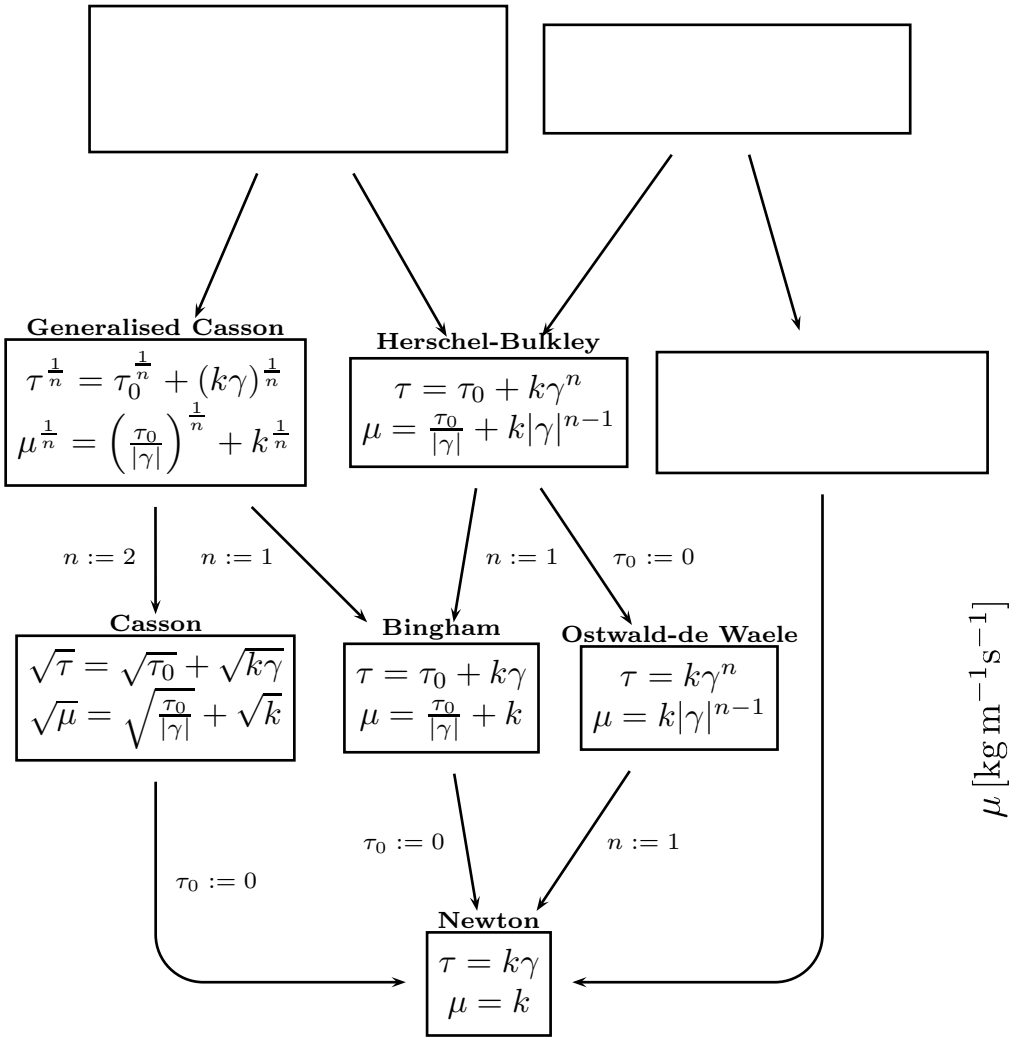


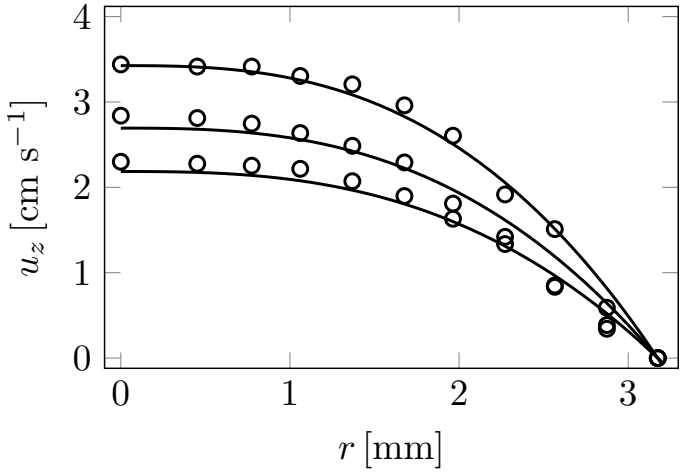


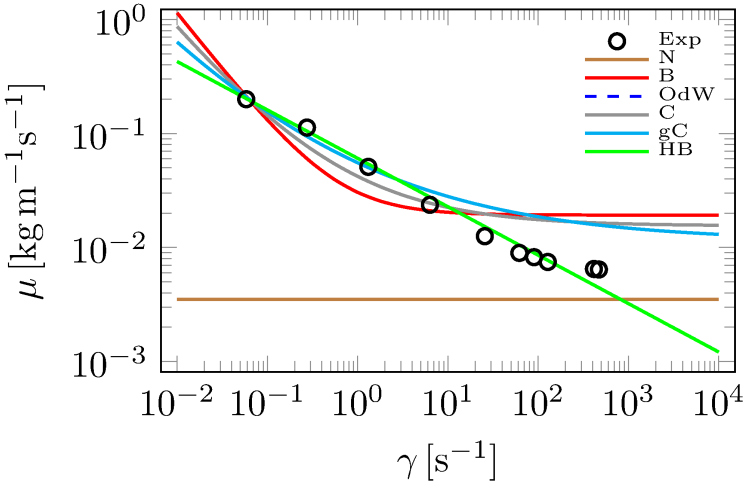


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Herschela–Bulkleya

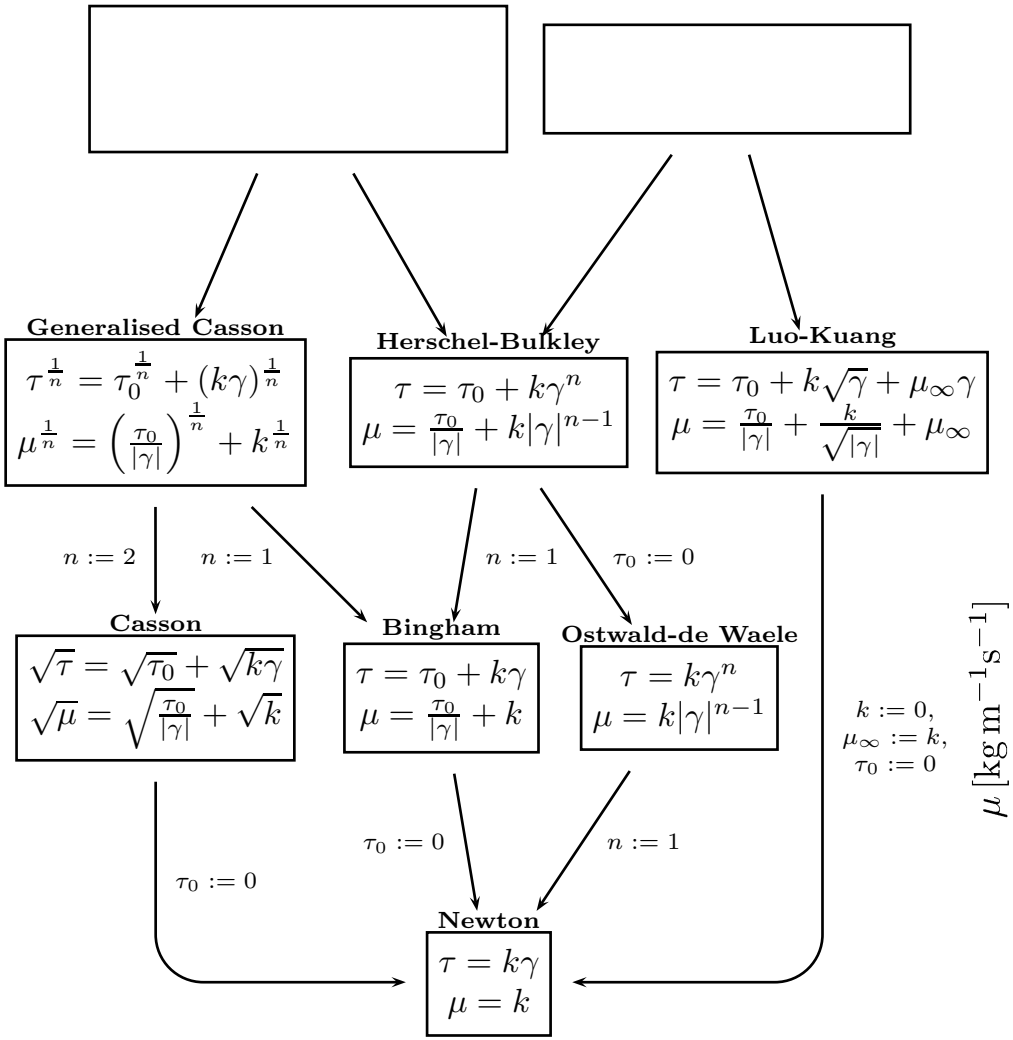


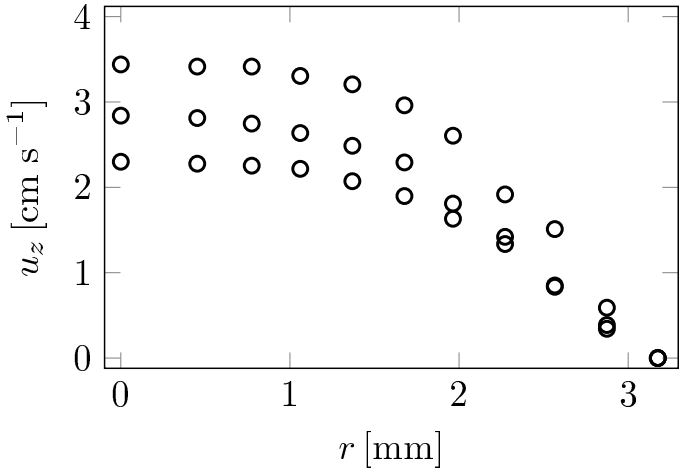


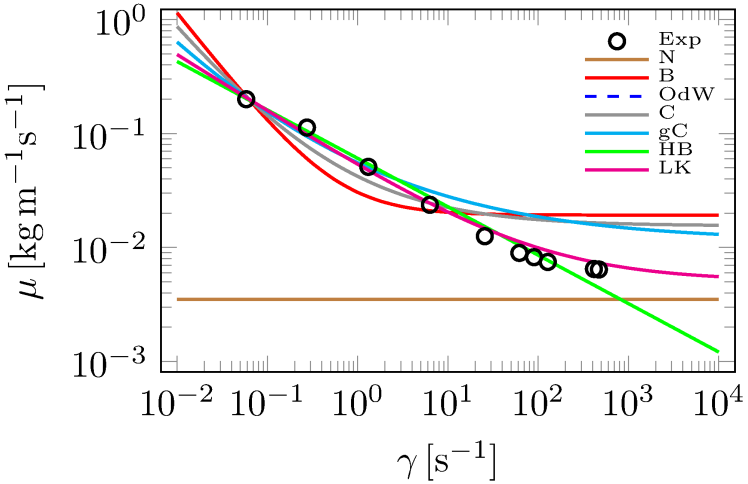


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Luo–Kuanga

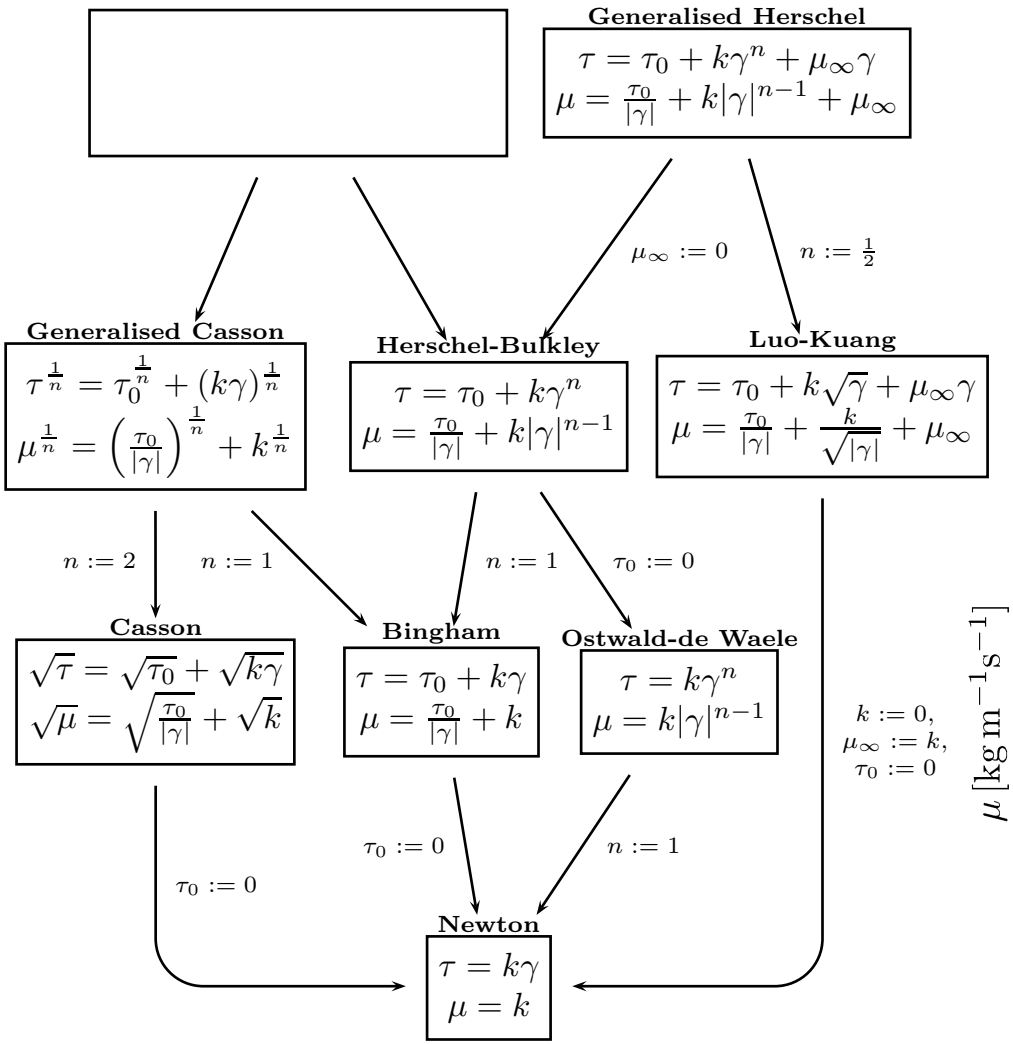


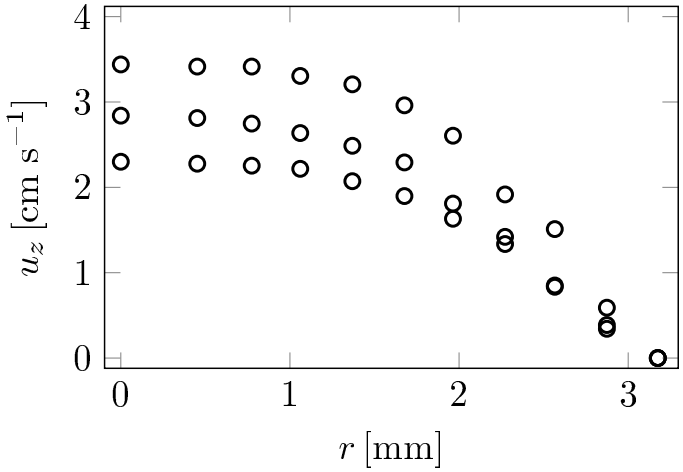


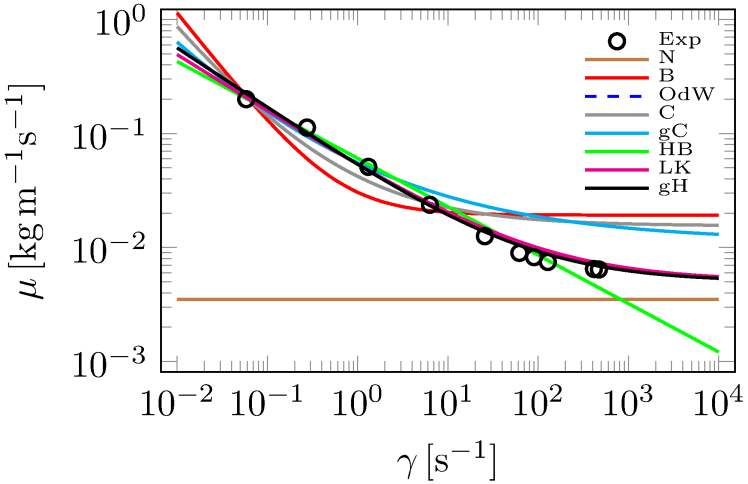


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Uogólniony model Herschela

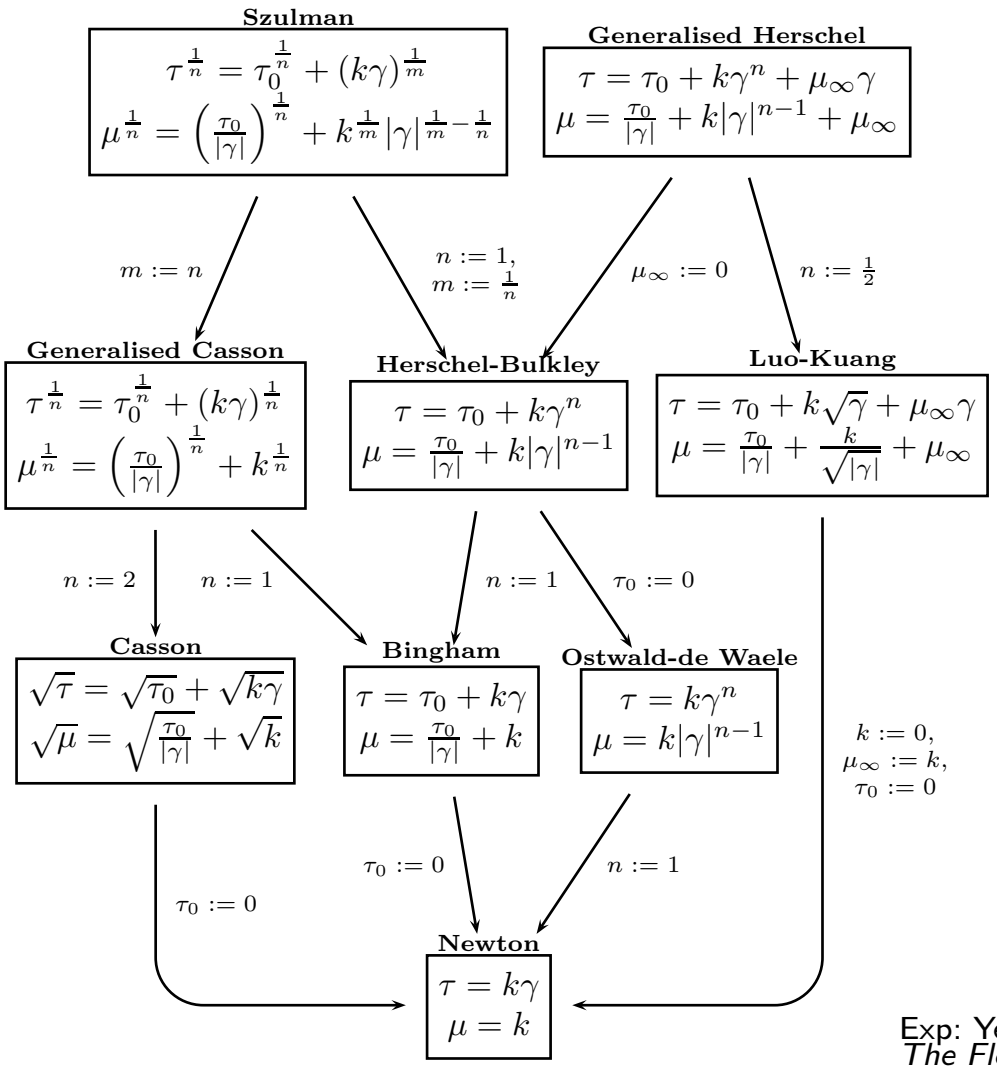






Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Szulmana



Exp: Yeleswarapu K.K. et al.,
The Flow of Blood in Tubes: Theory and Experiment,
Mech. Res. Commun. 25(3), 257–262, 1998

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Uogólnione płyny newtonowskie

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \tag{95}$$

- Płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie $\boldsymbol{\tau} \neq 2\mu\mathbf{D}$
  - Uogólnione płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$, gdzie $\mu(\gamma) = \ldots$
  - Modele płynów typu różniczkowego
  - Modele płynów typu całkowego
  - Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Modele płynów typu różniczkowego

$$\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots) \tag{96a}$$

$$\mathbf{A}_n(t) = \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\tau^n}\mathbf{C}_t(\tau)\right|_{\tau=t} \tag{96b}$$

$\mathbf{A}_i$ – tensory Rivlina–Ericksena

$$\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha_0\boldsymbol{\delta} + \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_1^2 + \alpha_4\mathbf{A}_2^2 + \alpha_5\left(\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1\right) + \alpha_6\left(\mathbf{A}_1^2\cdot\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1^2\right) + \alpha_7\left(\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\cdot\mathbf{A}_1\right) + \alpha_8\left(\mathbf{A}_1^2\cdot\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\cdot\mathbf{A}_1^2\right) \tag{97}$$

$$\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}, \qquad \mathbf{A}_2 = 2\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} + 4\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} + 4\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{98}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Modele płynów typu różniczkowego

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \tag{99}$$

- Płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie $\boldsymbol{\tau} \neq 2\mu\mathbf{D}$
  - Uogólnione płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$, gdzie $\mu(\gamma) = \ldots$
  - Modele płynów typu różniczkowego $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots)$
  - Modele płynów typu całkowego
  - Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Modele płynów typu całkowego

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^{t} f(t-\tau)\left(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{C}_t(\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau \qquad (100)$$

f – pamięć płynu
$\mathbf{C}_t$ – względny lewy tensor Cauchy'ego–Greena

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Modele płynów typu całkowego

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \tag{101}$$

- Płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie $\boldsymbol{\tau} \neq 2\mu\mathbf{D}$
  - Uogólnione płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$, gdzie $\mu(\gamma) = \ldots$
  - Modele płynów typu różniczkowego $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots)$
  - Modele płynów typu całkowego $\boldsymbol{\tau} = \int\limits_{-\infty}^{t} f(t-\tau)\left(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{C}_t(\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau$
  - Modele płynów typu szybkościowego

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Modele płynów typu szybkościowego

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = f\left(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}\right) \tag{102}$$

- Model Maxwella $\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \mathbf{D}$
- Model Oldroyda $\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu(\mathbf{D} + \lambda_2 \dot{\mathbf{D}})$

λ_1 – czas relaksacji

λ_2 – czas opóźnienia

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Bioreologia – podsumowanie

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{?} \tag{103}$$

- Płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie $\boldsymbol{\tau} \neq 2\mu\mathbf{D}$
  - Uogólnione płyny newtonowskie
    $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$, gdzie $\mu(\gamma) = \ldots$
  - Modele płynów typu różniczkowego
    $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots)$
  - Modele płynów typu całkowego
    $\boldsymbol{\tau} = \int\limits_{-\infty}^{t} f(t-\tau)\left(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{C}_t(\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau$
  - Modele płynów typu szybkościowego
    $\dot{\boldsymbol{\tau}} = f\left(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}\right)$

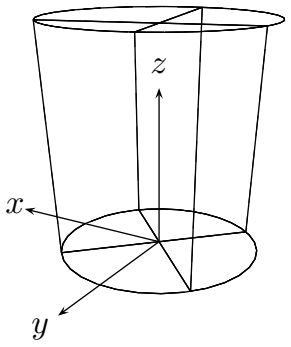
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przykładowe rozwiązania analityczne

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Współrzędne cylindryczne

Układ równań



$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{104}$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{105}$$

$$\mu = f(\gamma) \tag{106}$$

we współrzędnych cylindrycznych redukuje się do jednego równania

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{107}$$

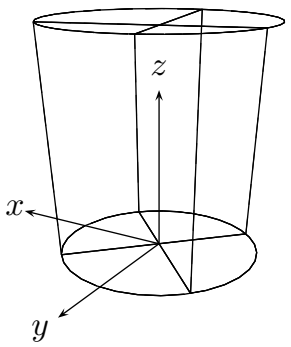
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i newtonowski

Przy założeniach $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ i $\mu = \mathrm{const}$, równanie

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{108}$$

przechodzi w równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu



$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) \tag{109}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i newtonowski

Rozkład prędkości u_r zależy wyłącznie od promienia r.
Gradient ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial z}$ wzdłuż osi rurki jest stały.
Dlaczego?

$$\frac{\mu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\Delta p}{L} \tag{110}$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie

$$r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = c_1 - \frac{\Delta p}{2\mu L}r^2 \tag{111}$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie

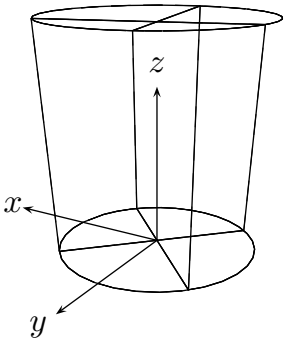
$$u_z(r) = c_2 + c_1 \ln r - \frac{\Delta p}{4\mu L}r^2 \tag{112}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i newtonowski

$$u_z(r) = c_2 + c_1 \ln r - \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 \tag{113}$$

Mamy jednak tylko jeden warunek brzegowy w postaci $u_z(R) = 0$, a co z drugim?



$$\lim_{r \to 0^+} \ln r = -\infty \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0 \tag{114}$$

$$u_z(r) = c_2 - \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 \tag{115}$$

Stałą c_2 wyznaczamy z $u_z(R) = 0$

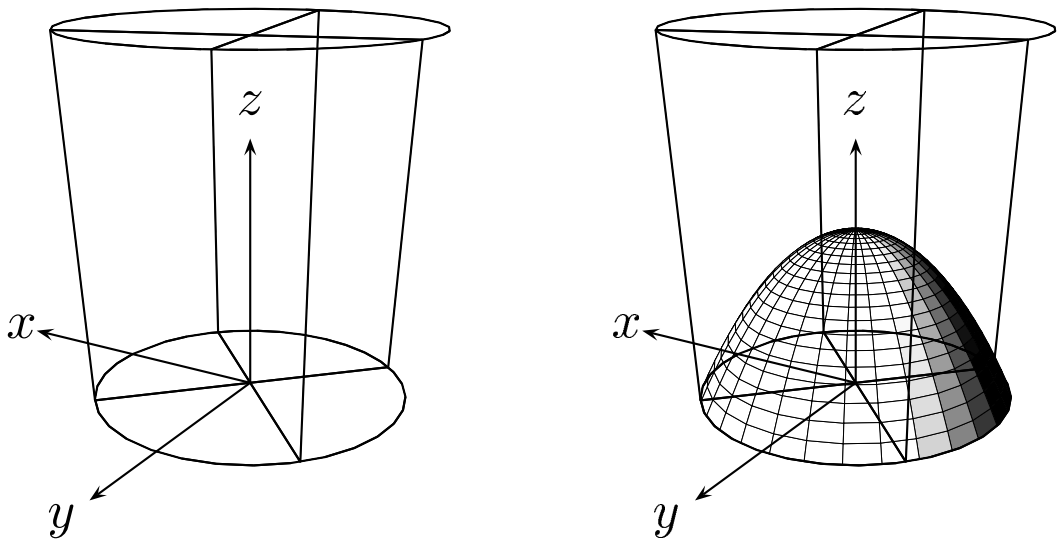
$$c_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L} R^2 \tag{116}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i newtonowski

Czyli rozwiązanie przepływu stacjonarnego i newtonowskiego w rurce o promieniu R

$$u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left(R^2 - r^2\right) \tag{117}$$



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i newtonowski

Objętościowe natężenie przepływu $\dot{V}$

$$\dot{V} = \iint\limits_S \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S \tag{118}$$

S jest powierzchnią, przez którą obliczamy $\dot{V}$, a $\hat{\boldsymbol{n}}$ wersorem normalnym

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\} \tag{119}$$

Iloczyn skalarny $\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ obliczamy następująco

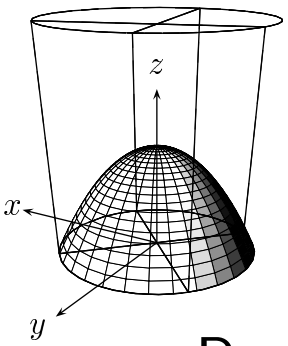
$$\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = u_z \tag{120}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i newtonowski

Łatwiej będzie całkować we współrzędnych biegunowych po obszarze $\Delta = \{(r, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant R; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$

$$\dot{V} = \iint\limits_S u_z \,\mathrm{d}S = \frac{\Delta p}{4\mu L} \iint\limits_S \left(R^2 - x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y =$$



$$\frac{\Delta p}{4\mu L} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{R} \left(R^2 - r^2\right) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \qquad (121)$$

Prawo Poiseuille'a (1835)

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \qquad (122)$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i newtonowski

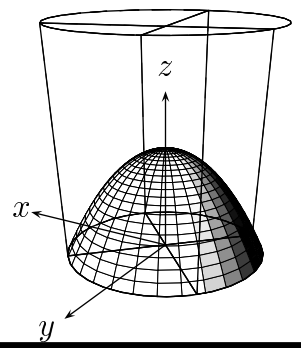
Prędkość średnia $\bar{u}$ definiowana jest w następujący sposób

$$\bar{u} = \frac{1}{|S|} \iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S \tag{123}$$

Porównując wzory na $\bar{u}$ i $\dot{V}$

$$\dot{V} = \bar{u}|S| \tag{124}$$

Zatem u_z dla $|S| = \pi R^2$



$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{|S|} = \frac{R^2 \Delta p}{8 \mu L} \tag{125}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

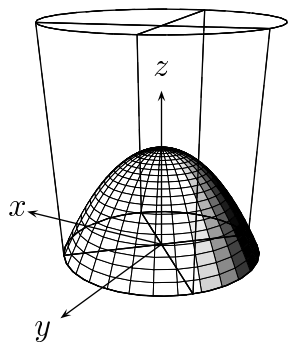
Przepływ stacjonarny i newtonowski

Prędkość maksymalna u_0 jest dla $r = 0$ (środek rurki)

$$u_0 = u_z(0) = \frac{R^2 \Delta p}{4\mu L} \tag{126}$$

Porównując prędkość średnią i maksymalną dla przepływu laminarnego w rurki o przekroju kołowym, otrzymujemy

$$u_0 = 2\bar{u} \tag{127}$$



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

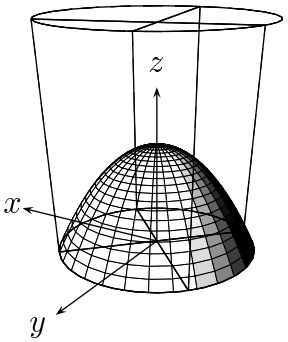
Przepływ stacjonarny i newtonowski

$$u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left(R^2 - r^2\right) \tag{128}$$

Naprężenia styczne τ

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = \mu\,\gamma \tag{129}$$

Naprężenia styczne na ściankach τ_w



$$\tau_w = \mu \frac{\mathrm{d}u_z(R)}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta p\, r}{2L}\bigg|_{r=R} = -\frac{\Delta p\, R}{2L} \tag{130}$$

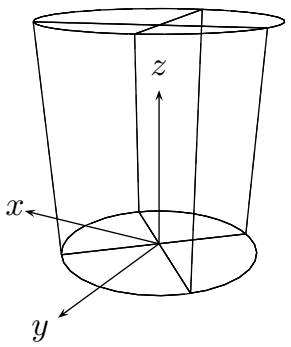
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i nienewtonowski

Przy założeniach $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ i $\mu \neq \mathrm{const}$, równanie

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{131}$$

przechodzi w równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu



$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\mu r \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) \tag{132}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ stacjonarny i nienewtonowski

Równanie dla $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{L}$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\mu r \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) \tag{133}$$

można jednokrotnie całkować, niezależnie od postaci μ

$$c_1 - \frac{r^2}{2}\frac{\Delta p}{L} = \mu r \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} \tag{134}$$

Z warunku $\left.\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0$ mamy $c_1 = 0$, co daje

$$-\frac{r}{2}\frac{\Delta p}{L} = \mu \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} \tag{135}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Ostwalda–de Waele

Równania modelu

$$\tau = k\gamma^n \tag{136}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = k|\gamma|^{n-1} \tag{137}$$

Równanie wstawiamy do rozwiązania

$$-\frac{r}{2}\frac{\Delta p}{L} = \mu\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} \tag{138}$$

gdzie $\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = \gamma \leqslant 0$, więc $|\gamma| = -\gamma$

$$\frac{r}{2}\frac{\Delta p}{L} = k|\gamma|^{n-1}|\gamma| \tag{139}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Ostwalda–de Waele

$$\frac{r}{2}\frac{\Delta p}{L} = k|\gamma|^n \tag{140}$$

$$|\gamma| = -\gamma = -\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} = \left(\frac{r\,\Delta p}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{141}$$

Całkując obustronnie

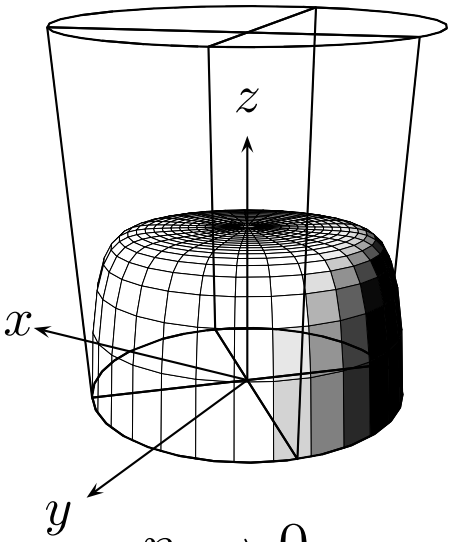
$$u_z = -\left(\frac{\Delta p}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} + c_2 \tag{142}$$

Stałą c_2 wyznaczamy z warunku $u_z(R) = 0$

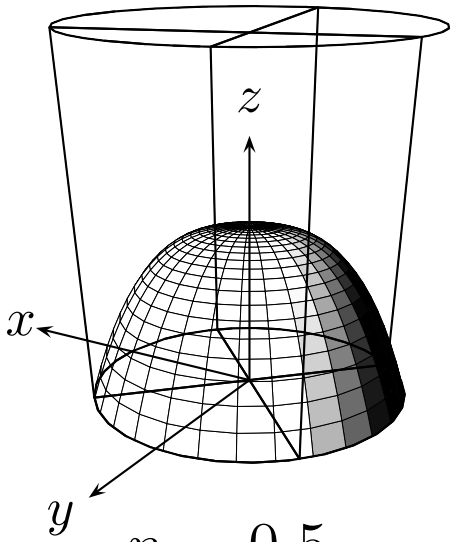
$$u_z = \left(\frac{\Delta p}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \left(R^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}}\right) \tag{143}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

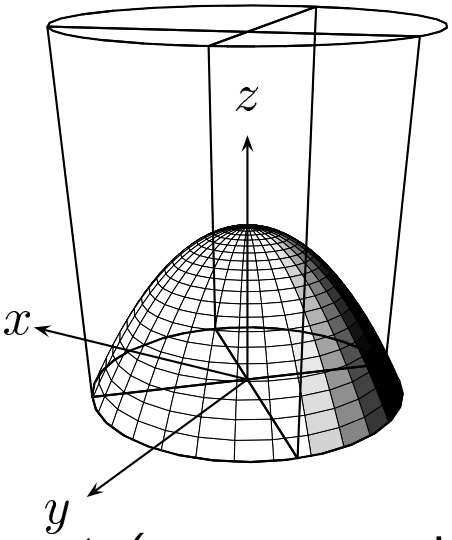
Model Ostwalda–de Waele



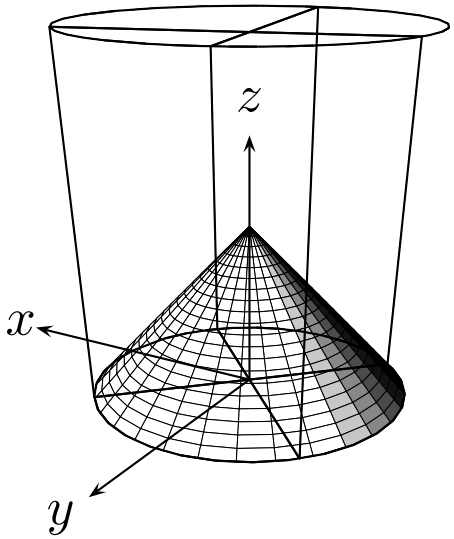
$n \to 0$



$n = 0.5$



$n = 1$ (newtonowski)



$n \to \infty$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Ostwalda–de Waele

$$\dot{V} = \iint\limits_S u_z \,\mathrm{d}S = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} u_z r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\left(\frac{\Delta p}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} \left(R^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}}\right) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\left(\frac{\Delta p}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\pi R^{3+\frac{1}{n}}}{3+\frac{1}{n}} \tag{144}$$

Uogólnione prawo Poiseuille'a

$$\dot{V} = \left(\frac{\Delta p}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\pi R^{3+\frac{1}{n}}}{3+\frac{1}{n}} \tag{145}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model Ostwalda–de Waele

Prędkość średnia $\bar{u}$

$$\bar{u} = \frac{1}{|S|} \iint\limits_S \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \frac{\dot{V}}{|S|} = \left(\frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{1+\frac{1}{n}}}{3 + \frac{1}{n}} \tag{146}$$

Prędkość maksymalna u_0 jest dla $r = 0$

$$u_0 = \left(\frac{\Delta p}{2kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{1+\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} \tag{147}$$

Porównując $\bar{u}$ i u_0, otrzymujemy

$$\frac{u_0}{\bar{u}} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3n + 1}{n + 1} \tag{148}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie Womersleya opisuje pole prędkości przepływu:

- laminarnego
- niestacjonarnego
- jednowymiarowego
- płynu newtonowskiego
- płynu nieściśliwego
- w rurce o przekroju kołowym
- wymuszonego pulsującym gradientem ciśnienia

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

Przepływ wymuszony jest wyłącznie pulsującym gradientem ciśnienia

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -Ae^{i\omega t} \tag{149}$$

gdzie A jest stałą, ω – częstością kołową, i – jednostką urojoną.
Rozwiązujemy równanie

$$\rho\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{150}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \tag{151}$$

Równanie to jest równaniem różniczkowym cząstkowym, rzędu drugiego, gdzie $u_z(r,t)$. Równanie to można sprowadzić do równania różniczkowego zwyczajnego przez następującą dekompozycję składowej prędkości u_z

$$u_z(t,r) = f(r)e^{i\omega t} \tag{152}$$

gdzie f jest nieznaną funkcją, która zależy tylko od promienia. Po podstawieniu

$$\rho i\omega f e^{i\omega t} = Ae^{i\omega t} + \frac{\mu}{r} f' e^{i\omega t} + \mu f'' e^{i\omega t} \tag{153}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{\rho i\omega}{\mu}f = -\frac{A}{\mu} \tag{154}$$

Równanie to można sprowadzić do równania jednorodnego prze podstawienie

$$f = f_0 + c \tag{155}$$

odpowiednio dobierając stałą c

$$f_0'' + \frac{1}{r}f_0' - \frac{\rho i\omega}{\mu}f_0 - \frac{\rho i\omega}{\mu}c = -\frac{A}{\mu} \tag{156}$$

Za c przyjmujemy

$$c = \frac{A}{\rho i\omega} \tag{157}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

Równanie jednorodne

$$f_0'' + \frac{1}{r} f_0' - \frac{\rho i \omega}{\mu} f_0 = 0 \tag{158}$$

Jest to równanie Bessela, którego rozwiązanie ma postać

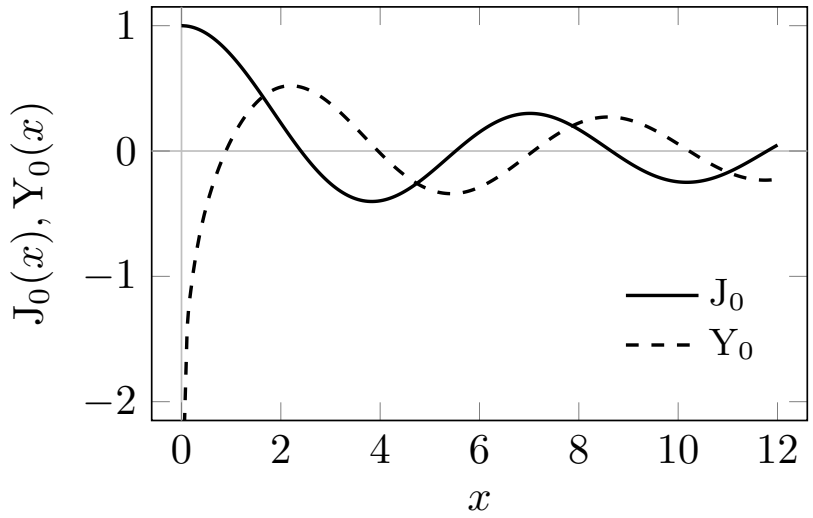
$$f_0(r) = c_1 \mathrm{J}_0 \left(i^{\frac{3}{2}} r \sqrt{\rho \omega \mu^{-1}} \right) + c_2 \mathrm{Y}_0 \left(-i^{\frac{3}{2}} r \sqrt{\rho \omega \mu^{-1}} \right) \tag{159}$$

J_0 i Y_0 są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, zerowego rzędu

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

J_0 i Y_0 – funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, zerowego rzędu



$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{Y}_0(x) = -\infty \tag{160}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

$$f_0(r) = c_1 \mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}} r\sqrt{\rho\omega\mu^{-1}}\right) + c_2 \mathrm{Y}_0\left(-i^{\frac{3}{2}} r\sqrt{\rho\omega\mu^{-1}}\right) \tag{161}$$

Ponieważ

$$\lim_{r\to 0^+} \mathrm{Y}_0(r) = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 = 0 \tag{162}$$

aby uniknąć osobliwości w środku rurki, czyli

$$f_0(r) = c_1 \mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \frac{r}{R}\right) \tag{163}$$

gdzie α jest liczbą Womersleya

$$\alpha = R\sqrt{\rho\omega\mu^{-1}} \tag{164}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie równania jednorodnego

$$f_0(r) = c_1 \mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\frac{r}{R}\right) \tag{165}$$

Ponieważ

$$f = f_0 + c = f_0 + \frac{A}{\rho i\omega} \tag{166}$$

więc rozwiązanie równania niejednorodnego

$$f(r) = c_1 \mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\frac{r}{R}\right) + \frac{A}{\rho i\omega} \tag{167}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie równania niejednorodnego

$$f(r) = c_1 \mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\frac{r}{R}\right) + \frac{A}{\rho i\omega} \tag{168}$$

Rozkład prędkości

$$u_z(t,r) = f(r)e^{i\omega t} \tag{169}$$

więc $u_z(t,r)$ ma postać

$$u_z(t,r) = e^{i\omega t}\left(c_1 \mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\frac{r}{R}\right) + \frac{A}{\rho i\omega}\right) \tag{170}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie

$$u_z(t,r) = e^{i\omega t}\left(c_1 \mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\frac{r}{R}\right) + \frac{A}{\rho i\omega}\right) \tag{171}$$

jest rozwiązaniem ogólnym. Stałą c_1 wyznaczamy z warunku $u_z(t,R) = 0$

$$c_1 = -\frac{A}{\rho i\omega \mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)} \tag{172}$$

Rozwiązanie szczególne – rozw. Womersleya (1955)

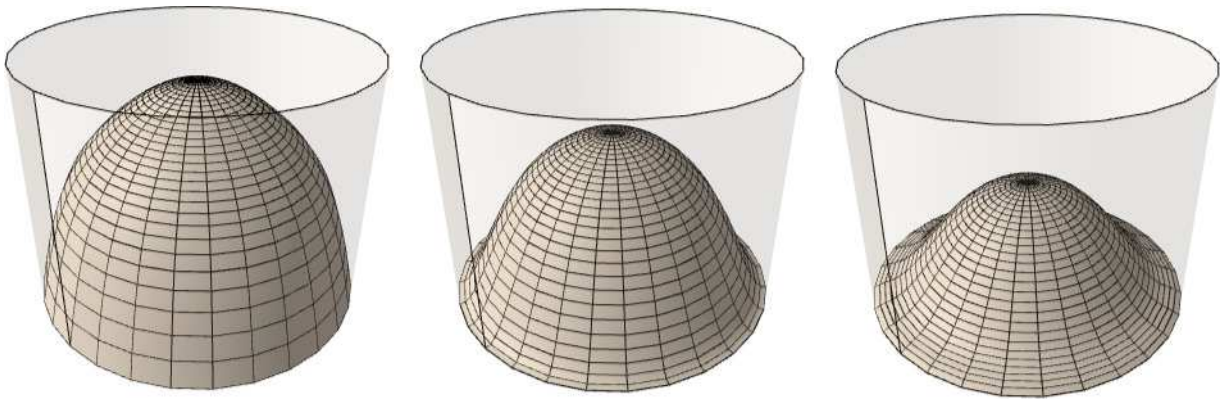
$$u_z(t,r) = \frac{Ae^{i\omega t}}{\rho i\omega}\left(1 - \frac{\mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\frac{r}{R}\right)}{\mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)}\right) \tag{173}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie Womersleya

Rozwiązanie Womersleya (1955)

$$u_z(t,r) = \frac{Ae^{i\omega t}}{\rho i\omega}\left(1 - \frac{\mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\frac{r}{R}\right)}{\mathrm{J}_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)}\right) \tag{174}$$



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Rozwiązanie analityczne – podsumowanie

Rozwiązanie analityczne:

- możliwe są tylko dla uproszczonej geometrii (rurki kołowe)
- opisywane są równaniami:
  - różniczkowymi cząstkowymi
  - drugiego rzędu
  - niestacjonarnymi
- często rozwiązania są nietrywialne
- zwykle sprowadzamy równania cząstkowe do zwyczajnych
- rozwiązania komplikują się dla płynów nienewtonowskich
- niemożliwe dla rzeczywistych naczyń krwionośnych

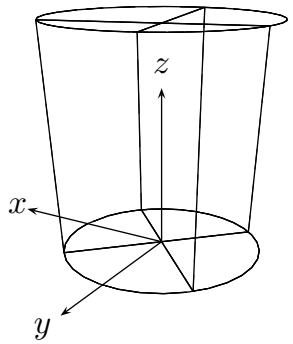
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Analogia mechaniczno-elektryczna

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Analogia mechaniczno-elektryczna

Układ równań dla $\mu = \mathrm{const}$



$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{175}$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla \mathbf{u}^2 \tag{176}$$

$$\tag{177}$$

we współrzędnych cylindrycznych redukuje się do jednego równania

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \tag{178}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Analogia mechaniczno-elektryczna

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{179}$$

Mnożąc obustronnie prze $2\pi r\,\mathrm{d}r$ i całkując obustronnie od $\int_0^R \mathrm{d}r$

$$2\pi\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_0^R u_z r\,\mathrm{d}r = -\pi R^2\frac{\partial p}{\partial z} + 2\pi R\mu\frac{\partial u_z(R)}{\partial r} \tag{180}$$

dla

$$\dot{V} = 2\pi\int\limits_0^R u_z r\,\mathrm{d}r, \quad \tau_w = \mu\frac{\partial u_z(R)}{\partial r} \tag{181}$$

mamy

$$\rho\frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t} = -\pi R^2\frac{\partial p}{\partial z} + 2\pi R\tau_w \tag{182}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Analogia mechaniczno-elektryczna

$$\rho \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t} = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial z} + 2\pi R \tau_w \tag{183}$$

dzieląc obustronnie przez πR^2

$$\frac{\rho}{\pi R^2} \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2}{R} \tau_w \tag{184}$$

Bezwładność $L_H = \frac{\rho}{\pi R^2}$, oraz $\tau_w = -\frac{\Delta p\, R}{2L} < 0$

$$L_H \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2}{R} |\tau_w| \tag{185}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Analogia mechaniczno-elektryczna

Prawo Poiseuille'a

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} \tag{186}$$

dla $R_H = \frac{8\mu}{\pi R^4}$

$$\frac{\Delta p}{L} = \dot{V}\, R_H \tag{187}$$

i naprężenia styczne $|\tau_w| = -\tau_w = \frac{\Delta p\, R}{2L} < 0$.
Z obu równań mamy

$$\frac{2\,|\tau_w|}{R} = \dot{V}\, R_H \tag{188}$$

więc

$$L_H \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H\, \dot{V} \tag{189}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Analogia mechaniczno-elektryczna

Prawo Poiseuille'a

$$\frac{\Delta p}{L} = \dot{V}\, R_H \tag{190}$$

Prawo Ohma

$$U = I\, R_e \tag{191}$$

Analogie

$$U \iff \frac{\Delta p}{L} \tag{192}$$

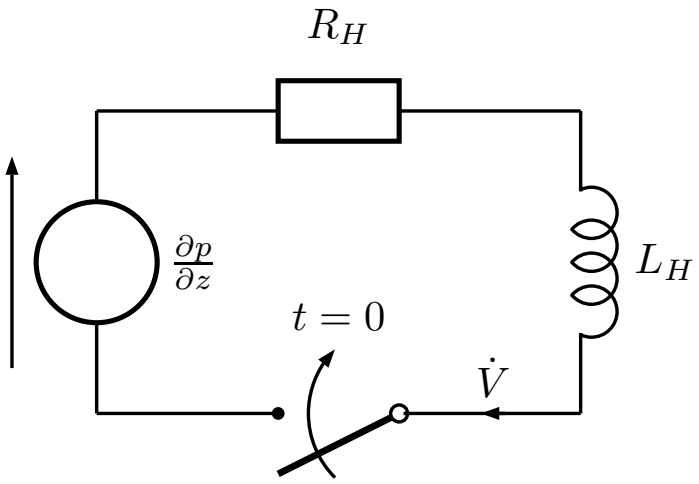
$$I \iff \dot{V} \tag{193}$$

$$R_e \iff R_H = \frac{8\mu}{\pi R^4} \tag{194}$$

$$L_e \iff L_H = \frac{\rho}{\pi R^2} \tag{195}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Analogia mechaniczno-elektryczna



$$L_H \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \tag{196}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie zachowania masy

Dla naczyń (przewodów) równanie zachowania masy przyjmuje postać

$$C_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = 0 \tag{197}$$

gdzie podatność hydrauliczna

$$C_H = \frac{\mathrm{d}|S|}{\mathrm{d}p} \tag{198}$$

Wzór Moensa–Kortewega dla prędkości fali tętna c

$$c^2 \, C_H \, L_H = 1 \tag{199}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie zachowania pędu

Równanie zachowania pędu dla naczyń

$$L_H \left(\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{2\dot{V}}{|S|} \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \left(1 - \frac{\dot{V}^2}{|S|^2 c^2} \right) = -R_H \dot{V} \tag{200}$$

Linearyzacja

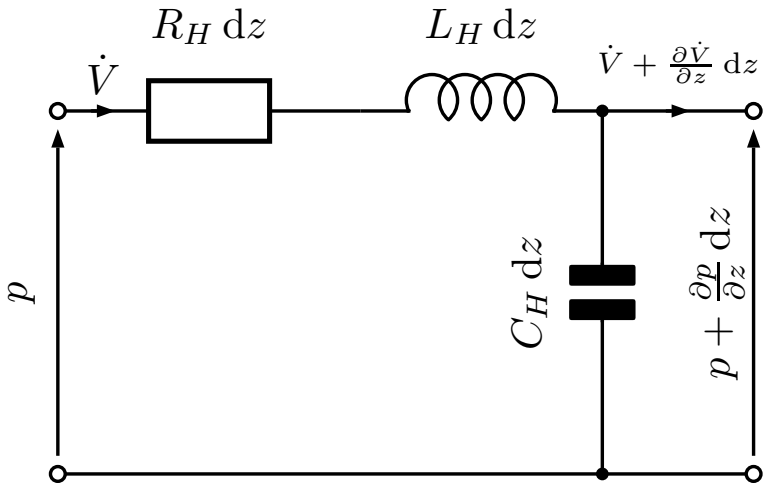
$$L_H \left(\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \cancel{\frac{2\dot{V}}{|S|} \frac{\partial \dot{V}}{\partial z}} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \left(1 - \cancel{\frac{\dot{V}^2}{|S|^2 c^2}} \right) = -R_H \dot{V} \tag{201}$$

daje prostą postać

$$L_H \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \tag{202}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Naczynie podatne

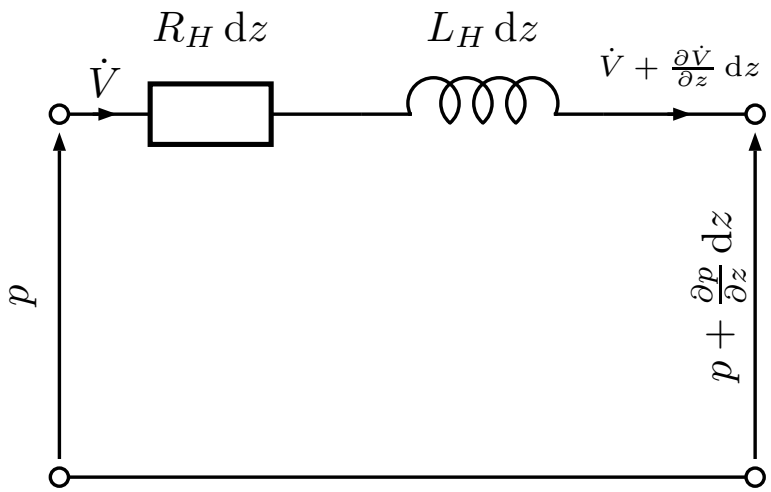


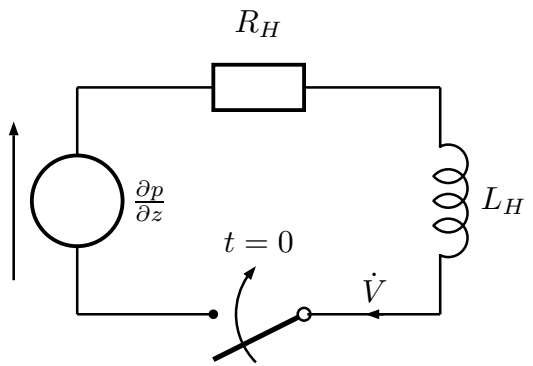
$$C_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = 0 \tag{203}$$

$$L_H \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \tag{204}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Naczynie sztywne



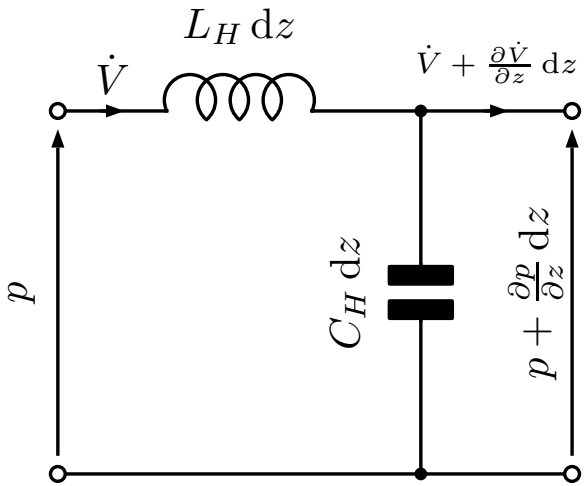


$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = 0 \tag{205}$$

$$L_H \frac{\mathrm{d}\dot{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \tag{206}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Naczynie bezstratne

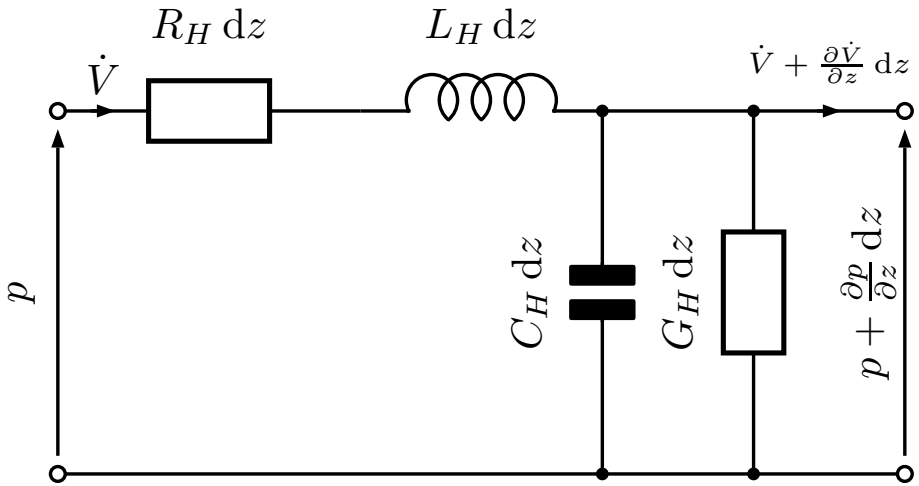


$$C_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = 0 \tag{207}$$

$$L_H \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{208}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Naczynie podatne z upływnością



$$C_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = -G_H\, p \tag{209}$$

$$L_H \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -R_H \dot{V} \tag{210}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Analogia mech.-elekt. – podsumowanie

$$
\begin{aligned}
U &\Longleftrightarrow \frac{\Delta p}{L} \\
I &\Longleftrightarrow \dot{V} \\
R_e &\Longleftrightarrow R_H = \frac{8\mu}{\pi R^4} \\
L_e &\Longleftrightarrow L_H = \frac{\rho}{\pi R^2} \\
C_e &\Longleftrightarrow C_H = \frac{\mathrm{d}|S|}{\mathrm{d}p}
\end{aligned}
$$

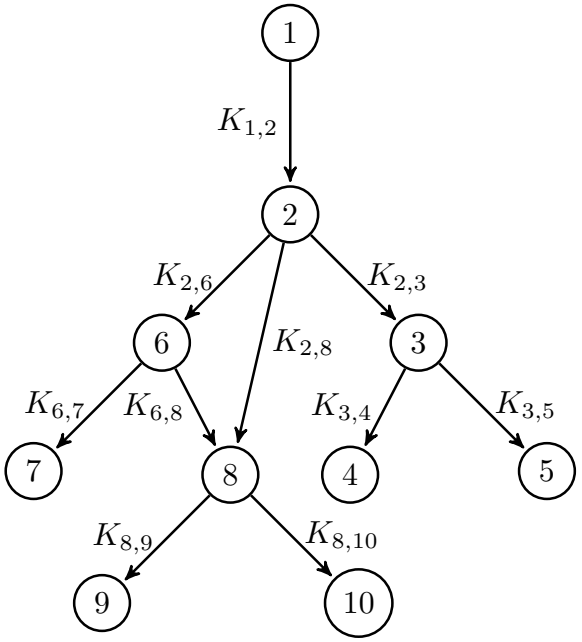
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

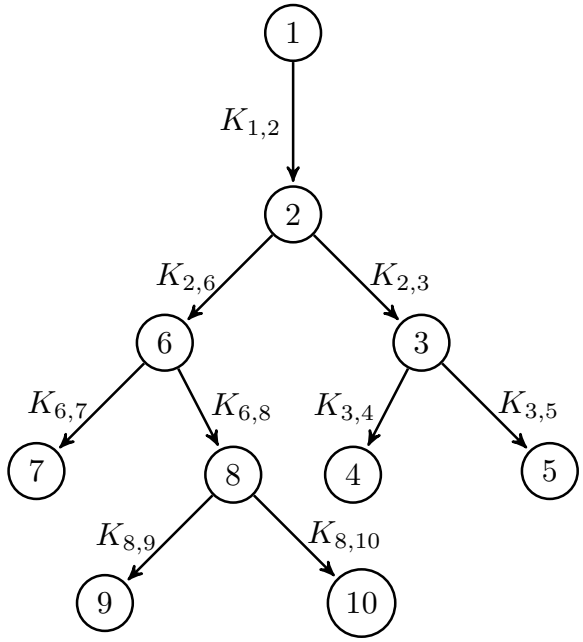
Sieci naczyń

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Typy sieci

- Sieci zamknięte
- Sieci otwarte

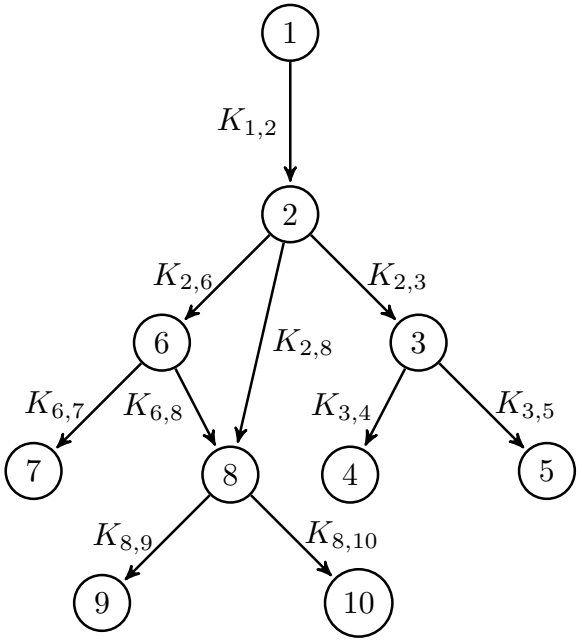


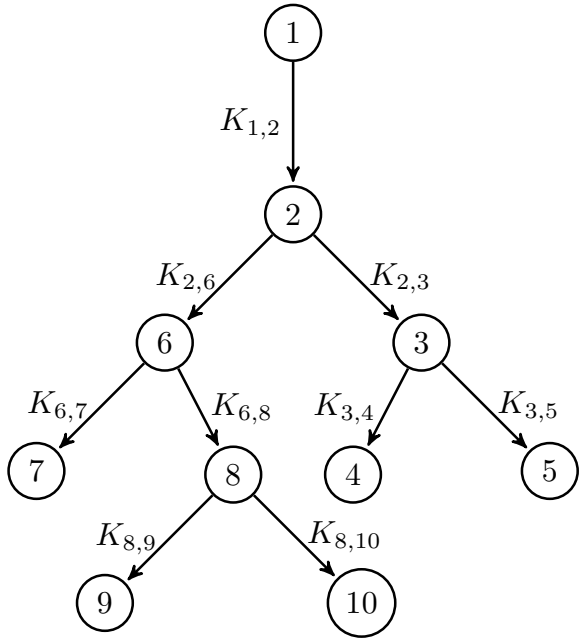


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Pytania

- Jakie są poszczególne natężenia przepływu?
- Jakie są poszczególne spadki ciśnień?
- Jakie są kierunki przepływu:
  - sieci zamknięte?
  - sieci otwarte – jednoznaczne!





Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równanie Bernoulliego

Równanie Bernoulliego

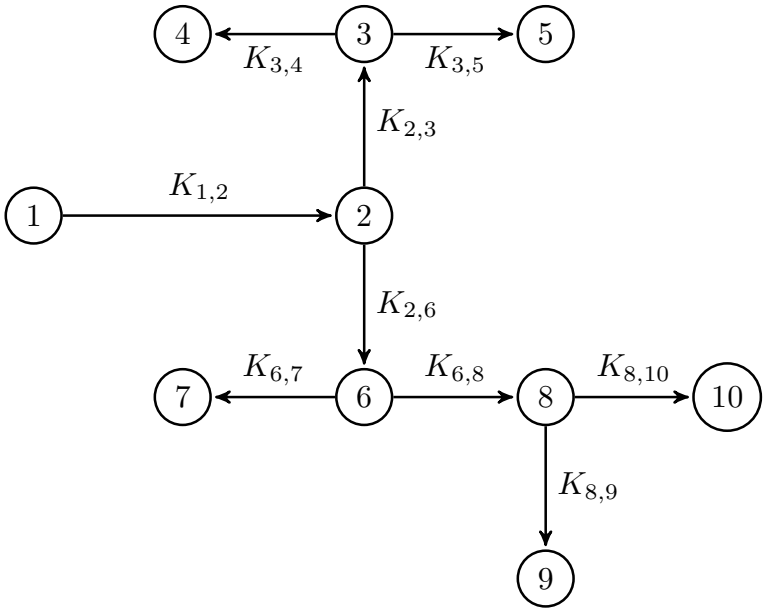
$$\left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1\right) - \left(\frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2\right) = e_2 - e_1 \quad (211)$$

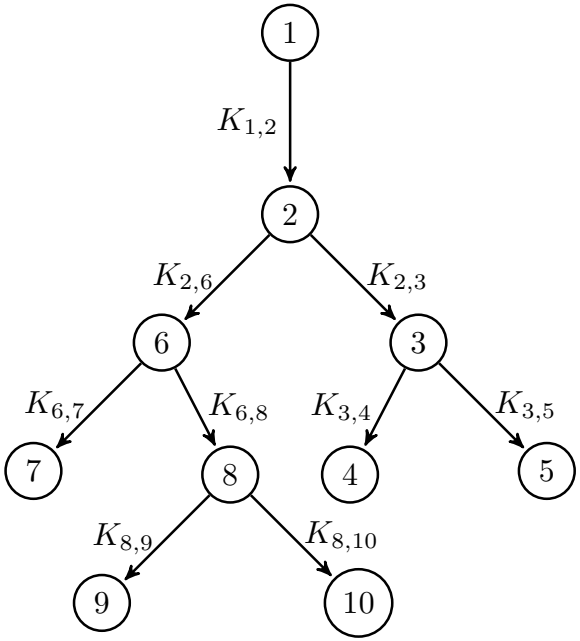
$$\left(\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) = \underbrace{\sum_i \Delta h_{li}}_{\text{liniowe}} + \cancel{\underbrace{\sum_j \Delta h_{nj}}_{\text{lokalne}}} \quad (212)$$

- energia kinetyczna $\frac{u^2}{2}$
- energia ciśnienia $\frac{p}{\rho}$
- energia potencjalna gz
- energia wewnętrzna e

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Wzajemna konfiguracja





Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Straty liniowe

Równanie Darcy'ego–Weisbacha

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho u^2}{2} \tag{213}$$

bierze się z innego zapisu prędkości średniej

$$u = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L} = \frac{D^2 \Delta p}{32\mu L}; \quad \mathrm{Re} = \frac{uD\rho}{\mu}; \quad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{214}$$

Straty liniowe

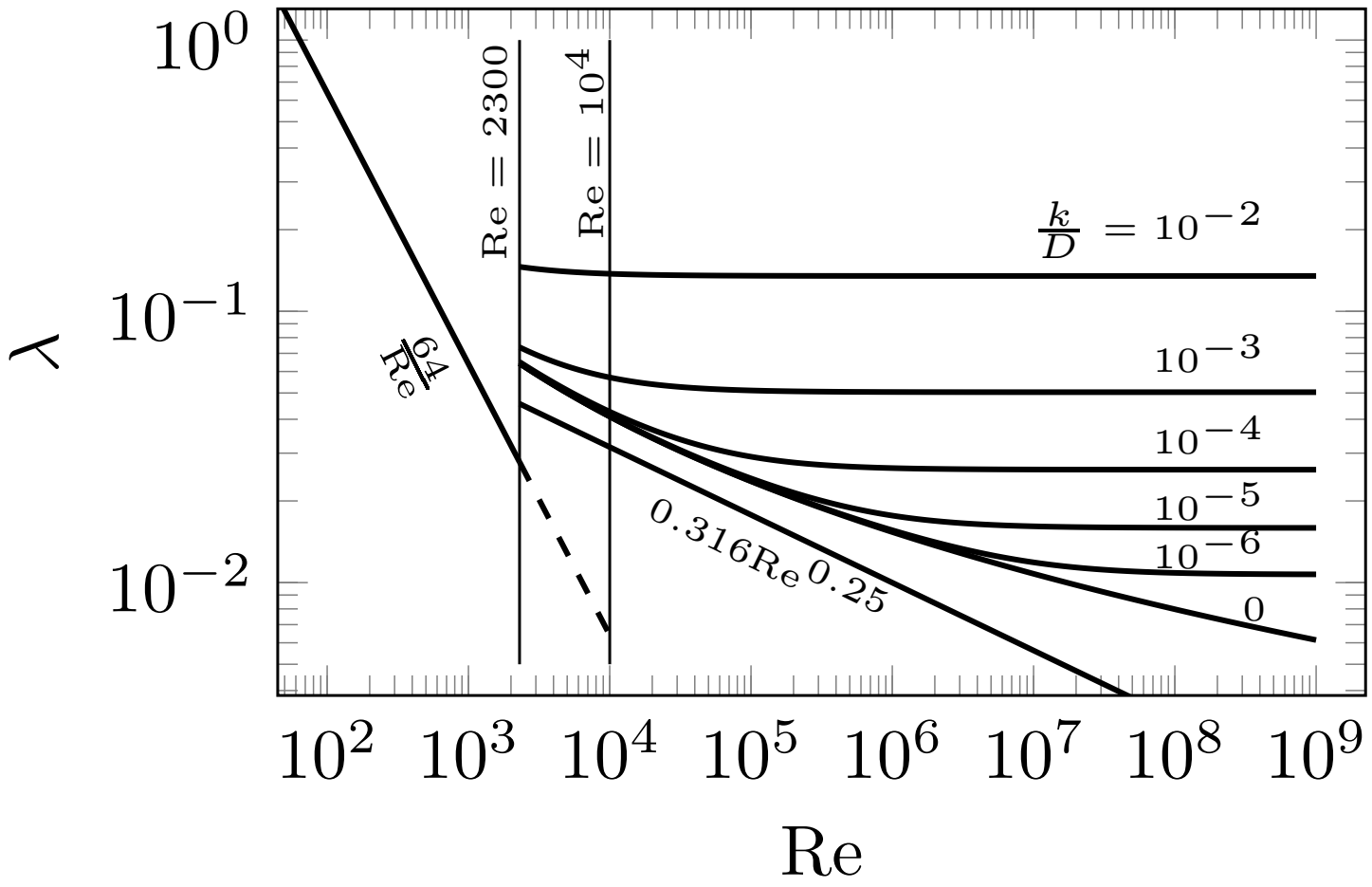
$$\Delta h_l = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g} = \frac{\lambda}{S^2} \frac{L}{D} \frac{\dot{V}^2}{2g} = K\dot{V}^2 \tag{215}$$

gdzie

$$K = \frac{8\lambda L}{\pi^2 D^5 g} \tag{216}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Straty liniowe



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Równania

- Spadek ciśnienia

$$\Delta h_{i,j} = h_i - h_j = K_{i,j}\,\dot{V}_{i,j}^2 \tag{217}$$

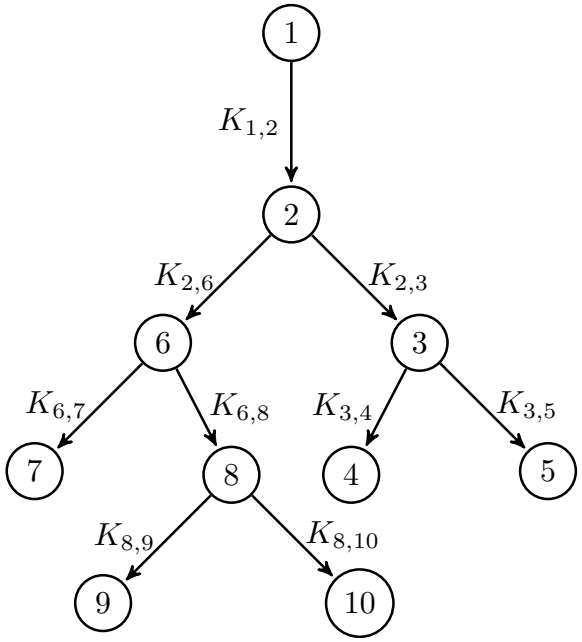
- Równanie zachowania masy

$$\sum_i \dot{V}_{i\,\mathrm{in}} = \sum_j \dot{V}_{j\,\mathrm{out}} \tag{218}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Układ równań nieliniowych

$H_2, H_3, H_6, H_8 \quad =?$
$\dot{V}_{1,2}, \dot{V}_{2,3}, \dot{V}_{3,4}, \dot{V}_{3,5},$
$\dot{V}_{2,6}, \dot{V}_{6,7}, \dot{V}_{6,8}, \dot{V}_{8,9},$
$\dot{V}_{8,10} \quad =?$

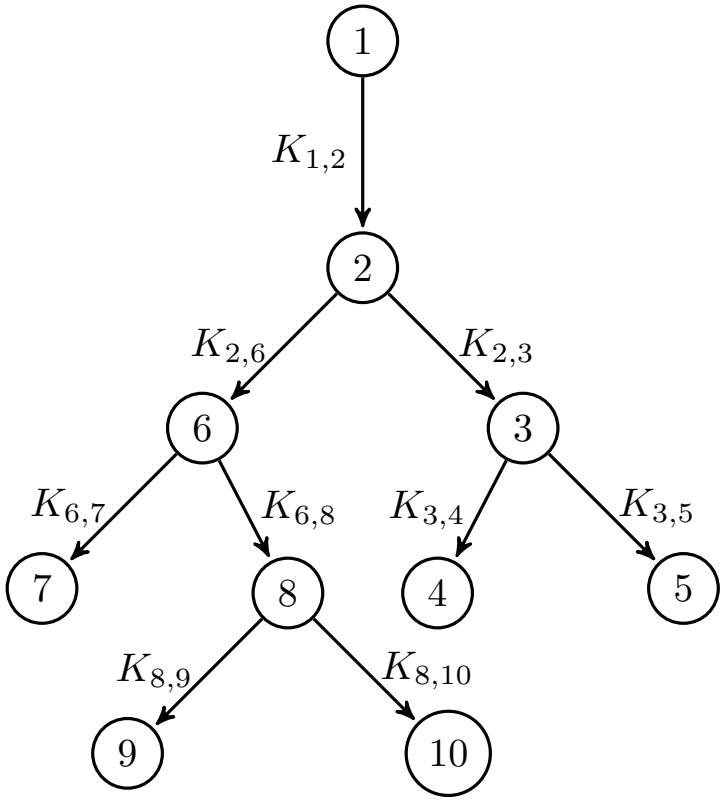


$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 = H_{10} = 0$
H_1 znane

$$\dot{V}_{1,2} = \dot{V}_{2,6} + \dot{V}_{2,3} \tag{219a}$$
$$\dot{V}_{2,6} = \dot{V}_{6,7} + \dot{V}_{6,8} \tag{219b}$$
$$\dot{V}_{6,8} = \dot{V}_{8,9} + \dot{V}_{8,10} \tag{219c}$$
$$\dot{V}_{2,3} = \dot{V}_{3,4} + \dot{V}_{3,5} \tag{219d}$$
$$H_1 - H_2 = K_{1,2}\dot{V}_{1,2}^2 \tag{219e}$$
$$H_2 - H_3 = K_{2,3}\dot{V}_{2,3}^2 \tag{219f}$$
$$H_2 - H_6 = K_{2,6}\dot{V}_{2,6}^2 \tag{219g}$$
$$H_3 = K_{3,4}\dot{V}_{3,4}^2 \tag{219h}$$
$$H_3 = K_{3,5}\dot{V}_{3,5}^2 \tag{219i}$$
$$H_6 = K_{6,7}\dot{V}_{6,7}^2 \tag{219j}$$
$$H_6 - H_8 = K_{6,8}\dot{V}_{6,8}^2 \tag{219k}$$
$$H_8 = K_{8,9}\dot{V}_{8,9}^2 \tag{219l}$$
$$H_8 = K_{8,10}\dot{V}_{8,10}^2 \tag{219m}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

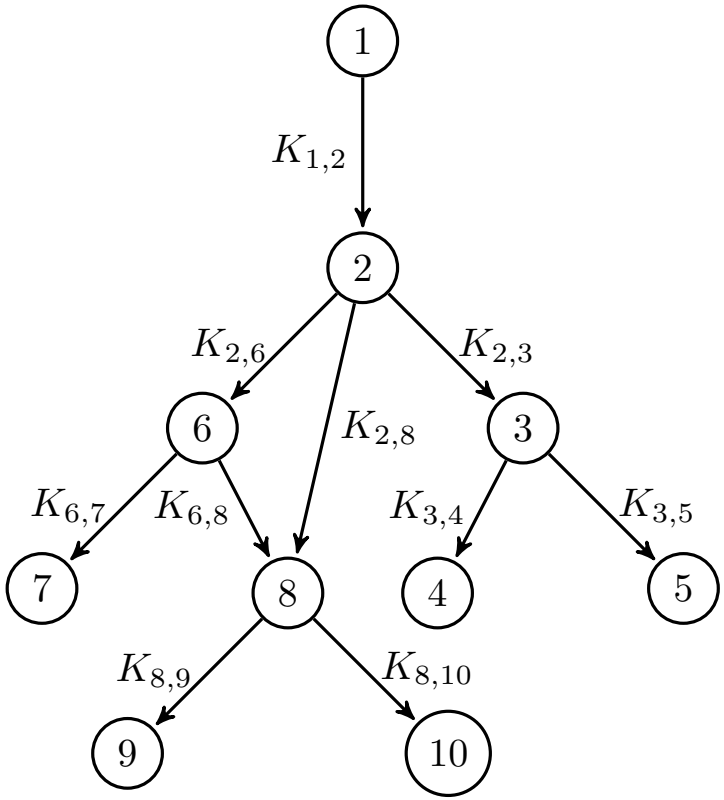
Graf



N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Out
1		1									**1**
2			1			1					2
3				1	1						2
4											**0**
5											**0**
6							1	1			2
7											**0**
8									1	1	2
9											**0**
10											**0**
In	**0**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Graf

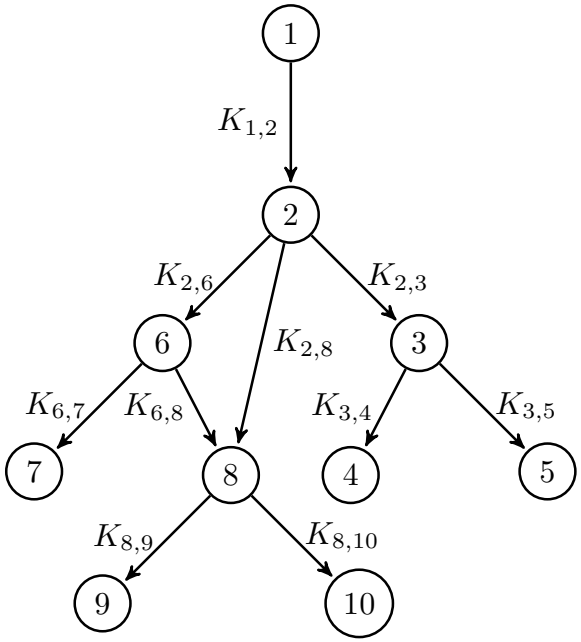


N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Out
1		1									**1**
2			1			1		1			3
3				1	1						2
4											**0**
5											**0**
6							1	1			2
7											**0**
8									1	1	2
9											**0**
10											**0**
In	**0**	1	1	1	1	1	1	2	1	1	

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Układ równań nieliniowych

$H_2, H_3, H_6, H_8 \quad =?$
$\dot{V}_{1,2}, \dot{V}_{2,3}, \dot{V}_{3,4}, \dot{V}_{3,5},$
$\dot{V}_{2,6}, \dot{V}_{6,7}, \dot{V}_{6,8}, \dot{V}_{8,9},$
$\dot{V}_{8,10}, \boxed{\dot{V}_{2,8}} \quad =?$



$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 = H_{10} = 0$
H_1 znane

$$\dot{V}_{1,2} = \dot{V}_{2,6} + \dot{V}_{2,3} \boxed{+\dot{V}_{2,8}} \tag{220a}$$

$$\dot{V}_{2,6} = \dot{V}_{6,7} + \dot{V}_{6,8} \tag{220b}$$

$$\dot{V}_{6,8} \boxed{+\dot{V}_{2,8}} = \dot{V}_{8,9} + \dot{V}_{8,10} \tag{220c}$$

$$\dot{V}_{2,3} = \dot{V}_{3,4} + \dot{V}_{3,5} \tag{220d}$$

$$H_1 - H_2 = K_{1,2}\dot{V}_{1,2}^2 \tag{220e}$$

$$H_2 - H_3 = K_{2,3}\dot{V}_{2,3}^2 \tag{220f}$$

$$H_2 - H_6 = K_{2,6}\dot{V}_{2,6}^2 \tag{220g}$$

$$H_3 = K_{3,4}\dot{V}_{3,4}^2 \tag{220h}$$

$$H_3 = K_{3,5}\dot{V}_{3,5}^2 \tag{220i}$$

$$H_6 = K_{6,7}\dot{V}_{6,7}^2 \tag{220j}$$

$$H_6 - H_8 = K_{6,8}\dot{V}_{6,8}^2 \tag{220k}$$

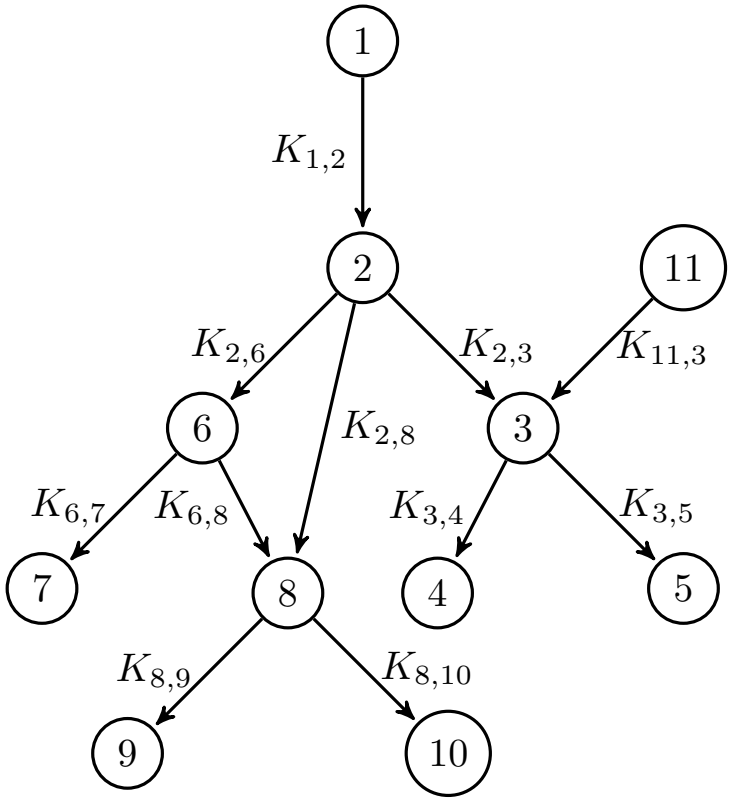
$$H_8 = K_{8,9}\dot{V}_{8,9}^2 \tag{220l}$$

$$H_8 = K_{8,10}\dot{V}_{8,10}^2 \tag{220m}$$

$$\boxed{H_2 - H_8 = K_{2,8}\dot{V}_{2,8}^2} \tag{220n}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Graf

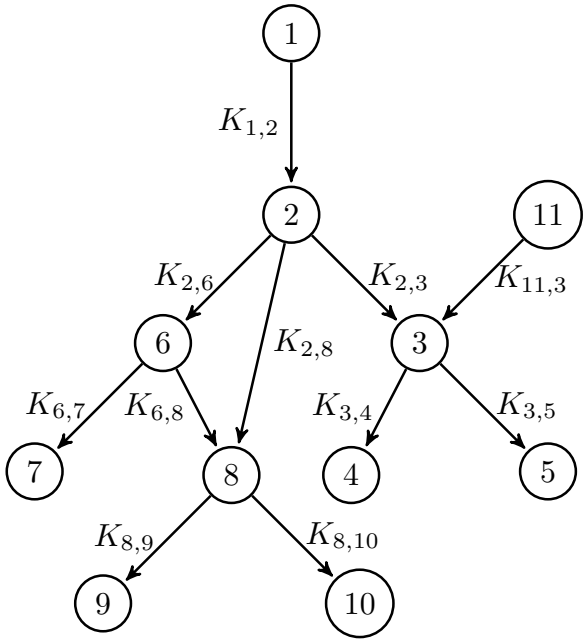


N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Out
1		1										**1**
2			1			1		1				**3**
3				1	1							**2**
4												**0**
5												**0**
6							1	1				**2**
7												**0**
8									1	1		**2**
9												**0**
10												**0**
11			1									**1**
In	**0**	1	2	1	1	1	1	2	1	1	**0**	

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Układ równań nieliniowych

$H_2, H_3, H_6, H_8 \quad =?$
$\dot{V}_{1,2}, \dot{V}_{2,3}, \dot{V}_{3,4}, \dot{V}_{3,5},$
$\dot{V}_{2,6}, \dot{V}_{6,7}, \dot{V}_{6,8}, \dot{V}_{8,9},$
$\dot{V}_{8,10}, \dot{V}_{2,8}, \boxed{\dot{V}_{11,3}} \quad =?$



$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 = H_{10} = 0$
H_1, H_{11} znane

$$\dot{V}_{1,2} = \dot{V}_{2,6} + \dot{V}_{2,3} + \dot{V}_{2,8} \tag{221a}$$
$$\dot{V}_{2,6} = \dot{V}_{6,7} + \dot{V}_{6,8} \tag{221b}$$
$$\dot{V}_{6,8} + \dot{V}_{2,8} = \dot{V}_{8,9} + \dot{V}_{8,10} \tag{221c}$$
$$\dot{V}_{2,3} \boxed{+\dot{V}_{11,3}} = \dot{V}_{3,4} + \dot{V}_{3,5} \tag{221d}$$
$$H_1 - H_2 = K_{1,2}\dot{V}_{1,2}^2 \tag{221e}$$
$$H_2 - H_3 = K_{2,3}\dot{V}_{2,3}^2 \tag{221f}$$
$$H_2 - H_6 = K_{2,6}\dot{V}_{2,6}^2 \tag{221g}$$
$$H_3 = K_{3,4}\dot{V}_{3,4}^2 \tag{221h}$$
$$H_3 = K_{3,5}\dot{V}_{3,5}^2 \tag{221i}$$
$$H_6 = K_{6,7}\dot{V}_{6,7}^2 \tag{221j}$$
$$H_6 - H_8 = K_{6,8}\dot{V}_{6,8}^2 \tag{221k}$$
$$H_8 = K_{8,9}\dot{V}_{8,9}^2 \tag{221l}$$
$$H_8 = K_{8,10}\dot{V}_{8,10}^2 \tag{221m}$$
$$H_2 - H_8 = K_{2,8}\dot{V}_{2,8}^2 \tag{221n}$$
$$\boxed{H_{11} - H_3 = K_{11,3}\dot{V}_{11,3}^2} \tag{221o}$$

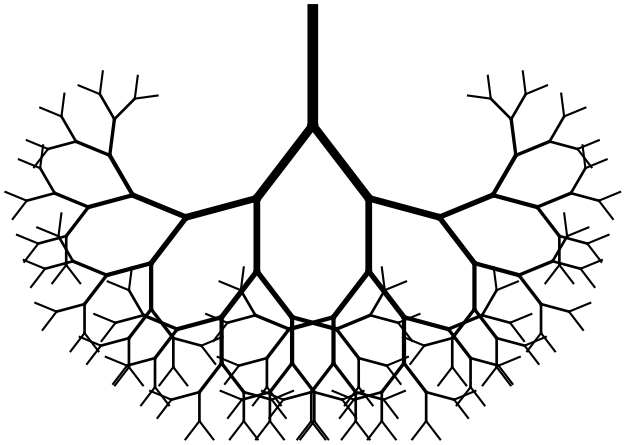
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawa Murraya

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawa Murraya

Prawa Murraya opisują sposób w jaki większe naczynia rozgałęziają się na mniejsze lub odwrotnie. Sposób rozgałęziania się, związany jest z założeniem optymalnego układu, który zapewnia najszybszy transport przy najmniejszej włożonej pracy. Prawa te związane są z drzewiastą strukturą połączeń naczyń.

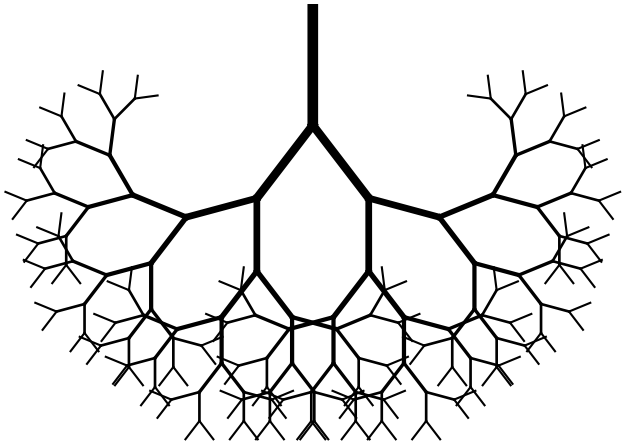


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawa Murraya

Prawa Murraya dotyczą

- promieni przed i po rozgałęzieniu
- kątów rozgałęzienia



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawo Murraya o promieniach

Wyróżnić można dwa rodzaje energii, które mają swój udział w podtrzymywaniu przepływu krwi:

- energia potrzebna do pokonania oporów związanych z lepkością – energia dyssypacji, wyrażona przez moc dyssypacji

$$N_d = \dot{V}\Delta p = \frac{A\dot{V}^2}{R^4} \tag{222}$$

gdzie $A = 8\mu L\pi^{-1}$

- energią do utrzymania objętości krwi w naczyniach, która wyrażona jest przez moc

$$N_m = mV = m\pi R^2 L = B\,R^2 \tag{223}$$

gdzie $B = \pi L m$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawo Murraya o promieniach

- moc dyssypacji

$$N_d = \dot{V}\Delta p = \frac{A\dot{V}^2}{R^4} \tag{224}$$

- moc 'metaboliczna'

$$N_m = mV = m\pi R^2 L = B\,R^2 \tag{225}$$

Może istnieć jakiś promień R pośredni, który zminimalizuje sumę obu mocy

$$N = N_d + N_m = \frac{A\dot{V}^2}{R^4} + B\,R^2 \tag{226}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawo Murraya o promieniach

Moc całkowita

$$N = N_d + N_m = \frac{A\dot{V}^2}{R^4} + B\,R^2 \tag{227}$$

Warunek konieczny ekstremum

$$N'(R) = 0 = -\frac{4A\dot{V}^2}{R^5} + 2B\,R \tag{228}$$

daje

$$\dot{V}^2 = \frac{B}{2A}R^6, \quad \dot{V} = C\,R^3 \tag{229}$$

Druga pochodna sugeruje minimum

$$N''(R) = \frac{20A\dot{V}^2}{R^6} + 2B \geqslant 0 \tag{230}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawo Murraya o promieniach

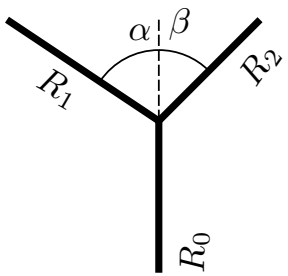
Warunek konieczny

$$\dot{V} = C\,R^3 \tag{231}$$

i równanie zachowania masy

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \tag{232}$$

dają prawo Murraya o promieniach

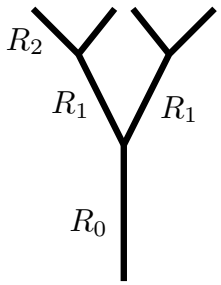


$$R_0^3 = R_1^3 + R_2^3 \tag{233}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawo Murraya o promieniach – wnioski

Dla symetrycznych bifurkacji $R_1 = R_2$ mamy



$$R_0^3 = 2R_1^3 \tag{234}$$

czyli

$$\frac{R_0}{R_1} = 2^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{R_0}{R_2} = 2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{R_0}{R_n} = 2^{\frac{n}{3}} \tag{235}$$

Możemy wyznaczyć liczbę rozgałęzień dla $\frac{R_0}{R_n} \approx 1500$

$$n = \frac{3\ln\frac{R_0}{R_n}}{\ln 2} = \frac{3\ln 1500}{\ln 2} \approx 31 \tag{236}$$

Ponieważ jest 2^n bifurkacji, więc możemy szacować liczbę naczyń na $2^{31} \approx 10^9$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

‘Turbulentne’ prawo Murraya o promieniach

Moc ‘metaboliczna’ jest taka sama, ale spadek ciśnienia w mocy dyssypacji

$$N_d = \dot{V}\Delta p \tag{237}$$

nie może być wyrażony za pomocą prawa Poiseuille’a. Mamy za to wzór Darcy’ego–Weisbacha

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{2R}\frac{\rho u^2}{2} \tag{238}$$

gdzie

$$\lambda = g\,\mathrm{Re}^{-k} \tag{239}$$

gdzie $k = 1$ dla przepływu laminarnego i $k = 0$ dla przepływu turbulentnego w pełni rozwiniętego

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

‘Turbulentne’ prawo Murraya o promieniach

- moc dyssypacji

$$N_d = \dot{V}\Delta p = \frac{A\dot{V}^{3-k}}{R^{5-k}} \tag{240}$$

- moc ‘metaboliczna’

$$N_m = B\,R^2 \tag{241}$$

Może istnieć jakiś promień R pośredni, który zminimalizuje sumę obu mocy

$$N = N_d + N_m = \frac{A\dot{V}^{3-k}}{R^{5-k}} + B\,R^2 \tag{242}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

‘Turbulentne’ prawo Murraya o promieniach

Moc całkowita

$$N = N_d + N_m = \frac{A\dot{V}^{3-k}}{R^{5-k}} + B\,R^2 \tag{243}$$

Warunek konieczny ekstremum

$$N'(R) = 0 = -\frac{A(5-k)\dot{V}^{3-k}}{R^{6-k}} + 2B\,R \tag{244}$$

daje

$$\dot{V}^{3-k} = \frac{2B}{A(5-k)} R^{7-k}, \quad \dot{V} = C\,R^{\frac{7-k}{3-k}} \tag{245}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

‘Turbulentne’ prawo Murraya o promieniach

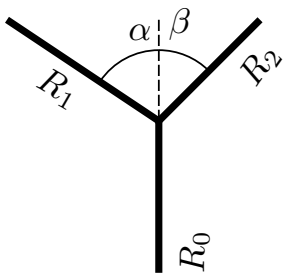
Warunek konieczny

$$\dot{V} = C\, R^{\frac{7-k}{3-k}} \tag{246}$$

i równanie zachowania masy

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \tag{247}$$

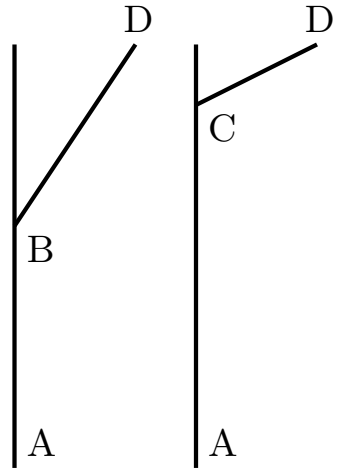
dają ‘turbulentne’ prawo Murraya o promieniach

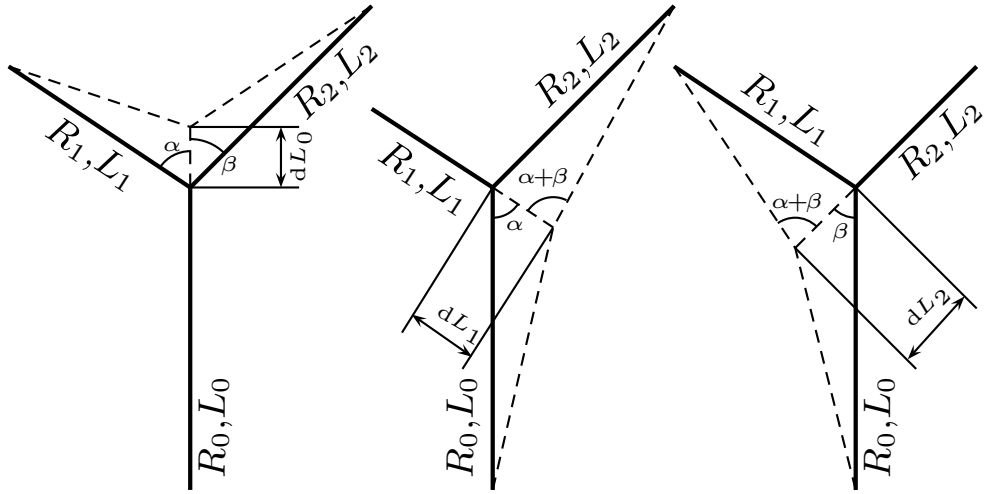


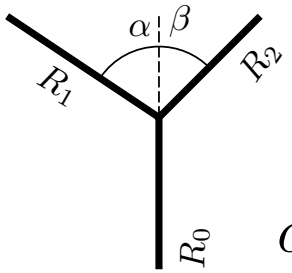
$$R_0^{\frac{7-k}{3-k}} = R_1^{\frac{7-k}{3-k}} + R_2^{\frac{7-k}{3-k}} \tag{248}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawo Murraya o kątach





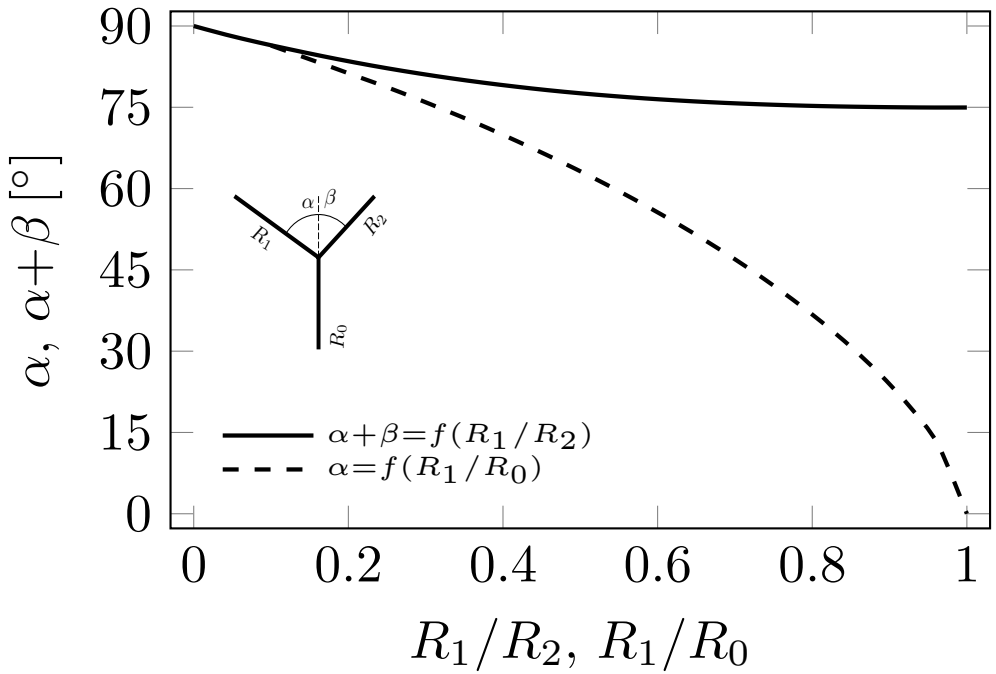


$$\alpha = \arccos \frac{R_0^4 + R_1^4 - (R_0^3 - R_1^3)^{\frac{4}{3}}}{2R_0^2 R_1^2} \tag{249}$$

$$\alpha + \beta = \arccos \frac{(R_1^3 + R_2^3)^{\frac{4}{3}} - R_1^4 - R_2^4}{2R_1^2 R_2^2} \tag{250}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawo Murraya o kątach

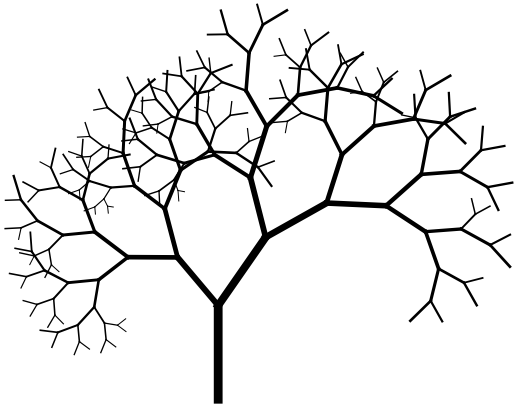


$$\alpha = \arccos \frac{R_0^4 + R_1^4 - (R_0^3 - R_1^3)^{\frac{4}{3}}}{2R_0^2 R_1^2} \tag{251}$$

$$\alpha + \beta = \arccos \frac{(R_1^3 + R_2^3)^{\frac{4}{3}} - R_1^4 - R_2^4}{2R_1^2 R_2^2} \tag{252}$$

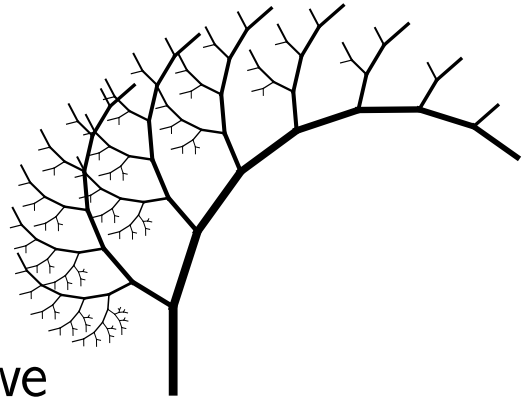
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawa Murraya – przykłady

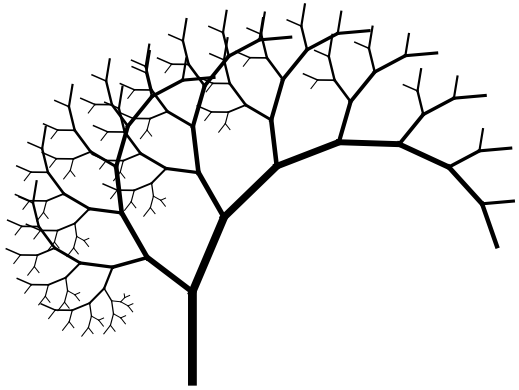


Losowe

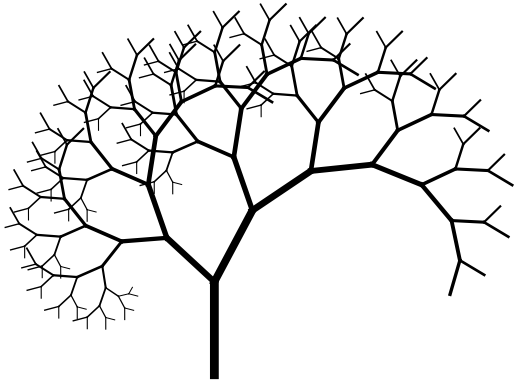
$\frac{R_1}{R_2}$



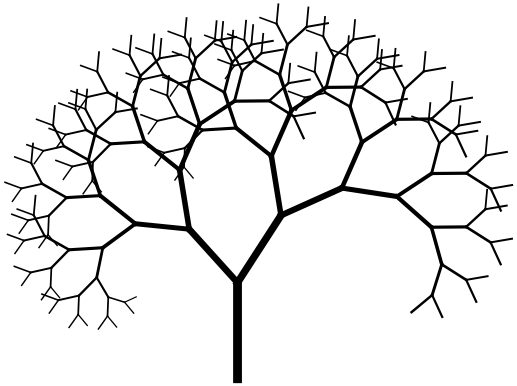
$\frac{R_1}{R_2} = 0.6$



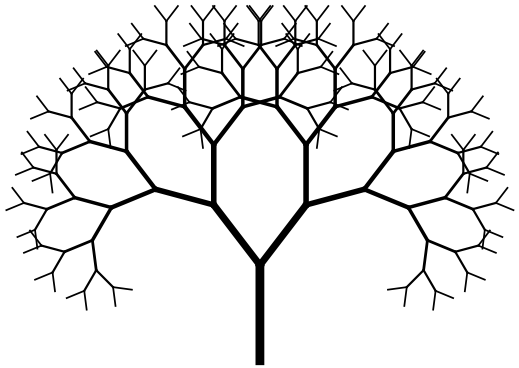
$\frac{R_1}{R_2} = 0.7$



$\frac{R_1}{R_2} = 0.8$



$\frac{R_1}{R_2} = 0.9$



$\frac{R_1}{R_2} = 1$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Prawa Murraya – podsumowanie

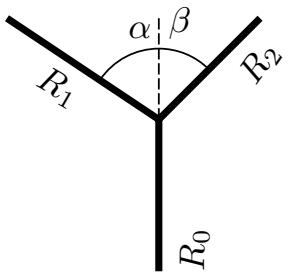
- prawo o promieniach

$$R_0^{\frac{7-k}{3-k}} = R_1^{\frac{7-k}{3-k}} + R_2^{\frac{7-k}{3-k}} \tag{253}$$

dla przepływu laminarnego $k = 1$, a dla w pełni turbulentnego $k = 0$

- prawo o kątach

$$\alpha = \arccos \frac{R_0^4 + R_1^4 - (R_0^3 - R_1^3)^{\frac{4}{3}}}{2R_0^2 R_1^2} \tag{254}$$



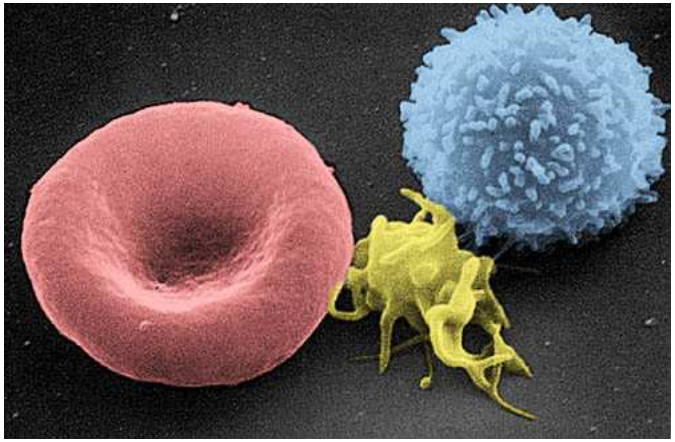
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Właściwości

- Lepkość plazmy
- Hematokryt
- Odkształcalność czerwonych krwinek
- Agregacja czerwonych krwinek
- Wpływ temperatury na lepkość krwi
- Granica płynięcia
- Tiksotropia
- Fluktuacje termiczne membrany krwinek



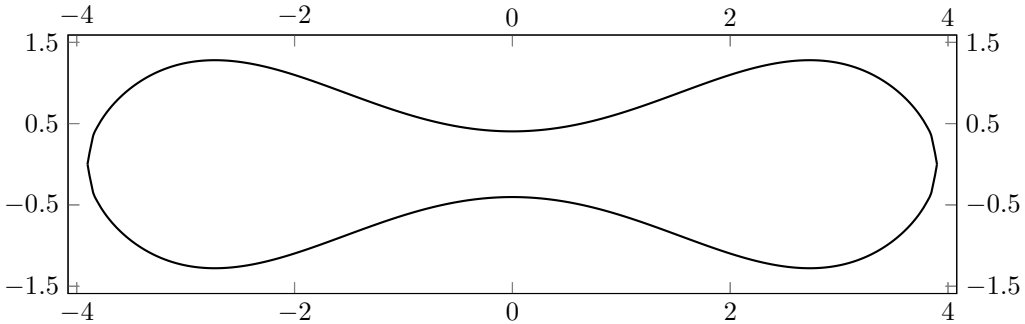
www.wikipedia.org

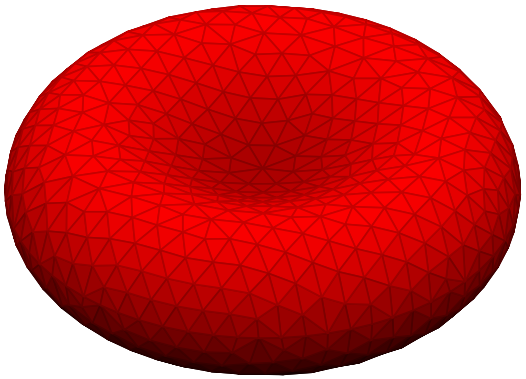
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

RBC

Średni kształt czerwonej krwinki można aproksymować następującym wzorem

$$f(x,y) = D_0\sqrt{1-\frac{4(x^2+y^2)}{D_0^2}}\left(a_0 + a_1\frac{x^2+y^2}{D_0^2} + a_2\frac{(x^2+y^2)^2}{D_0^4}\right)$$





Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

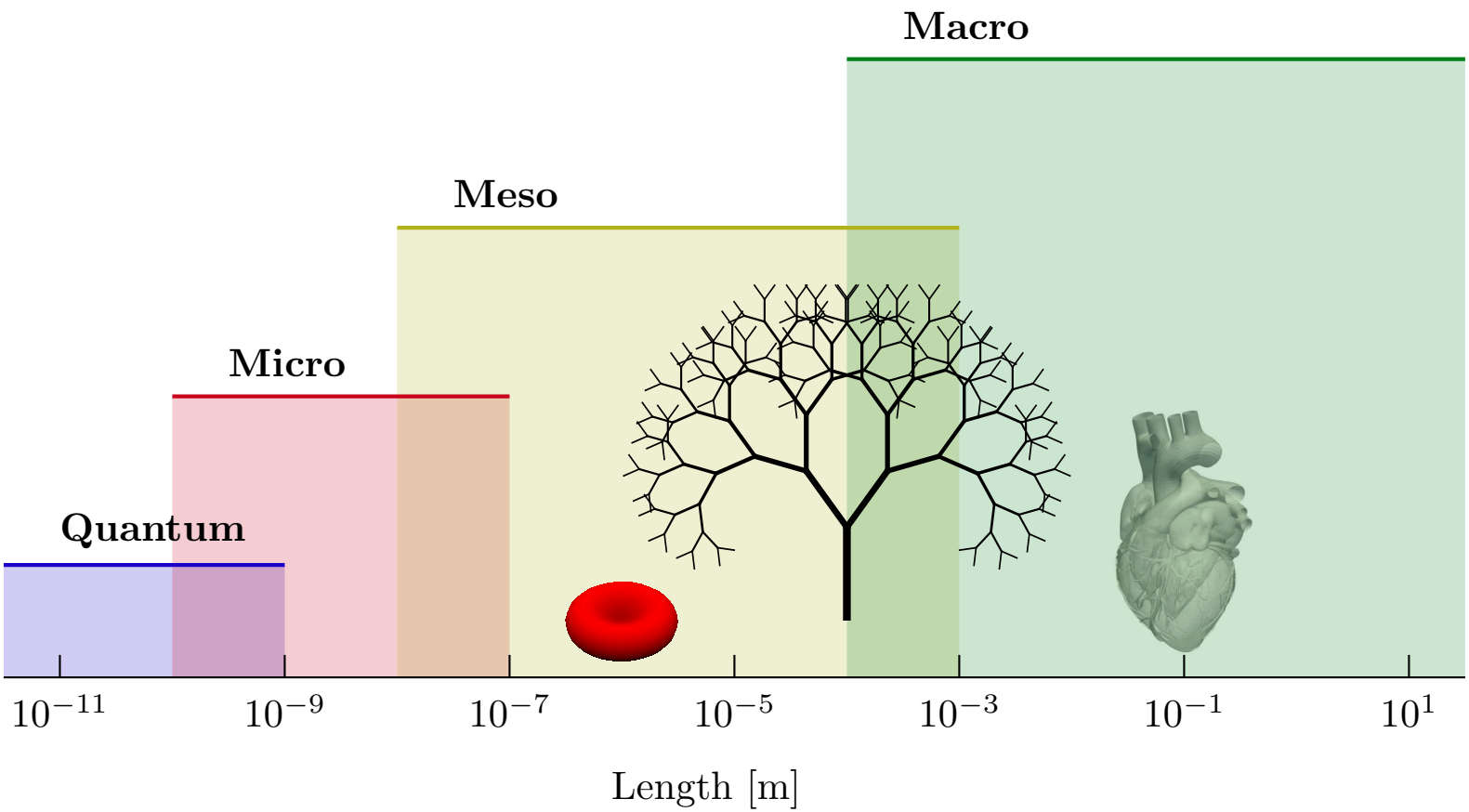
Różne skale

Ruch płynu może być opisany modelami w zależności od poziomach skal:

- Mikroskopowych
  - Dynamika molekularna
  - Metody Monte Carlo
- Mezoskopowych
  - Metoda siatkowa Boltzmanna
  - Metoda cząstek dyssypatywnych
  - Dynamika Browna
  - Hydrodynamika wygładzonych cząstek
- Makroskopowych (kontinuum)
  - Klasyczna mechanika płynów

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Różne skale



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opisy

- Makroskopowy (kontinuum) – wymiar $> 100\mu m$
  - newtonowskie – średnica $> 1mm$
  - nienewtonowskie – $1mm >$ średnica $> 100\mu m$
- Mezoskopowy – średnica $< 100\mu m$. Potrzebne jest bezpośrednie modelowanie czerwonych krwinek dla naczyń o promieniu mniejszym niż $100\mu m$.

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

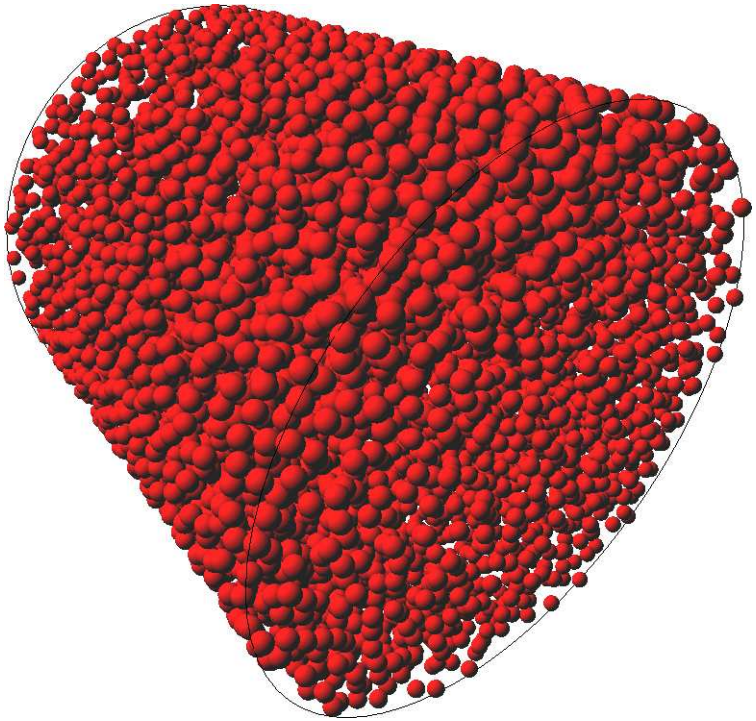
Modele

- Jednofazowe
  - newtonowski
  - nienewtonowskie
- Wielofazowe
  - transport pasywny
    - Sztywne RBC
    - Podatne RBC
  - transport aktywny (interakcja płyn-ciało stałe – FSI)
    - Sztywne RBC
    - Podatne RBC

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przykład – transport pasywny

Przykładowa symulacja transporty pasywnego sztywnej krwinki w przepływie Hagena–Poiseuille'a.
Model semi-ciały z dyskretnymi krwinkami i ciągłym płynem.



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy

Równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{255}$$

Równanie Naviera–Stokesa

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{256}$$

Wzór na lepkość według wybranego modelu:

- newtonowski

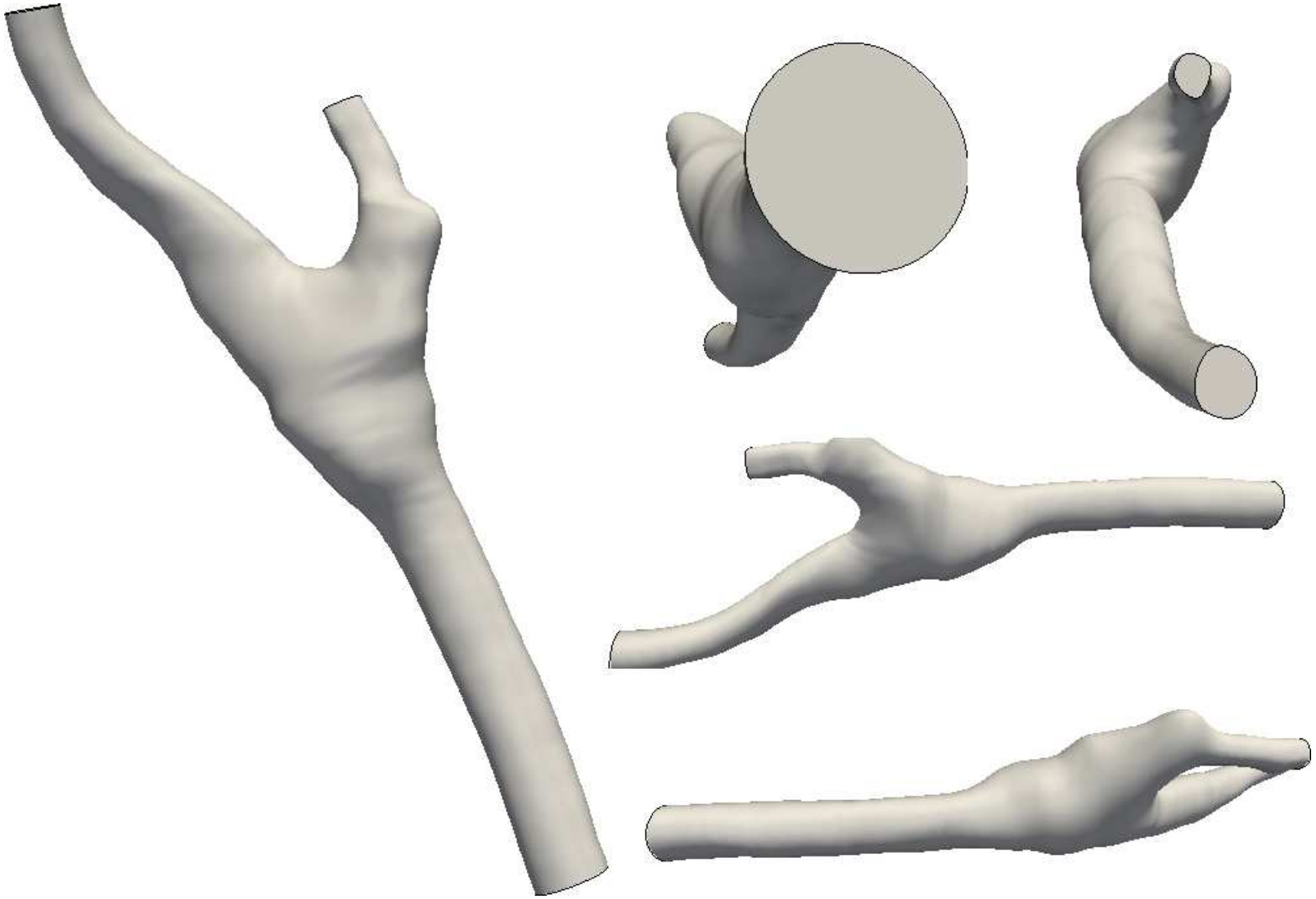
$$\mu = \mathrm{const} \tag{257}$$

- nienewtonowski

$$\mu = f(\gamma) \tag{258}$$

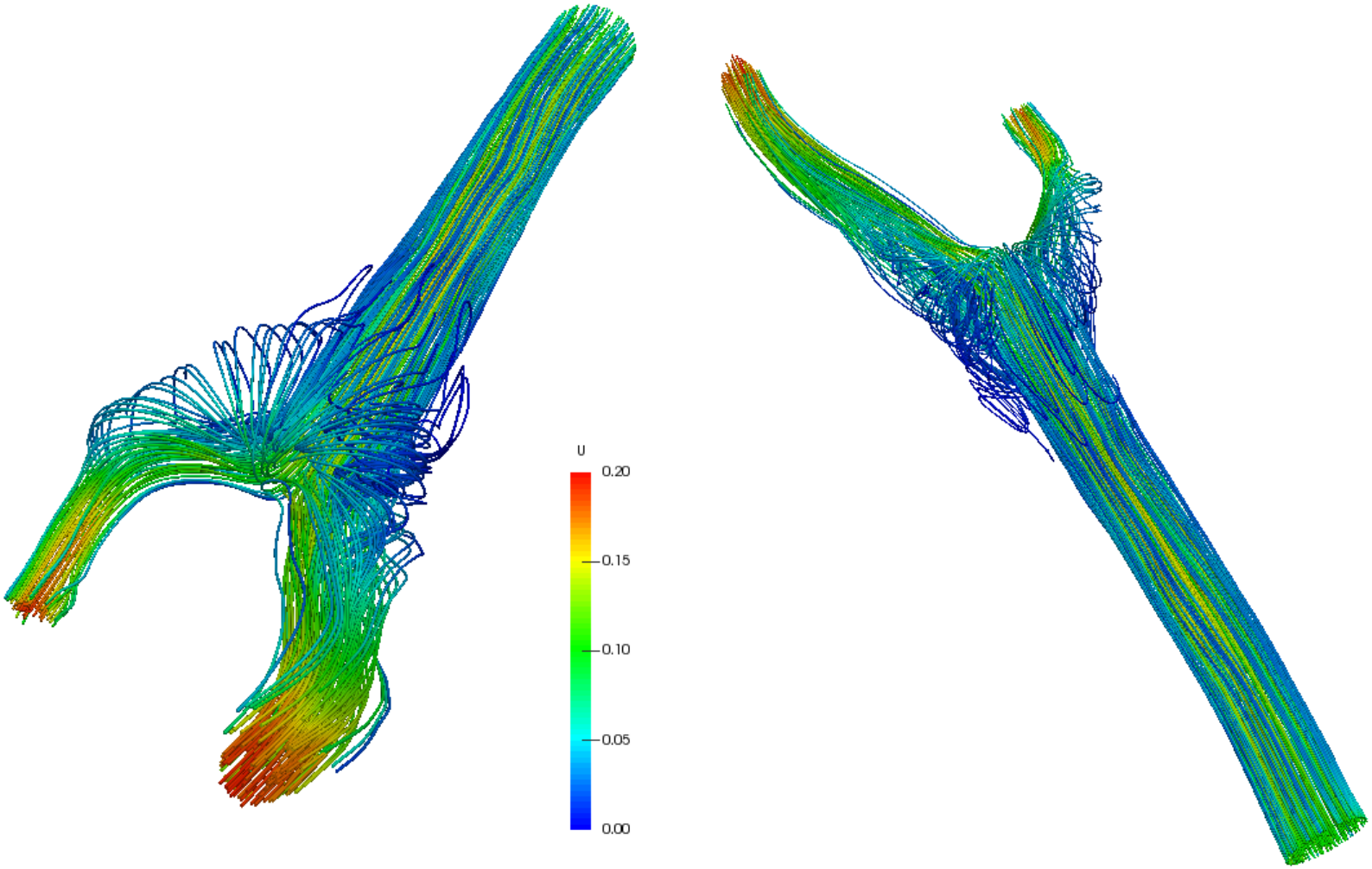
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



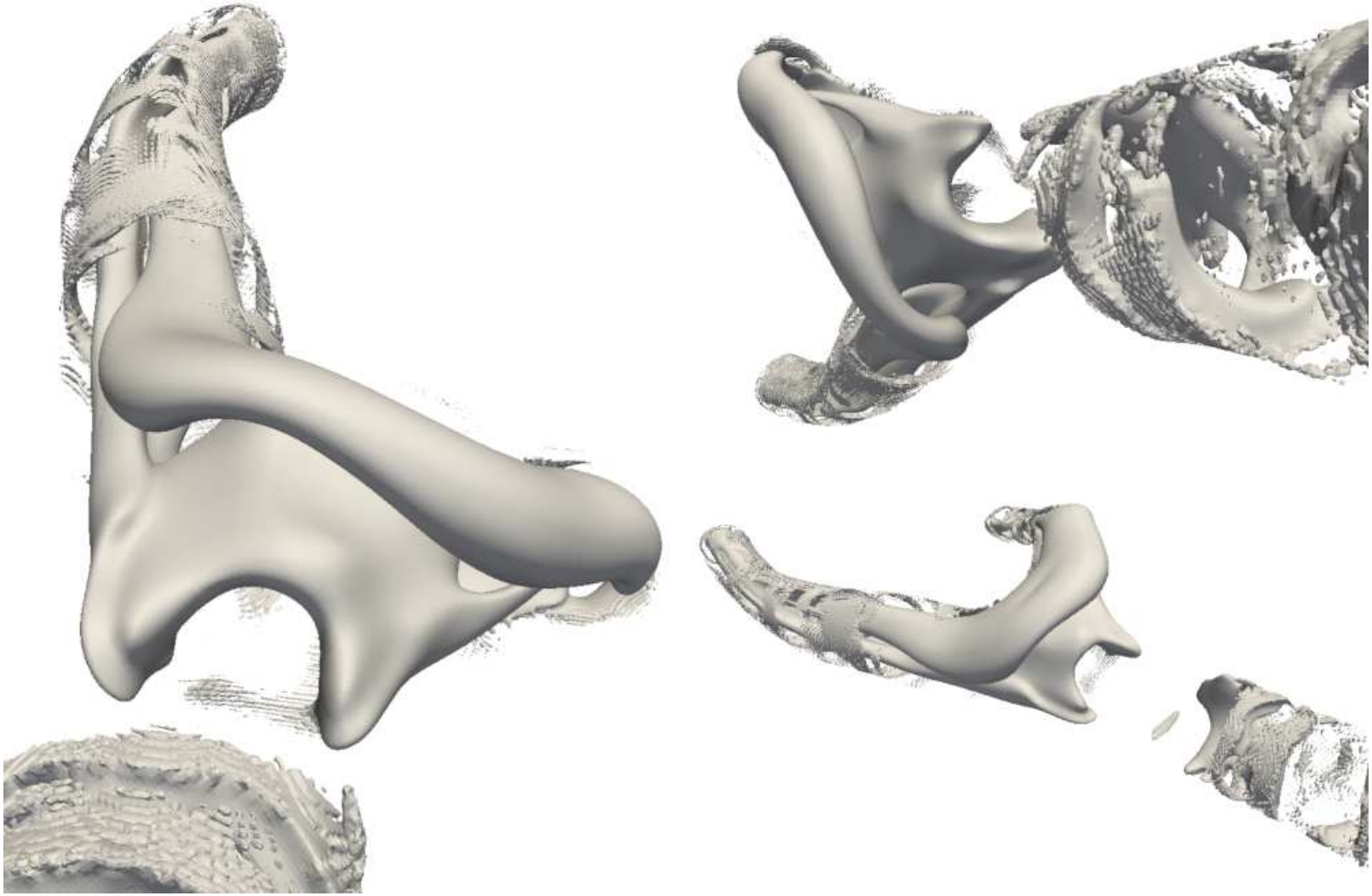
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



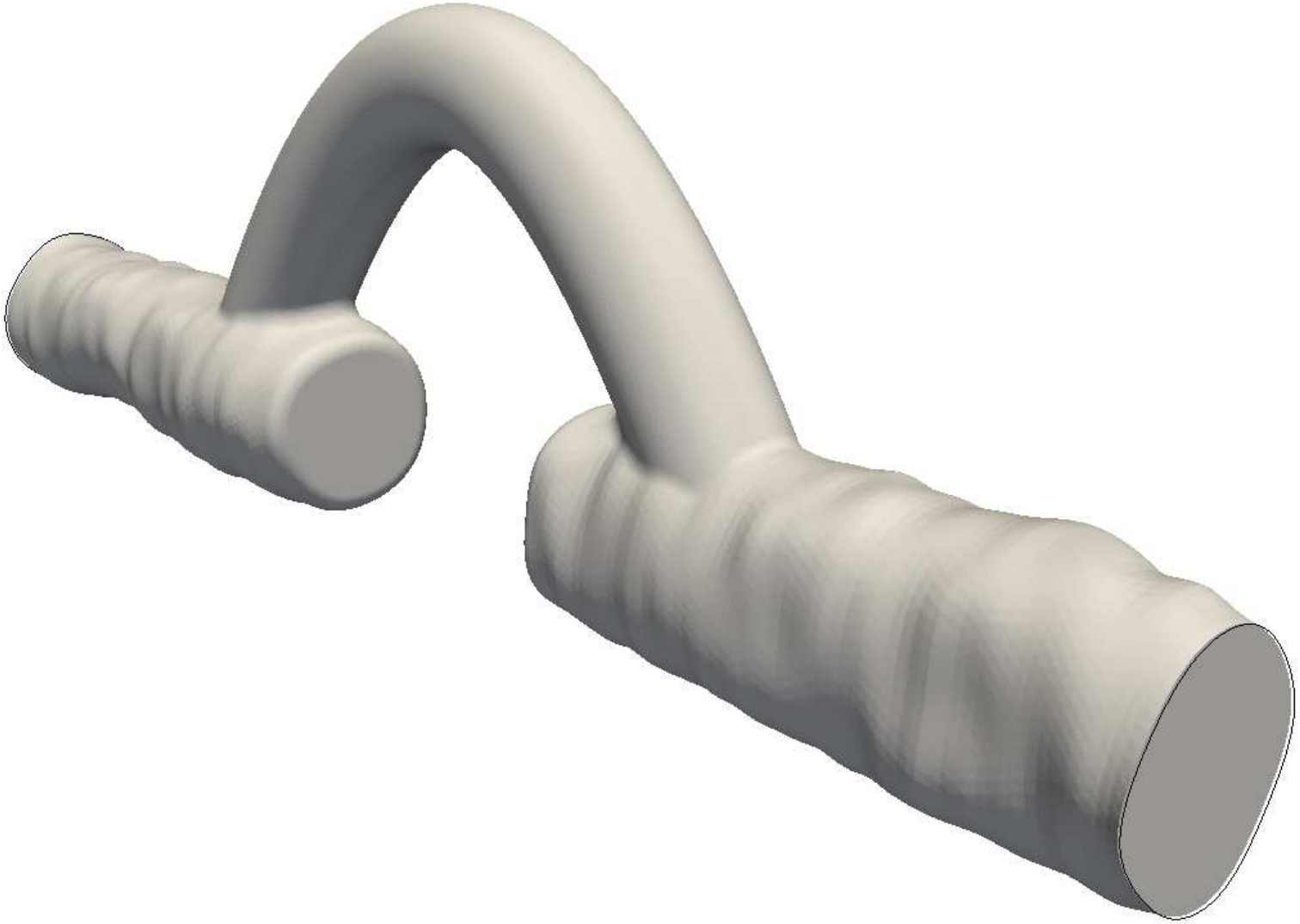
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



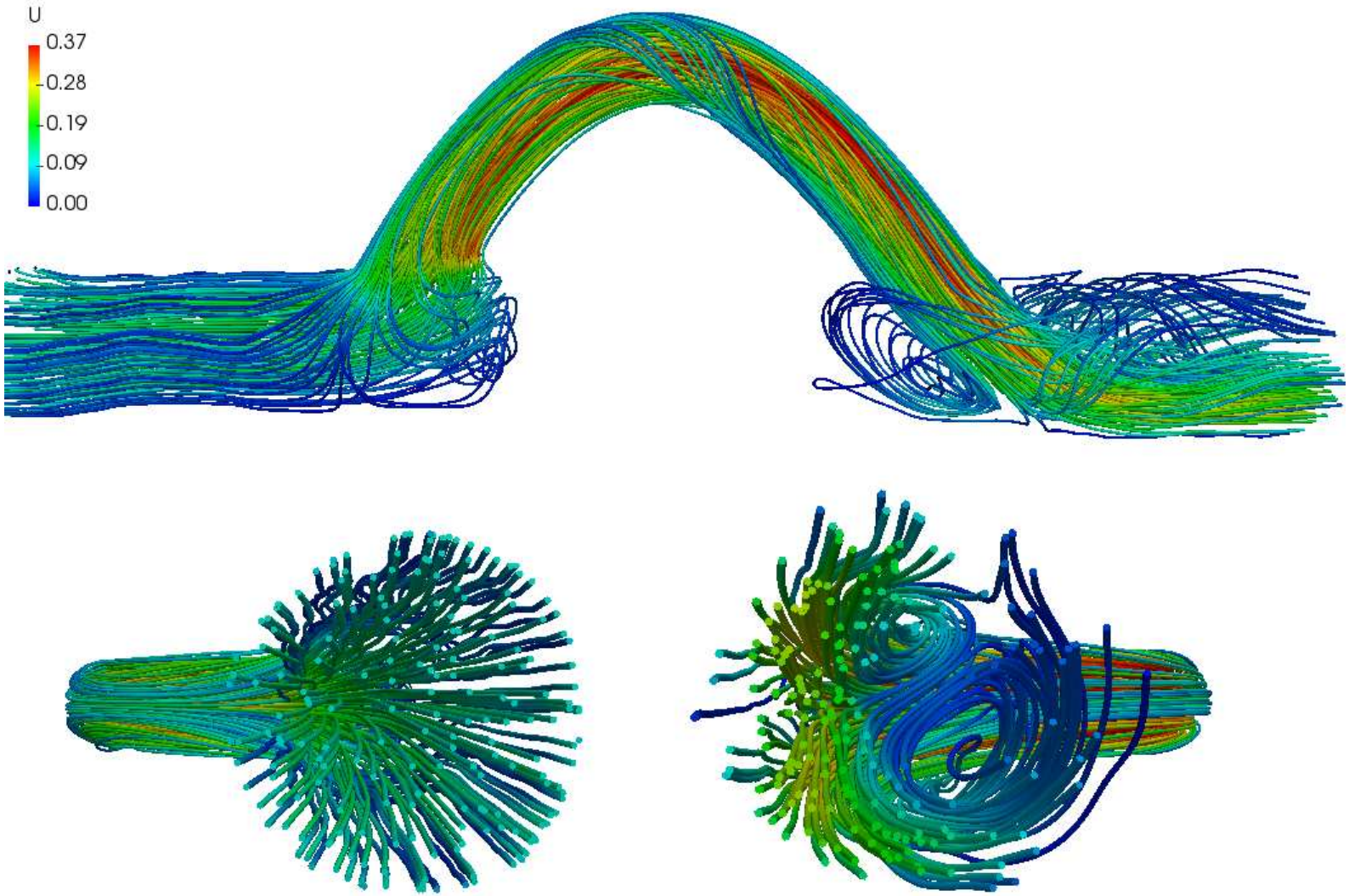
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład

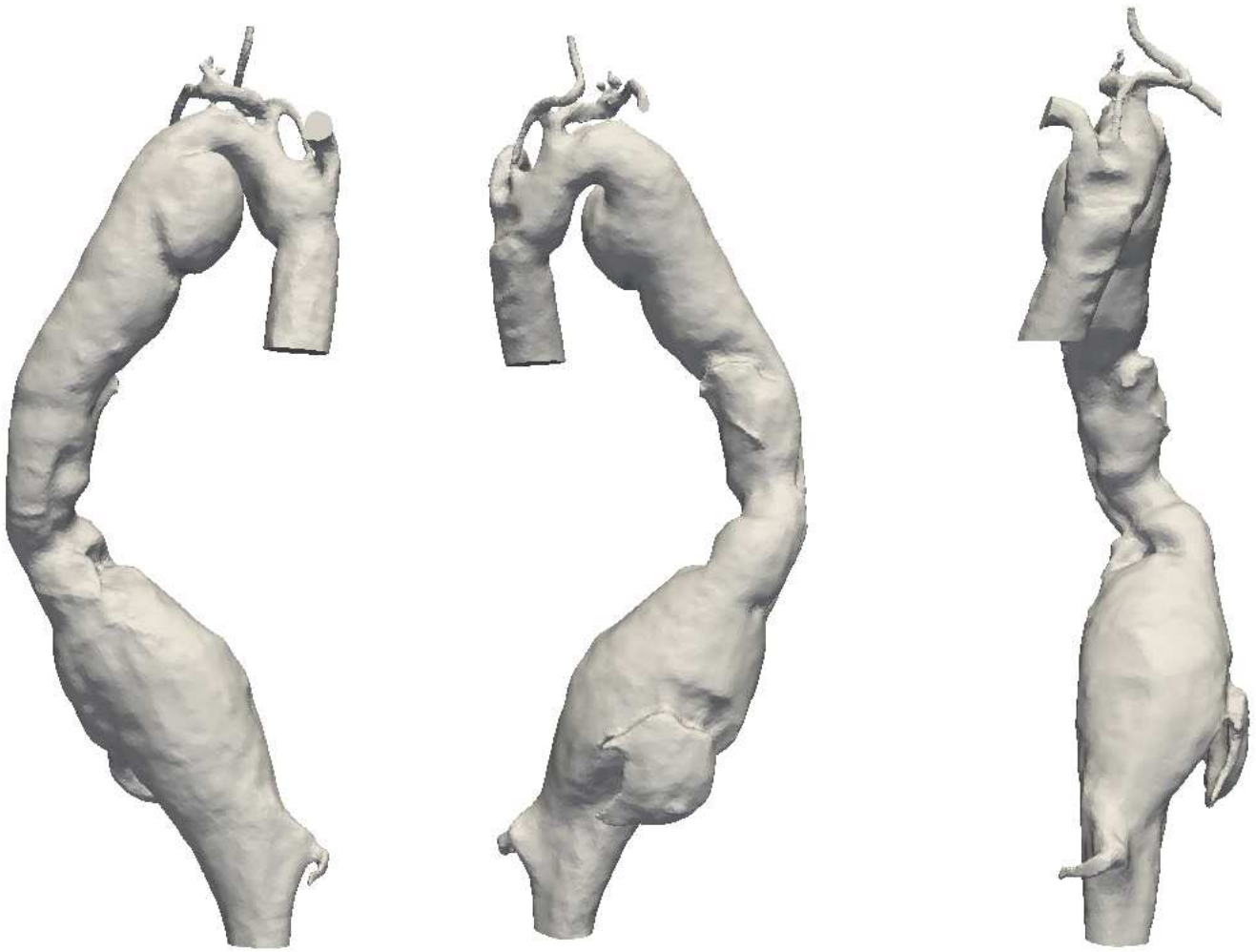


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład

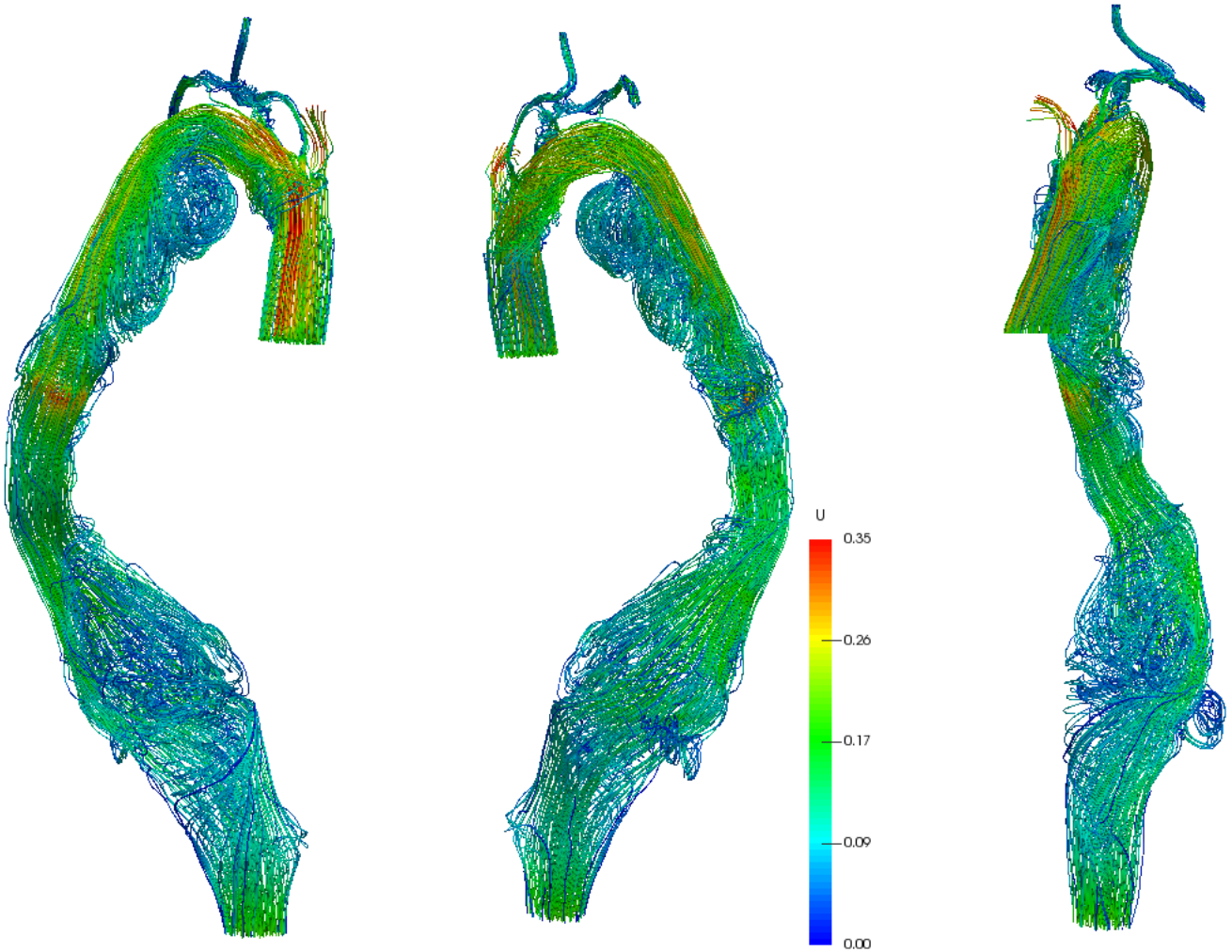
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



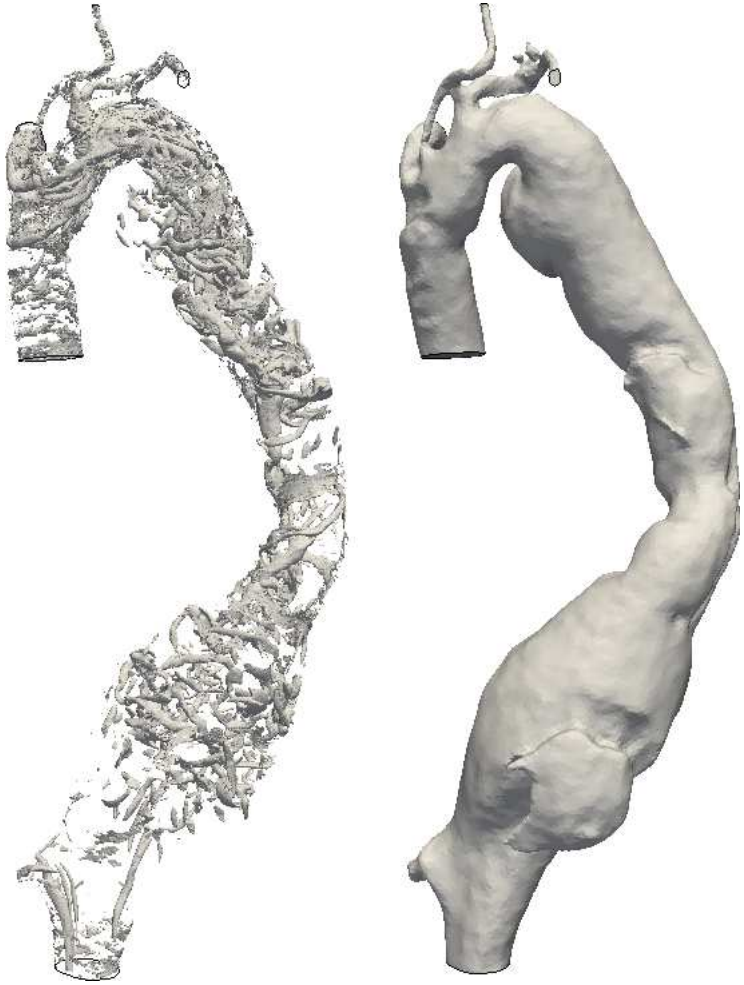
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



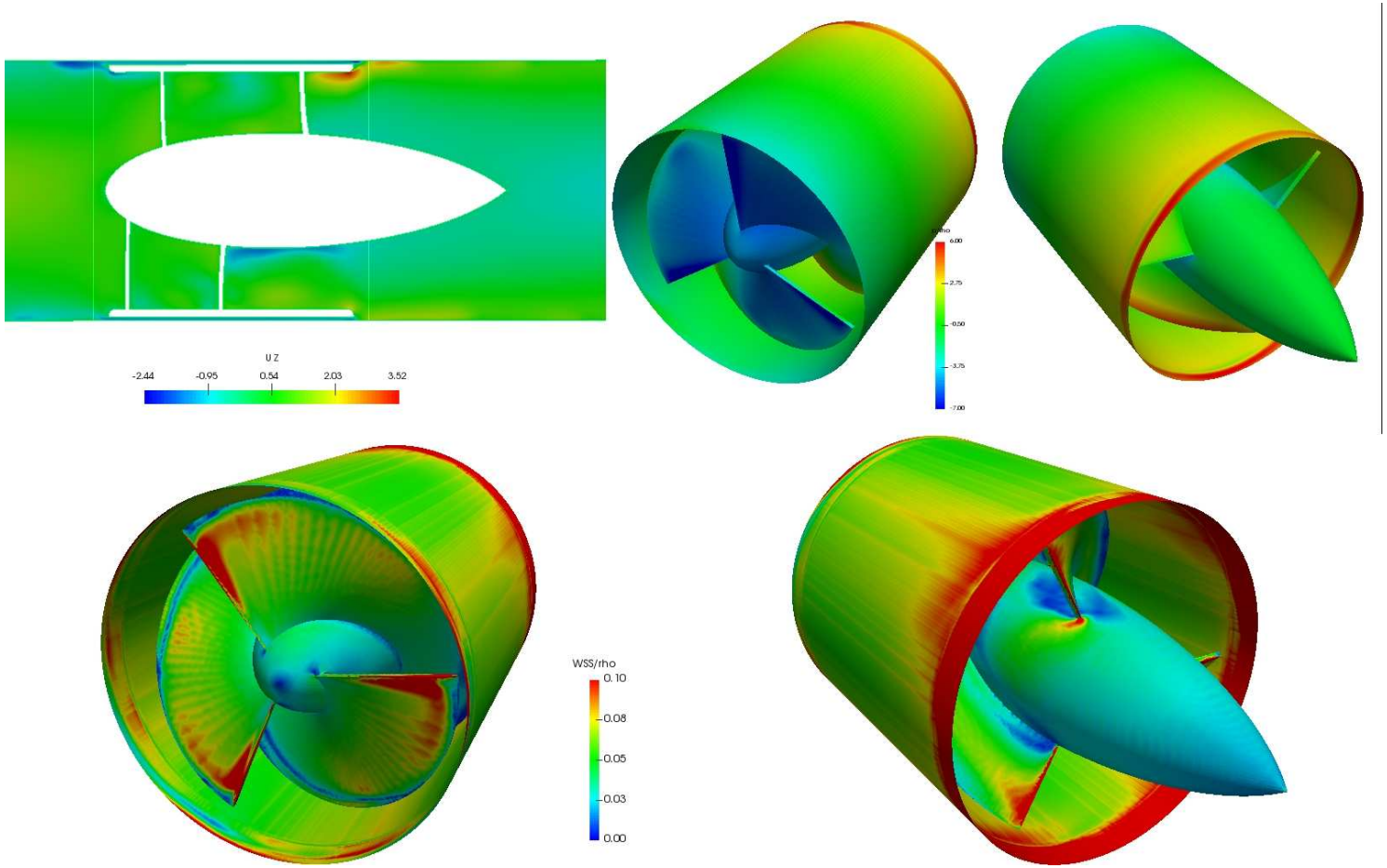
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



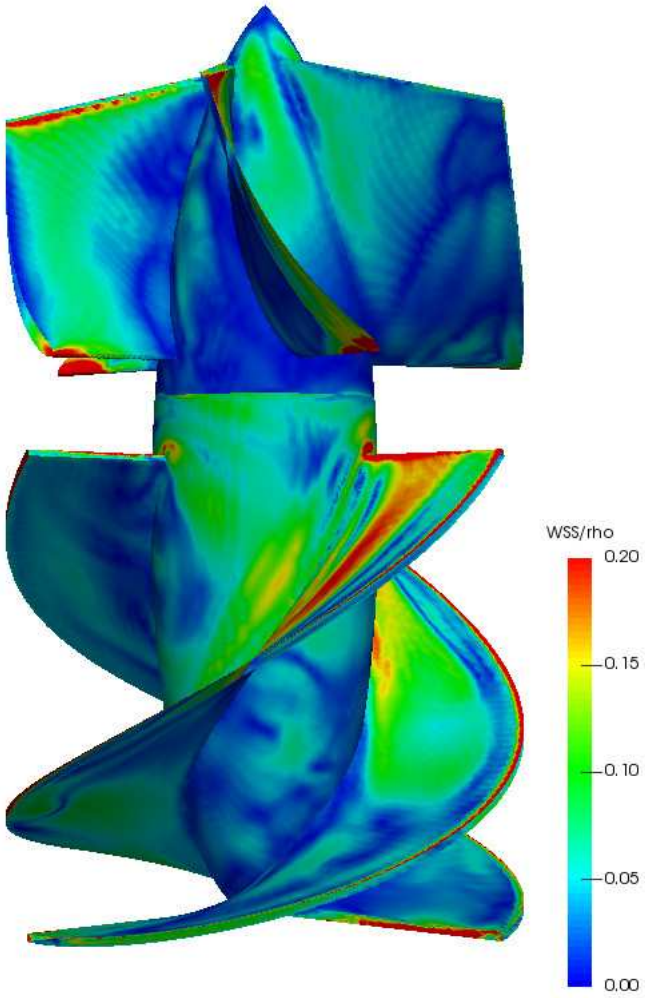
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

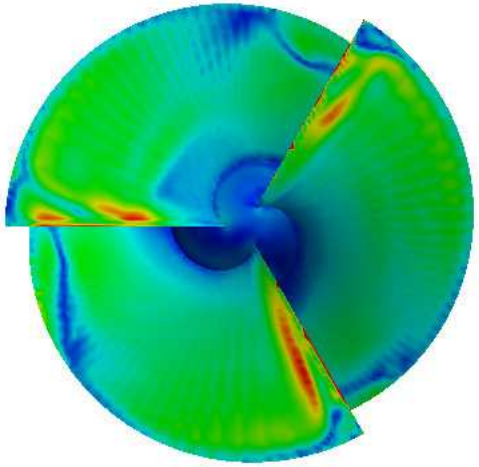
Opis makroskopowy – przykład

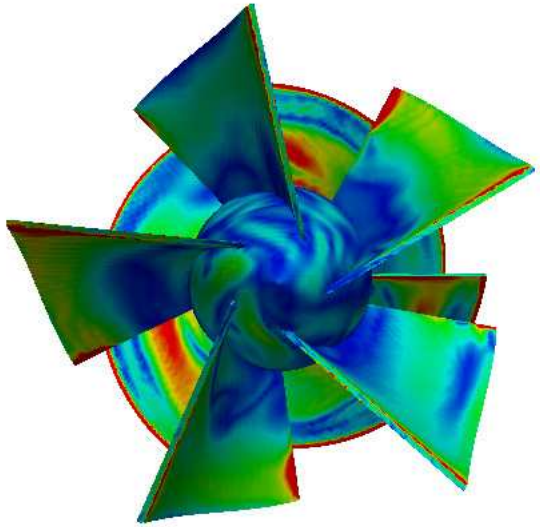


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład

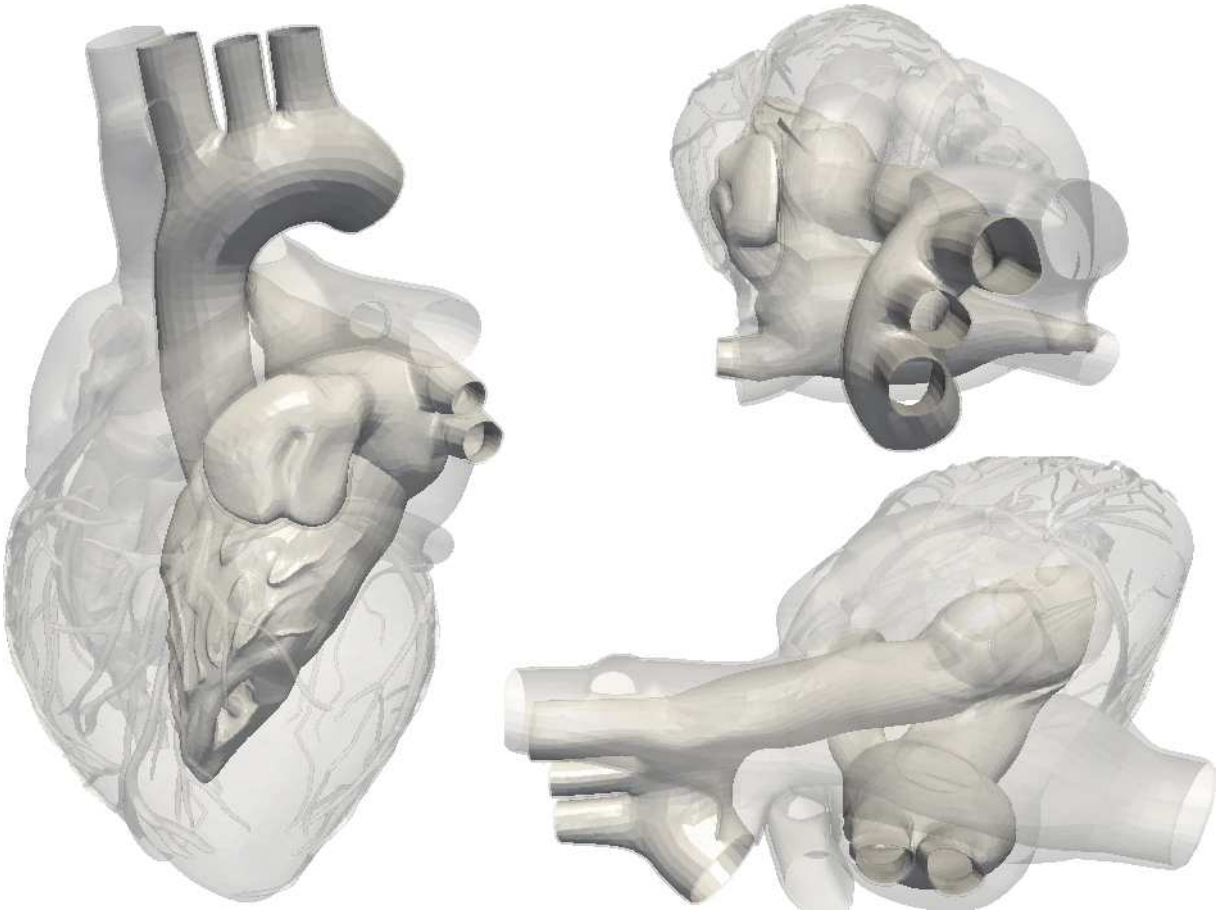






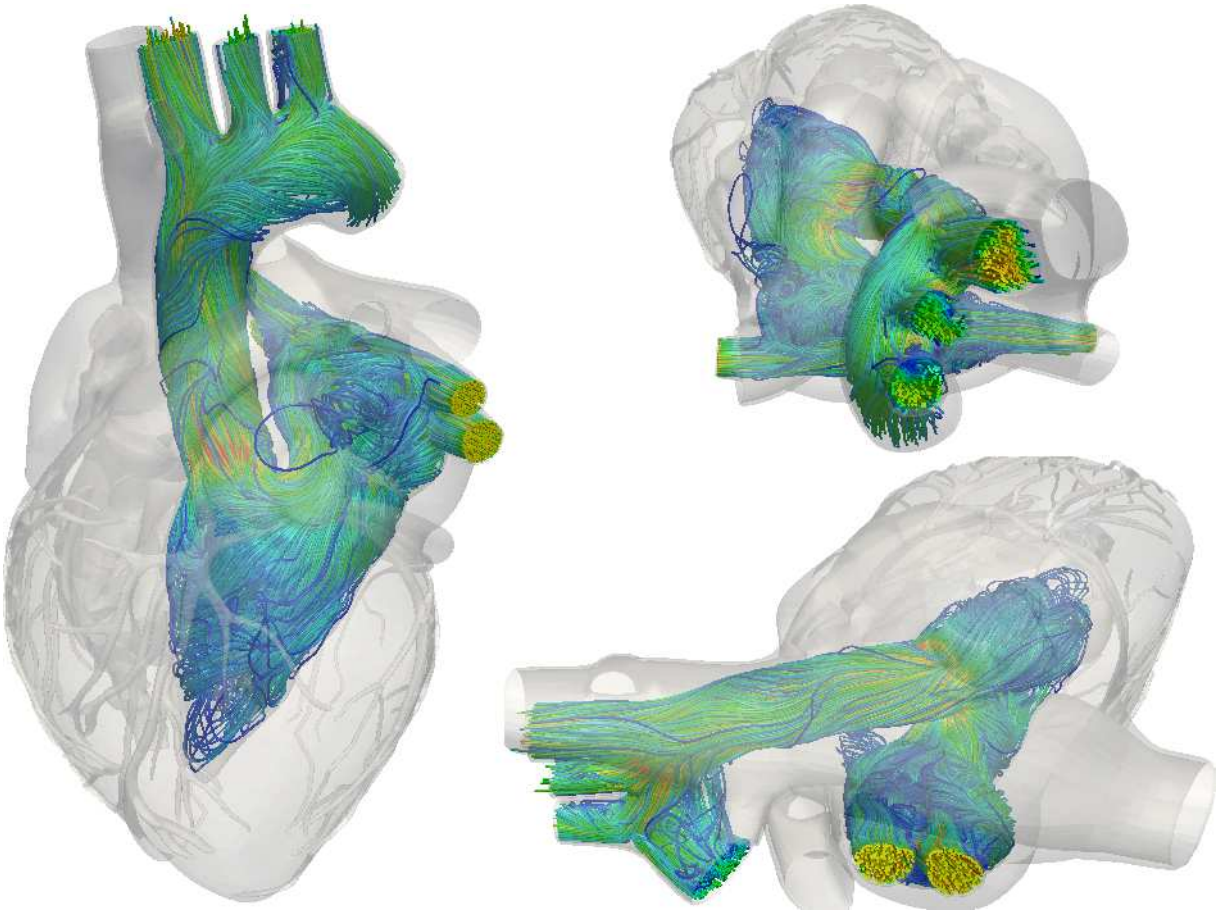
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



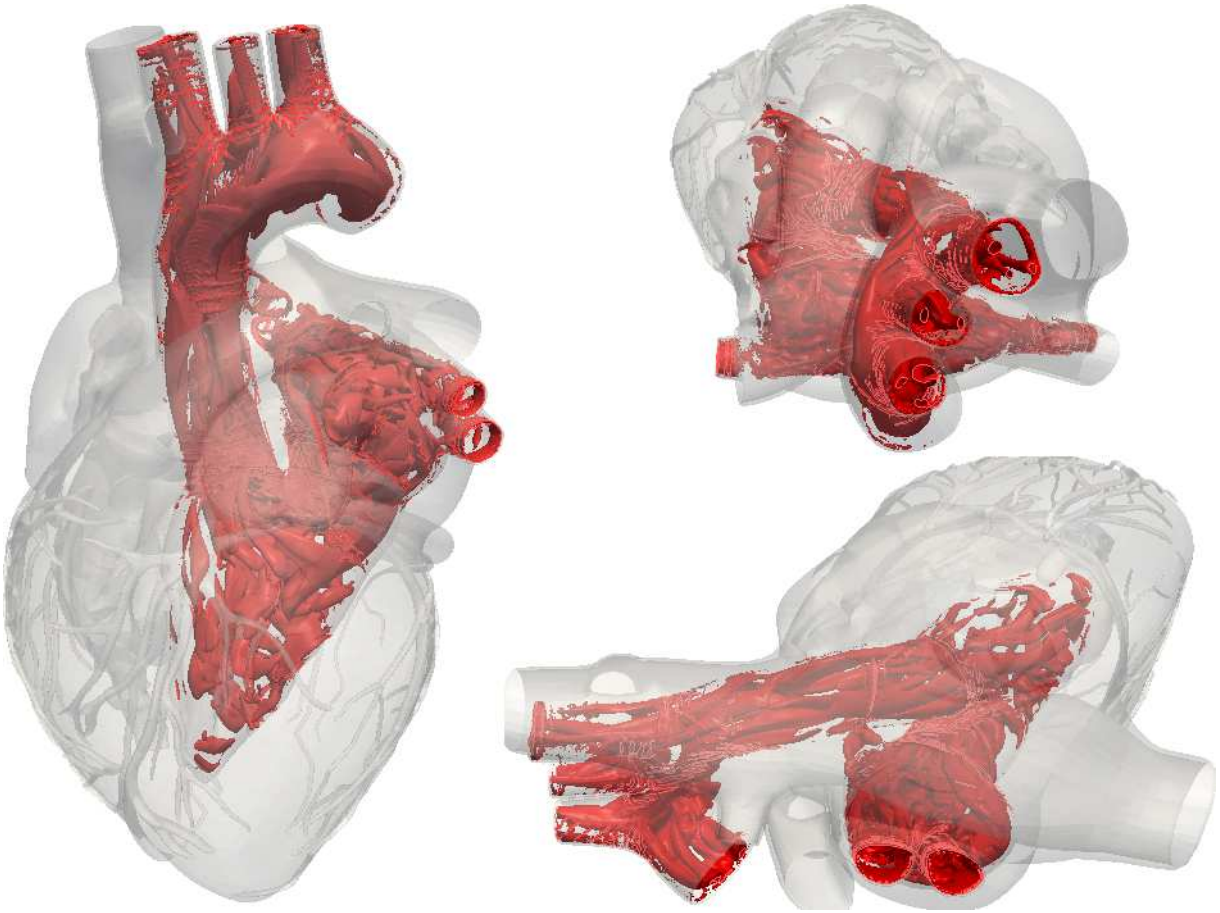
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis makroskopowy – przykład



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis mikroskopowy

W metodzie dynamiki molekularnej rozważany jest ruch wszystkich molekuł. Równanie ruchu wynika z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{G}_i + \sum_{j=1\neq i}^{N} \mathbf{f}_{ij} \tag{259}$$

Siły działające na molekułę można podzielić na siły zewnętrzne G typu grawitacji i siły wzajemnego oddziaływania $\mathbf{f}_{ij} = -\nabla V$. Siła wzajemnego oddziaływania wyrażana jest przez gradient potencjału Lennarda-Jonesa

$$V = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{\|\mathbf{r}\|}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\|\mathbf{r}\|}\right)^{6}\right] \tag{260}$$

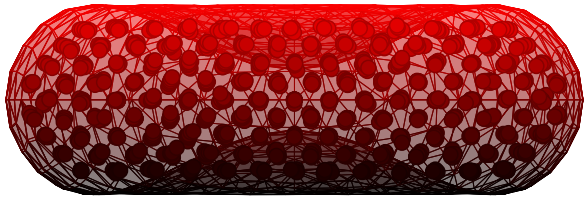
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis mezoskopowy – metoda DPD

W metoda cząstek dyssypatywnych (DPD) rozważa się ruch supercząstek, które reprezentują całe grupy molekuł. Równanie ruchu ma postać

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{G}_i + \mathbf{f}_i^M + \mathbf{f}_i^{PP} + \sum_{j=1\neq i}^{N}\left(\mathbf{f}_{ij}^C + \mathbf{f}_{ij}^D + \mathbf{f}_{ij}^R\right) \quad (261)$$

- $\mathbf{f}_{ij}^C$ siły zachowawcze
- $\mathbf{f}_{ij}^D$ siły dyssypatywne
- $\mathbf{f}_{ij}^R$ siły losowe
- $\mathbf{f}_i^{PP}$ siły między krwinkami
- $\mathbf{f}_i^M$ siły membrany



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis mezoskopowy – metoda DPD

Siły:

- dyssypatywne

$$\mathbf{f}_{ij}^{D} = -\gamma\omega_D \left(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}\right) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \tag{262}$$

- losowe

$$\mathbf{f}_{ij}^{R} = \sigma\omega_R \hat{\mathbf{r}}_{ij} \frac{\theta_{ij}}{\sqrt{\Delta t}} \tag{263}$$

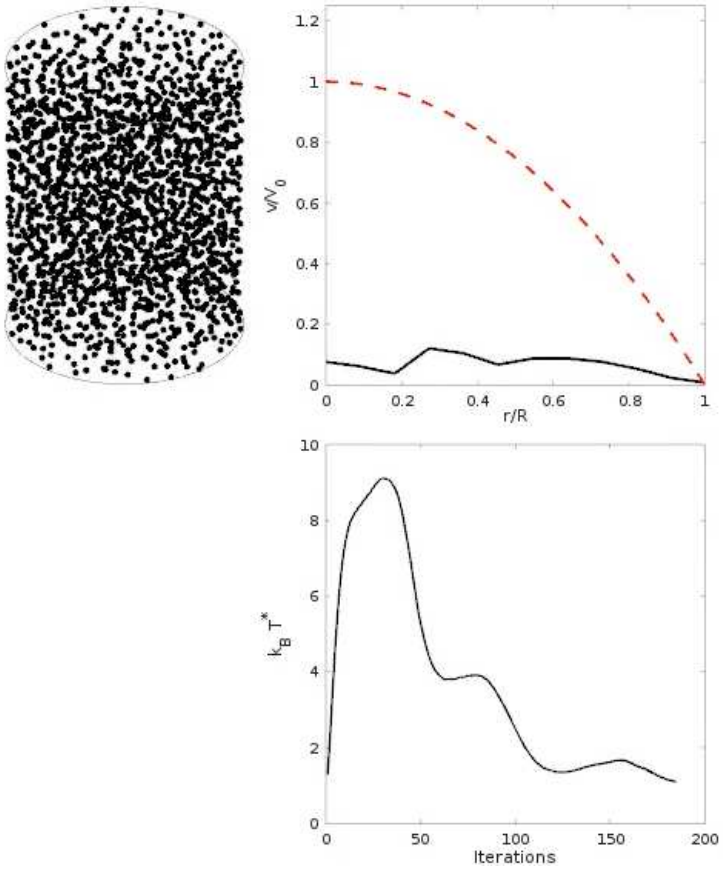
- zachowawcze

$$\mathbf{f}_{ij}^{C} = \alpha\omega_R \hat{\mathbf{r}}_{ij} \tag{264}$$

gdzie $\omega_D = \omega_R^2$ and $\sigma^2 = 2\gamma k_B T$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Opis mezoskopowy – metoda DPD



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Deformacja krwinek

Metody transportu pasywnego/aktywnego:

- całkowite kontinuum, (płyn i krwinki)
- semi-kontinuum, (ciągły płyn, dyskretne krwinki)
- cząsteczkowe (dyskretne płyn i krwinki)

Modele odkształcalnych krwinek:

- sprężyna-tłumik (spring-damper)
- sieć spektryn (spectrin network model)
- elastyczny (elastic immersed boundary model)

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model sprężyna-tłumik

Równanie ruchu

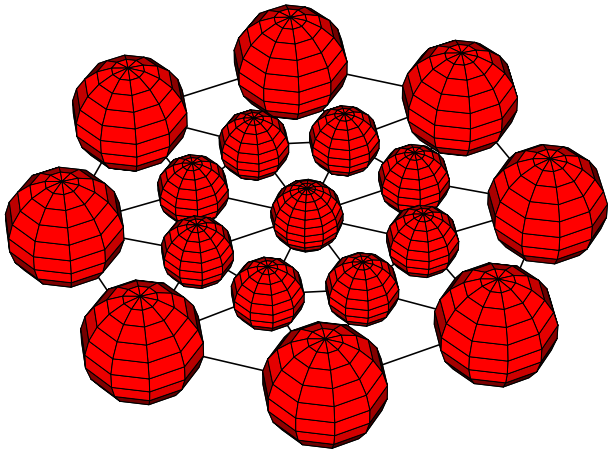
$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i \tag{265}$$

Siła wywarta na cząstki składa się z sił zewnętrznych $\mathbf{G}_i$ i sił 'kształtu' $\mathbf{F}_i$ danych wzorem

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_{is} + \mathbf{f}_{id} + \mathbf{f}_{ib} \tag{266}$$

gdzie

- $\mathbf{f}_{is}$ siły sprężyste
- $\mathbf{f}_{id}$ siły tłumiące
- $\mathbf{f}_{ib}$ siły gnące



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model sprężyna-tłumik

- siły sprężyste

$$\mathbf{f}_{is} = -k \sum_{j \in N_b} \Delta \mathbf{r}_{ij} \tag{267}$$

$$\Delta \mathbf{r}_{ij} = \left(r_{ij}(t) - r_{ij}(t_0) \right) \hat{\mathbf{r}}_{ij}(t) \tag{268}$$

- siły tłumiące

$$\mathbf{f}_{id} = -2\beta \mathbf{v}_i - 2\beta_* \sum_{j \in N_b} \Delta \hat{\mathbf{r}}_{ij} \left(\Delta \mathbf{v}_{ij} \cdot \Delta \hat{\mathbf{r}}_{ij} \right) \tag{269}$$

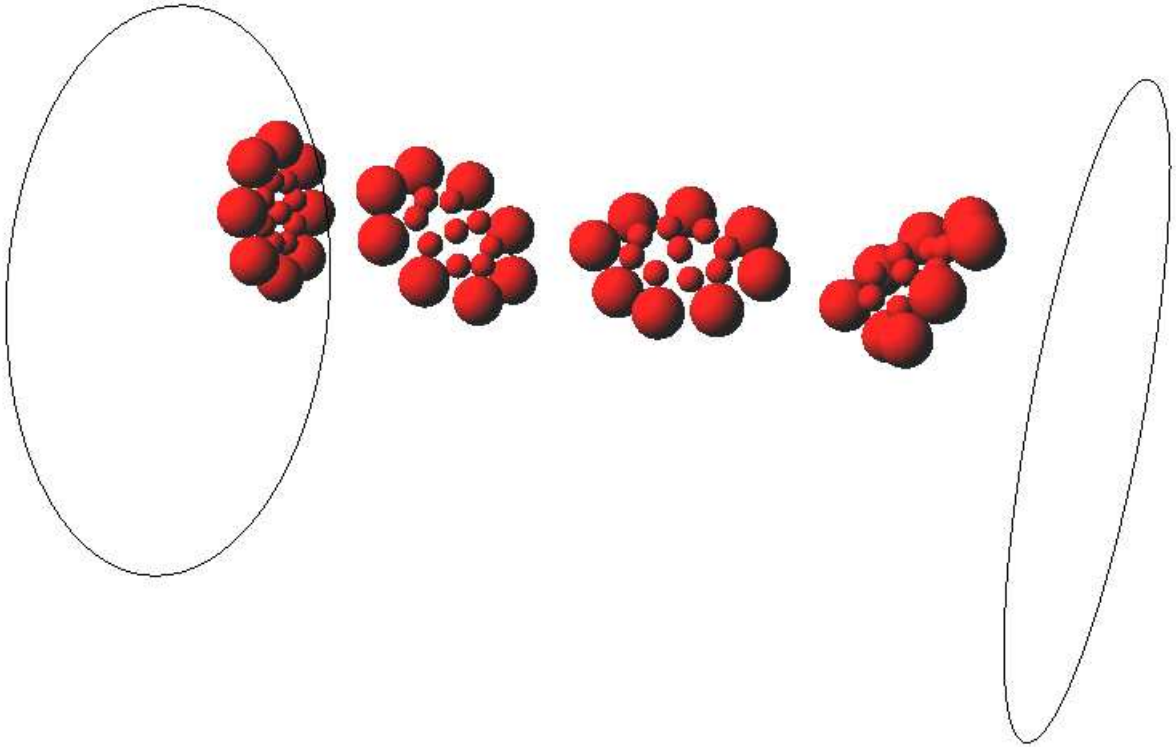
- siły gnące

$$\mathbf{f}_{ib} = \frac{\gamma}{|N_b|} \sum_{j \in N_b} \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right) \tag{270}$$

$$\mathbf{f}_{jb} = \frac{-\mathbf{f}_{ib}}{|N_b|} \tag{271}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model sprężyna-tłumik – przykład



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Sieć spektryn

Równanie ruchu ma postać

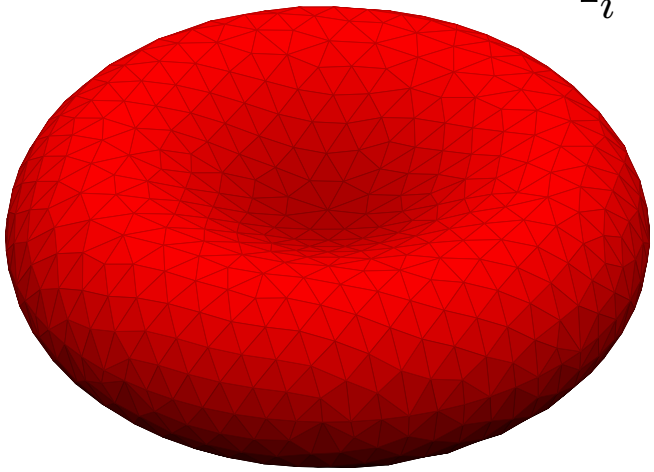
$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{f}_i^{FS} + \mathbf{f}_i^{PP} + \mathbf{f}_i^{M} \tag{272}$$

Energia sieci

$$E = E_{i-p} + E_b + E_a + E_v \tag{273}$$

Wywierane siły

$$\mathbf{f}_i^{M} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}_i} \tag{274}$$



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Sieć spektryn

Energia sieci składa się z:

- sumy energii 'na płaszczyźnie' (siły elastyczne + dyssypatywne) E_{i-p}
- energii gięcia

$$E_b = \sum_i k_b \left(1 - \cos(\theta_i - \theta_0)\right) \tag{275}$$

- energia związana z zachowaniem powierzchni (globalnej + lokalnej)

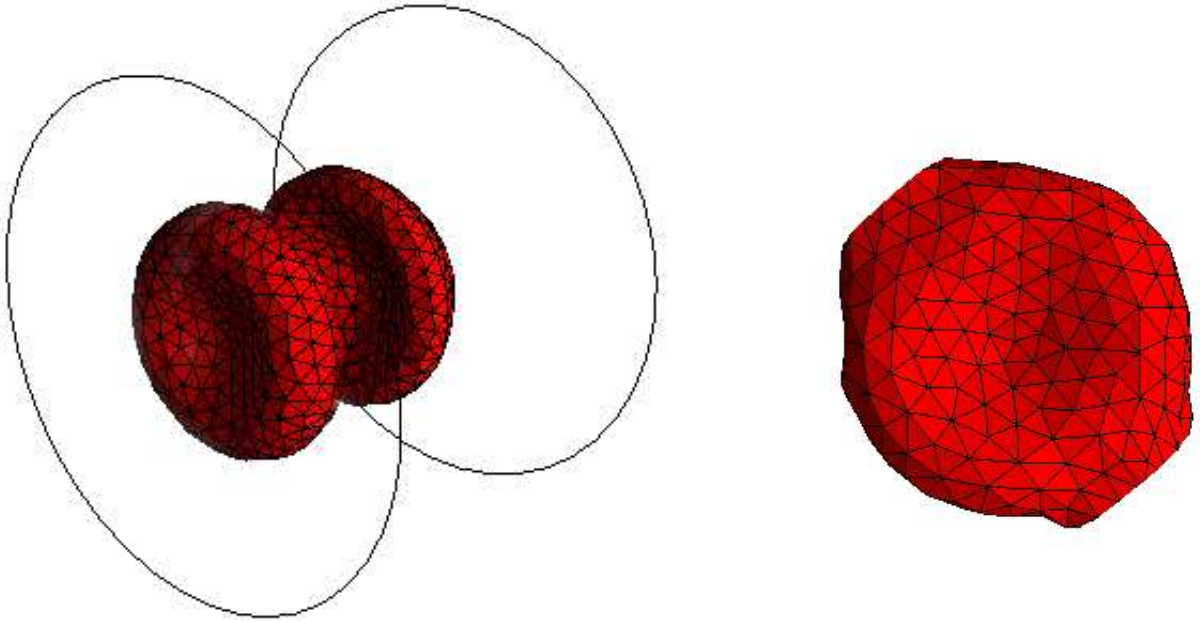
$$E_a = k_a \frac{(A - A_0)^2}{2A_0} + \sum_i k_{ai} \frac{(A_i - A_{0i})^2}{2A_{0i}} \tag{276}$$

- energia związana z zachowaniem objętości

$$E_v = k_v \frac{(V - V_0)^2}{2V_0} \tag{277}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Sieć spektryn – przykład



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model elastyczny

Równanie ruchu ma postać

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{G}_i + \mathbf{F}_i \tag{278}$$

Siły wywierana na węzły krwinki składają się z

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i^{FS} + \mathbf{f}_i^{PP} + \mathbf{f}_i^{M} \tag{279}$$

Siły elastyczne $\mathbf{f}_i^M$ składają się z

$$\mathbf{f}_i^M = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_V \tag{280}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model elastyczny

- Siły rozciągające

$$\mathbf{f}_s = k_s \kappa \frac{\Delta L}{L_0} \hat{\mathbf{n}} \tag{281}$$

- Siły gnące

$$\mathbf{f}_b = k_b \frac{\Delta \theta}{\theta_0} \hat{\mathbf{n}} \tag{282}$$

- Siły zachowujące powierzchnie (globalne + localne)

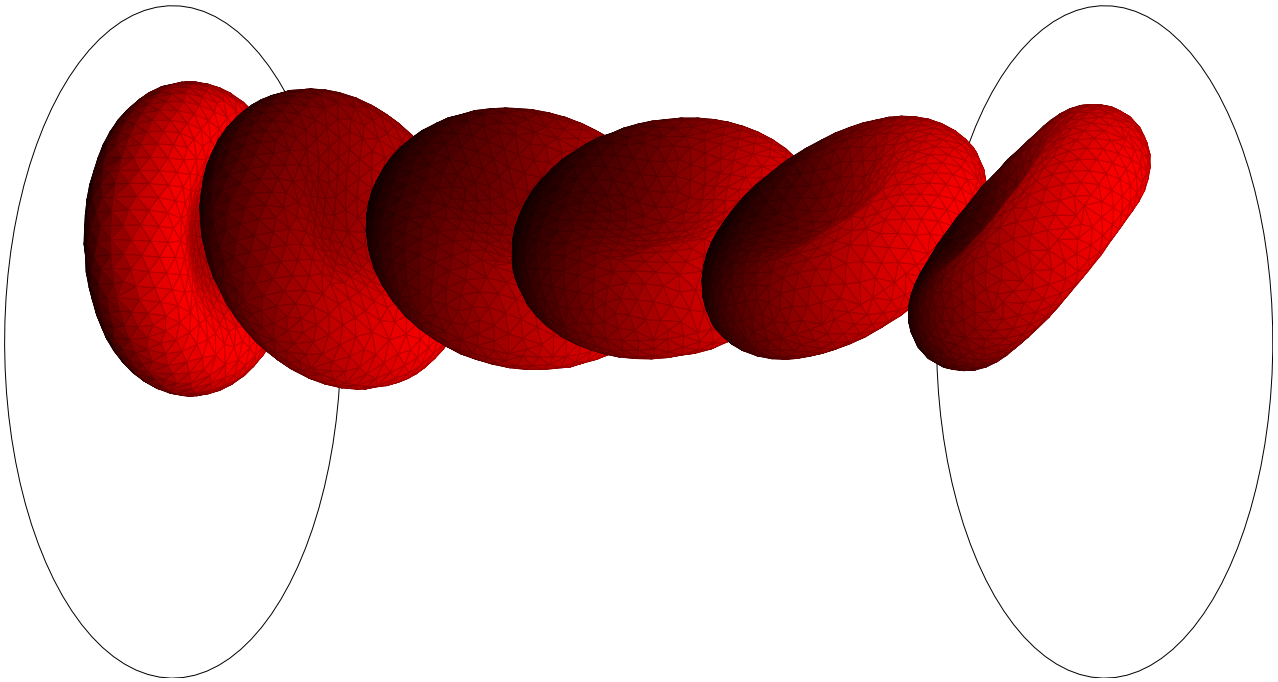
$$\mathbf{f}_a = k_a \frac{\Delta S_a}{S_{a0}} \hat{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{f}_A = k_A \frac{\Delta S}{S_0} \hat{\mathbf{w}} \tag{283}$$

- Siły zachowujące objętość

$$\mathbf{f}_V = k_V \frac{\Delta V}{V_0} S_a \hat{\mathbf{n}} \tag{284}$$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Model elastyczny – przykład



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Urządzenia do wspomagania krążenia

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

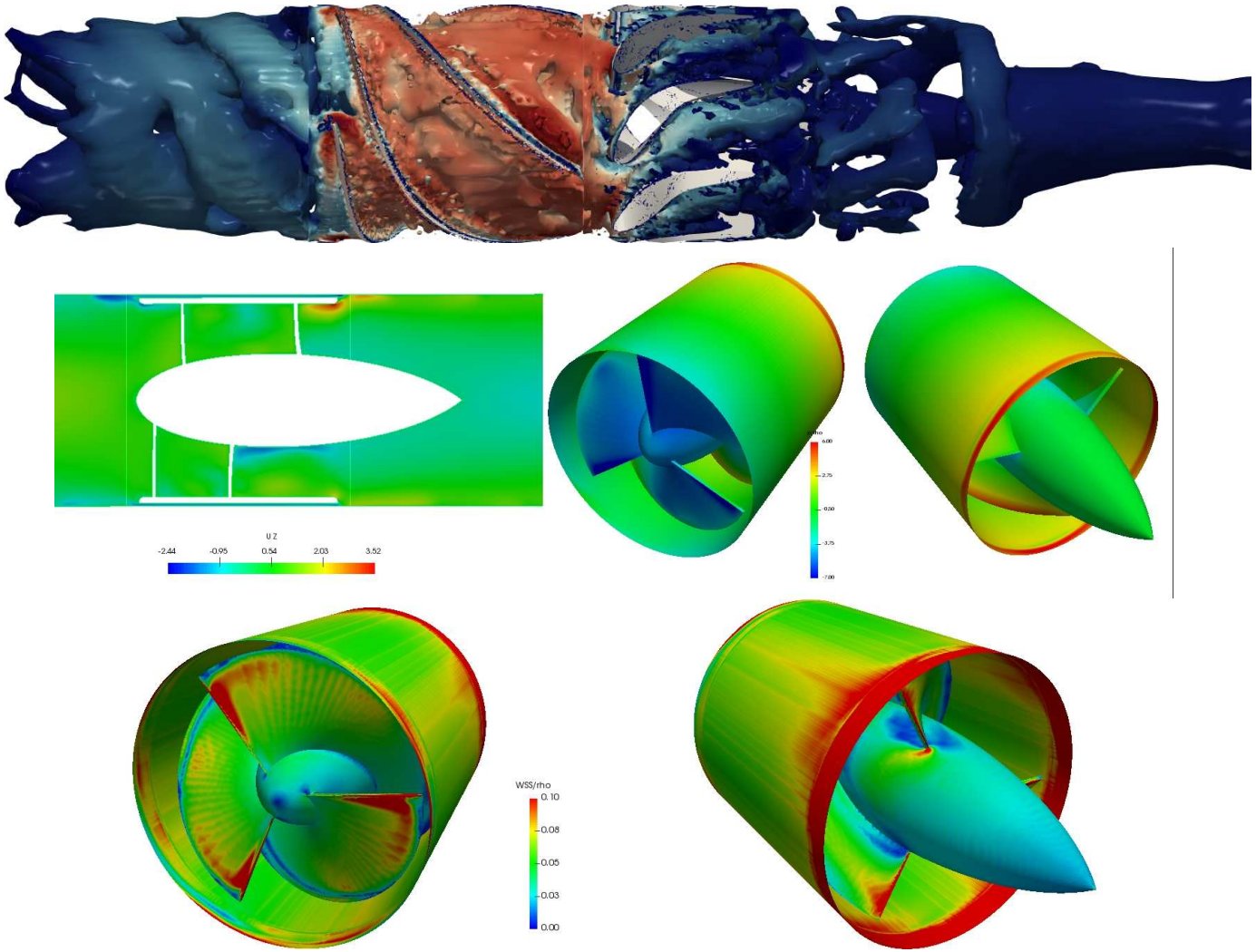
Motywacja

Nawet najbardziej zaawansowane leczenie farmakologiczne nie wystarczy, aby zapobiec pogorszeniu zdrowia pacjentów z wadami serca.
Inne metody (poza farmakologicznymi)

- transplantacja serca (kosztowna, brak dawców, odrzucanie przeszczepu, duża śmiertelność)
- sztuczne pompy sercowe:
  - mające na celu zastąpić chore serce
  - wspomagające pracę komór:
    - LVAD (left ventricular assist device)
    - RVAD (right ventricular assist device)
    - BIVAD (bi-ventricular assist device)

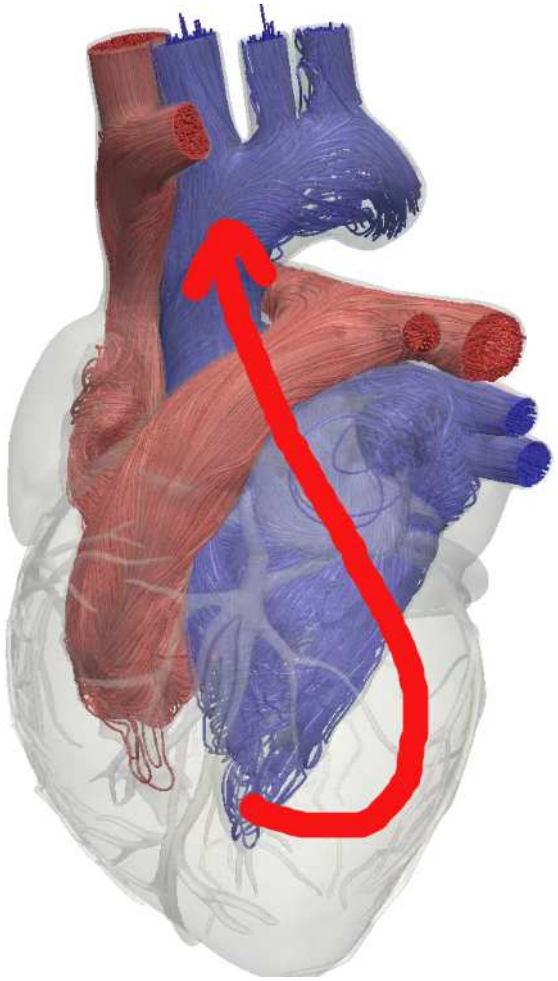
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

LVAD



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

LVAD



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Pompy wspomagające krążenie

Ludzie serce pracuje w sposób pulsacyjny!
Stosowane pompy wspomagające (wirnikowe) zapewniają stały wydatek. Pompy wirnikowe są prostsze i mniejsze.
Rozróżniamy pompy wirnikowe:

- promieniowe (większe)
- osiowe (mniejsze ale wymagają dużo większych prędkości obrotowych)

Większe prędkości obrotowe mogą prowadzić do niszczenia krwinek (wysokie naprężenia styczne): trombogenność i hemoliza w szczególności.
Można minimalizować negatywne oddziaływanie pompy na krew poprzez zmniejszanie obrotów, ale przy zachowaniu przyrostu ciśnienia, co jest możliwe poprzez optymalizację kształtu pompy.

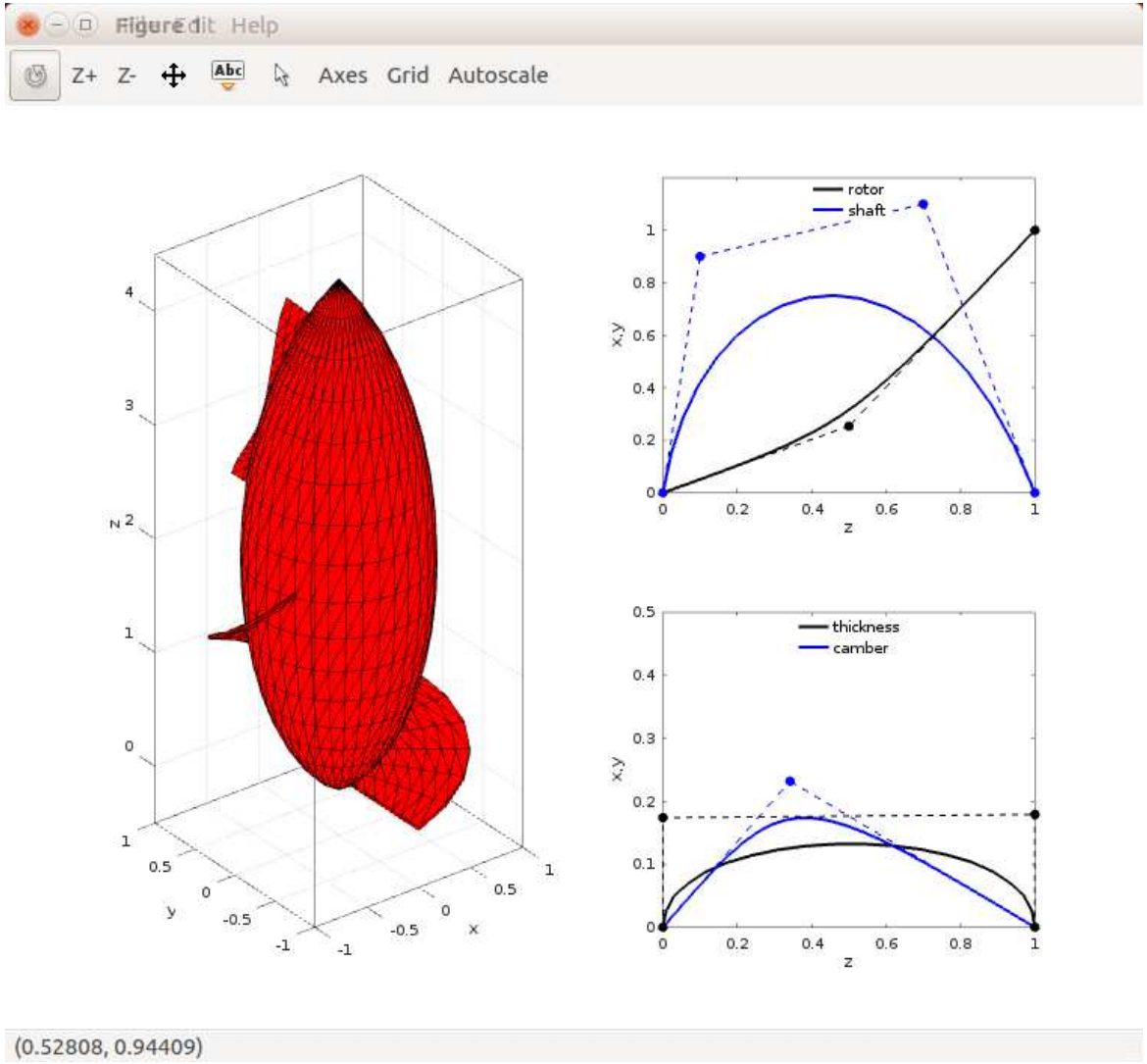
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria

	Zakres	Opt.	Opis
x_1	$[0.2; 1]$	0.566	podziałka wirnika
x_2	$[0.1; 0.5]$	0.100	nieliniowość linii śrubowej
x_3	$\{2, \ldots, 4\}$	4	liczba łopatek wirnika
x_4	$[0; 0.5]$	0.251	dwa punkty splajnu wału
x_5	$[0.7; 1]$	0.700	
x_6	$[0.7; 1]$	1.000	
x_7	$[0.7; 1.2]$	0.813	
x_8	$\{4, \ldots, 8\}$	8	liczba łopatek kierowniczych
x_9	$[0; 45°]$	$45.00°$	górny kąt skręcenia łopatek kierowniczych
x_{10}	$[0; 30°]$	$30.00°$	dolny kąt skręcenia łopatek kierowniczych
x_{11}	$[0.2; 0.6]$	0.600	punkt opisujący kształt łopatki kierowniczej
x_{12}	$[0; 0.3]$	0.300	
x_{13}	$[0.05; 0.3]$	0.300	punkt opisujący grubość łopatki kierowniczej
x_{14}	$[0.05; 0.2]$	0.175	

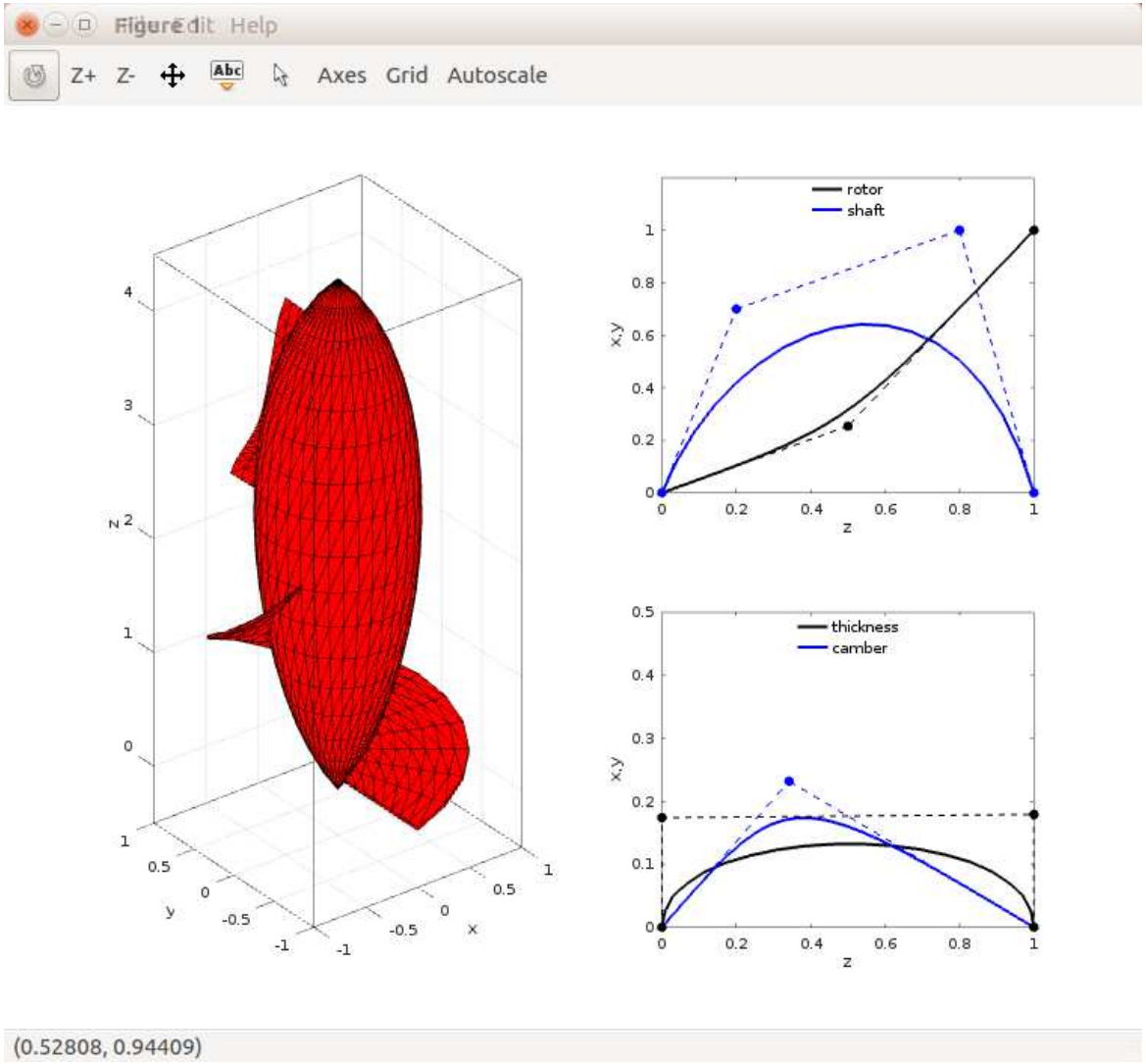
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – wał



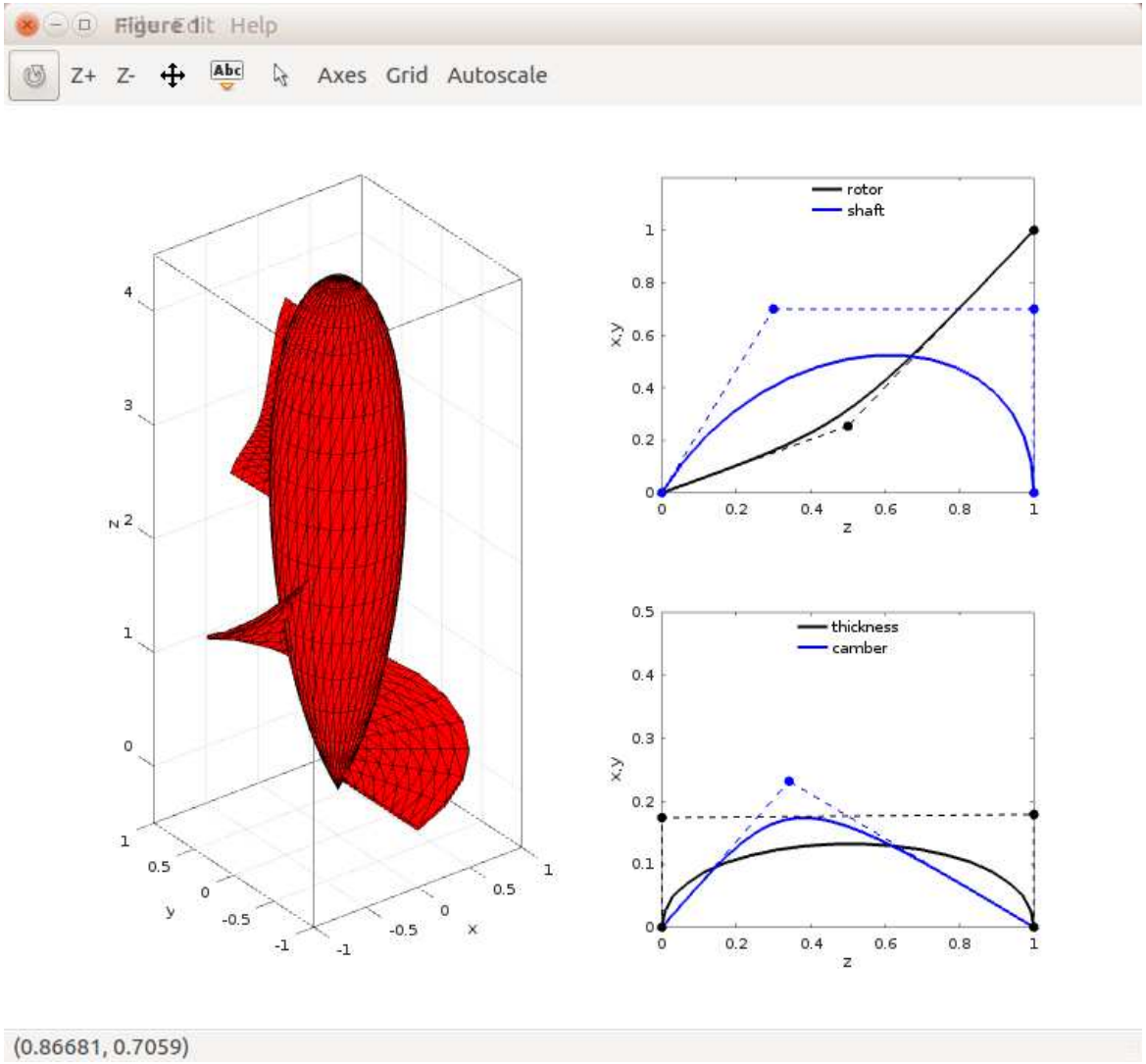
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – wał



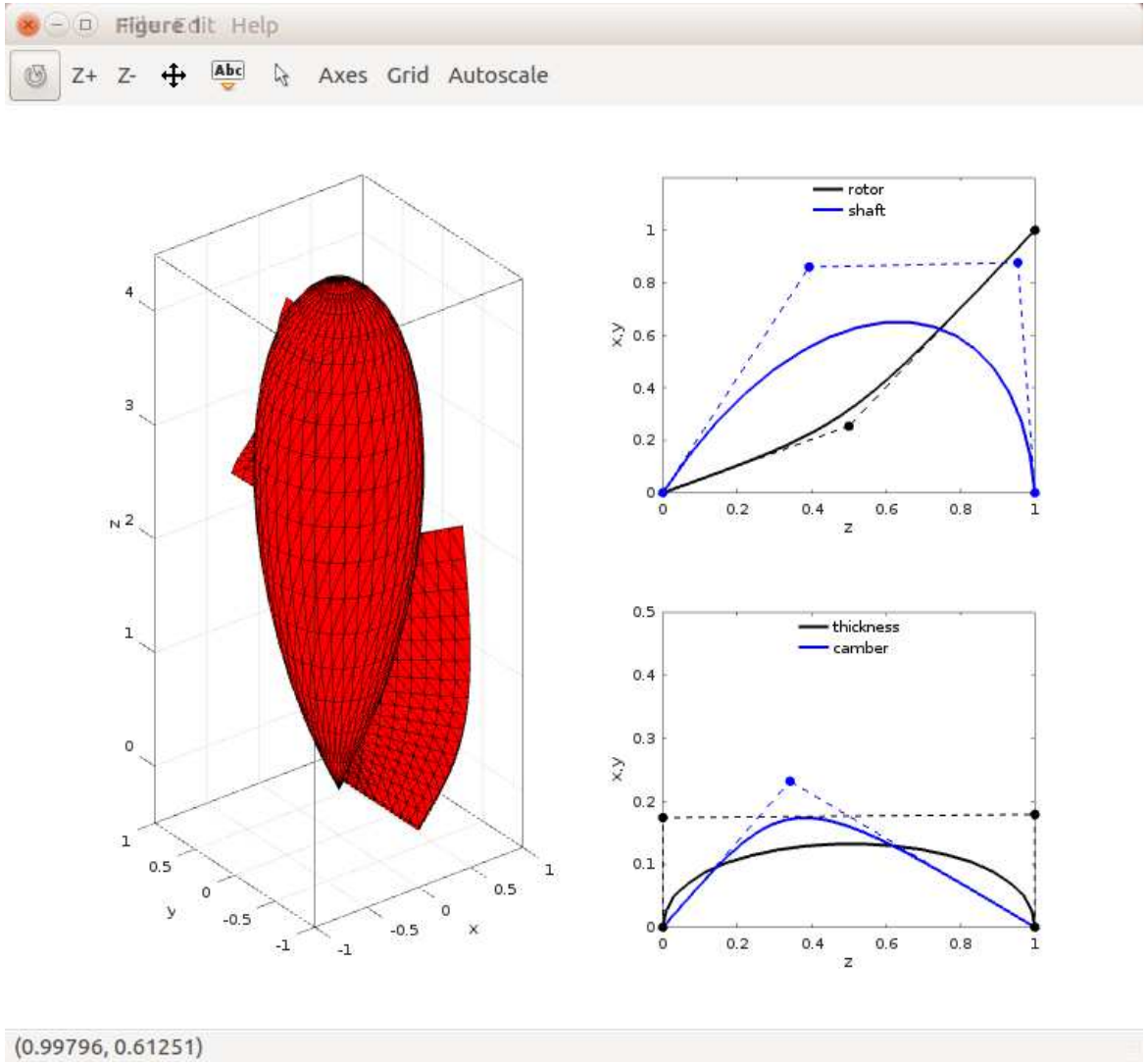
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – wał



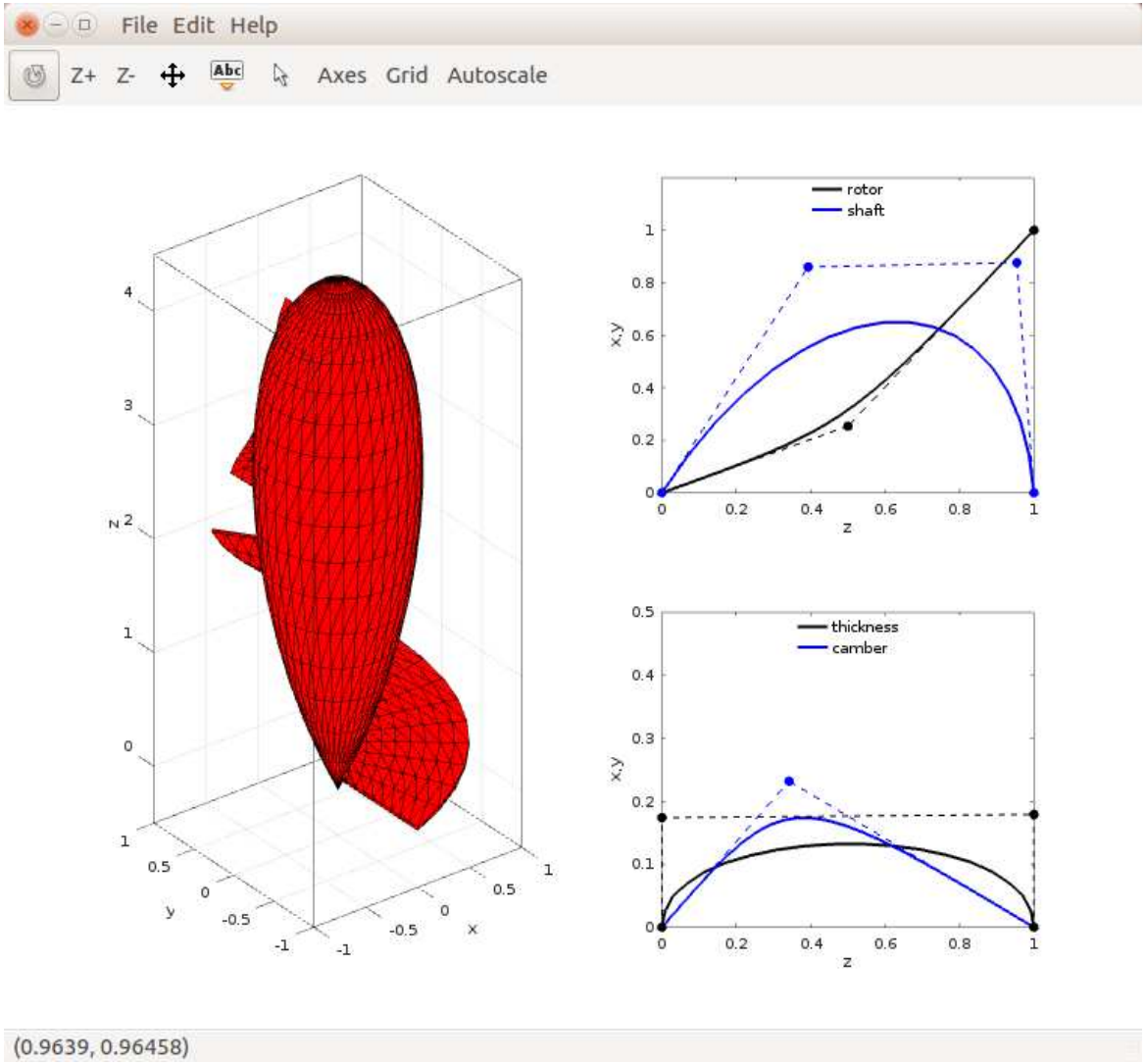
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – podziałka wirnika



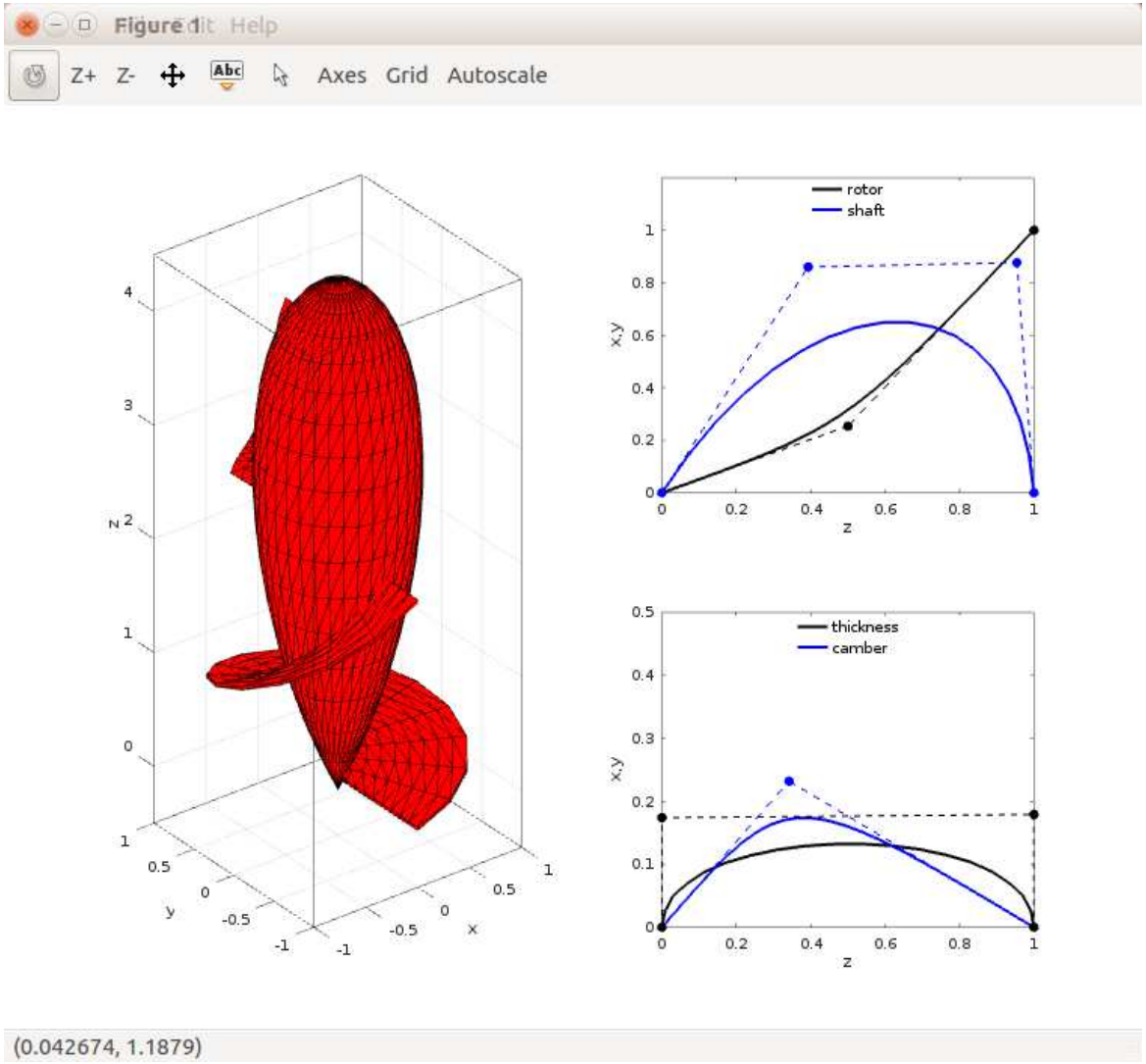
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – podziałka wirnika



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – podziałka wirnika



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – nieliniowość linii śrubowej

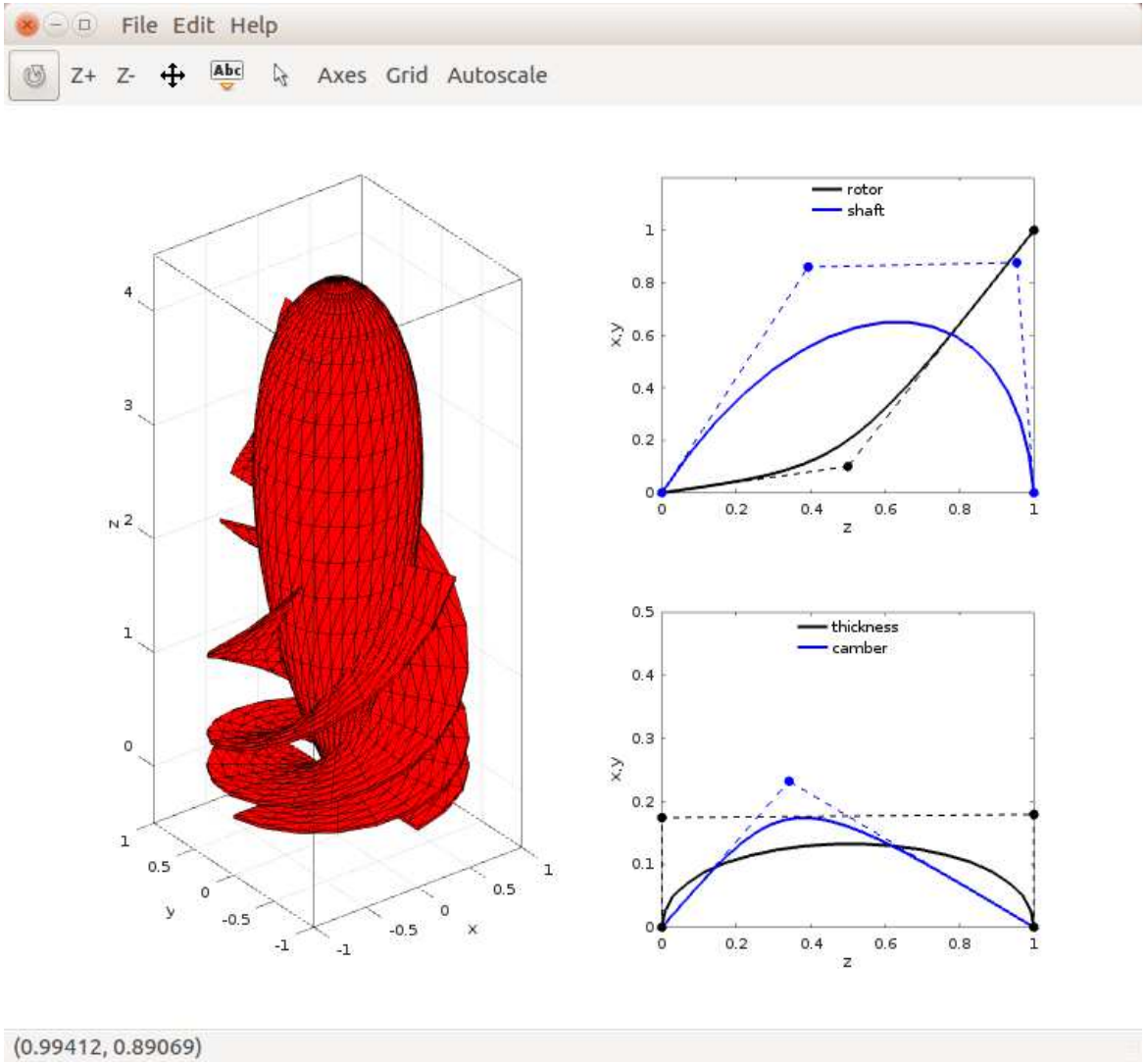
Równanie linii śrubowej

$$x(t) = R\cos t \tag{285}$$
$$y(t) = R\sin t \tag{286}$$
$$z(t) = f(t) \tag{287}$$

Nieliniowość jest spowodowana nieliniową funckją f

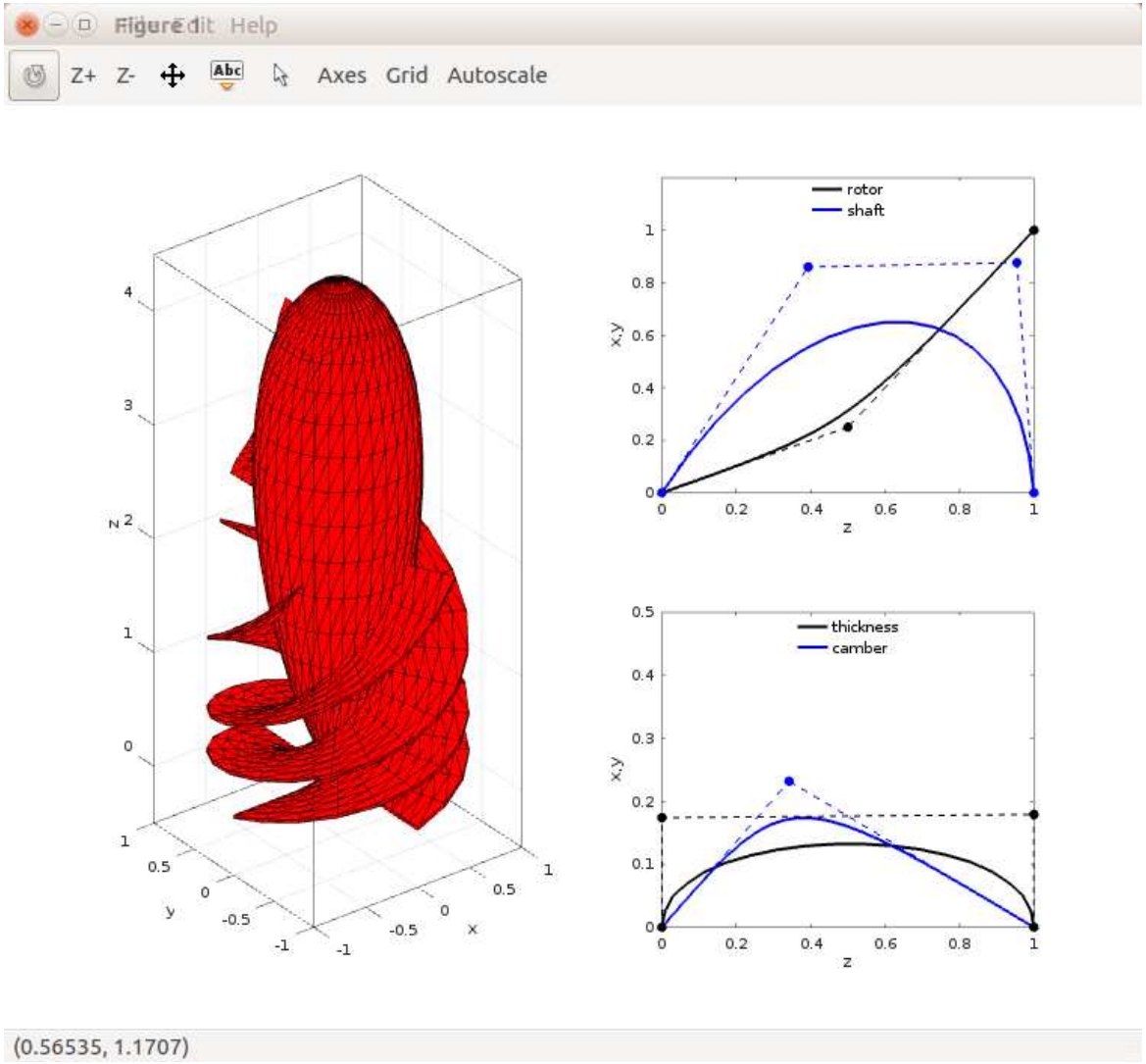
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – nieliniowość linii śrubowej



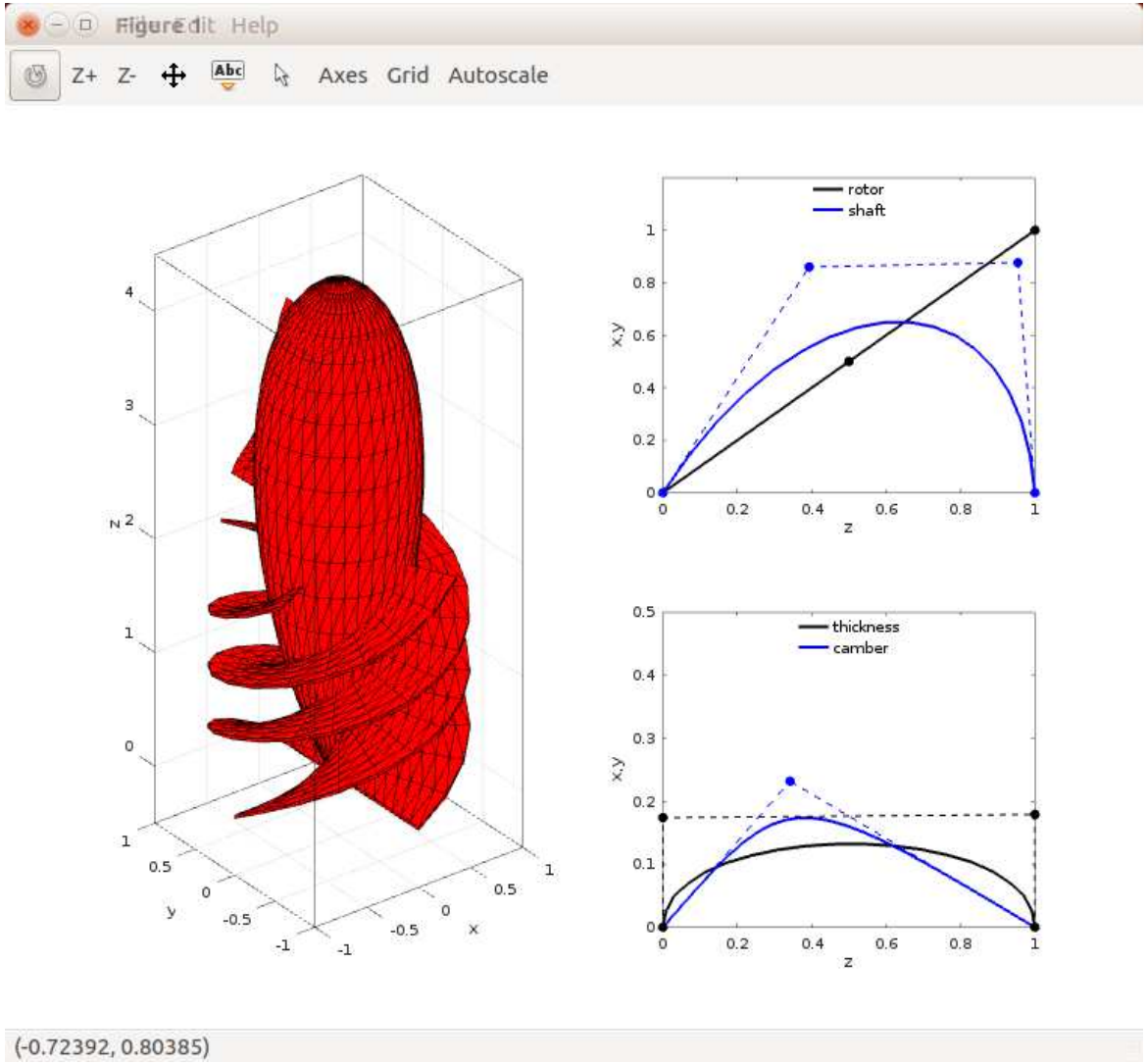
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – nieliniowość linii śrubowej



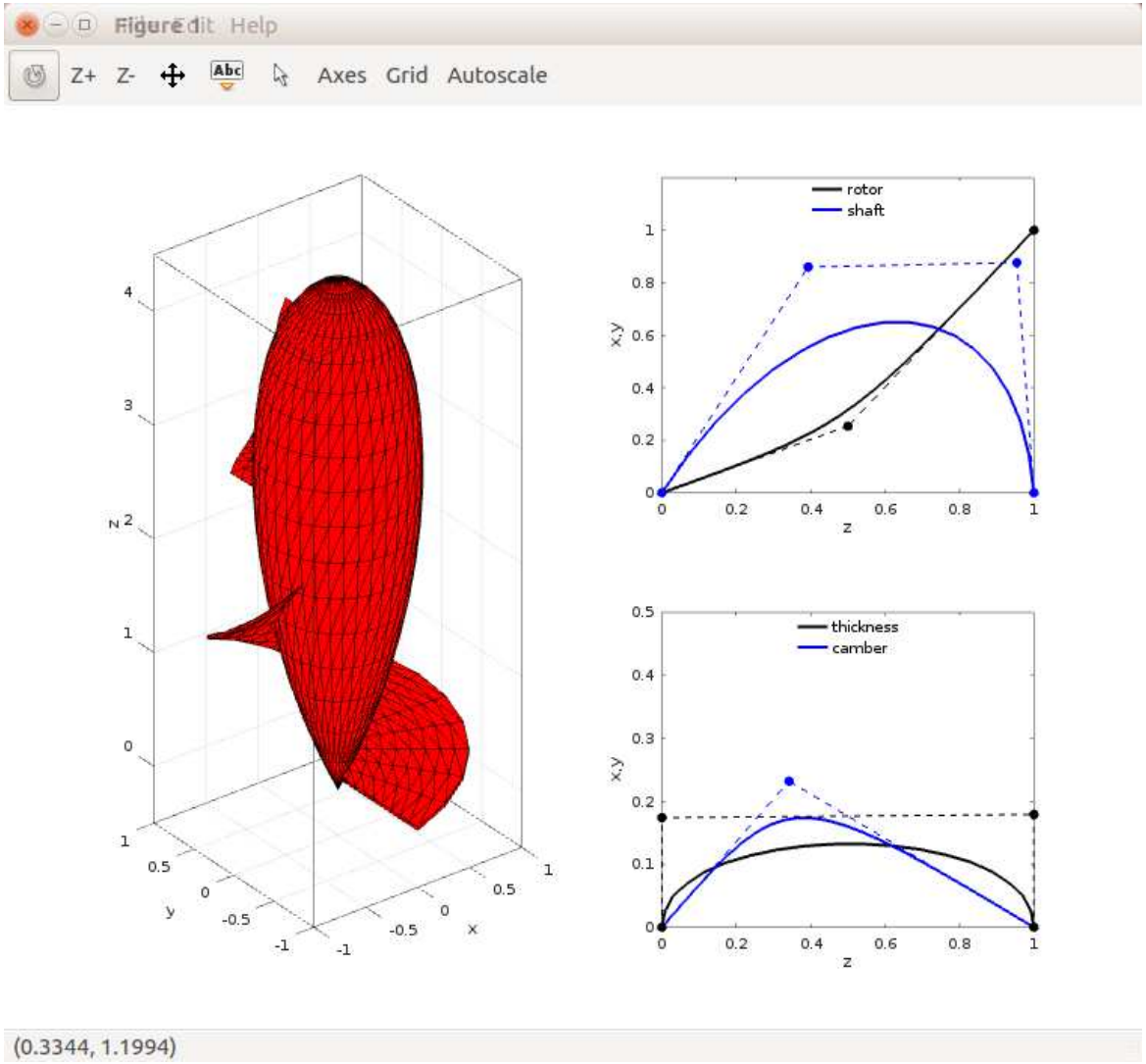
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – nieliniowość linii śrubowej



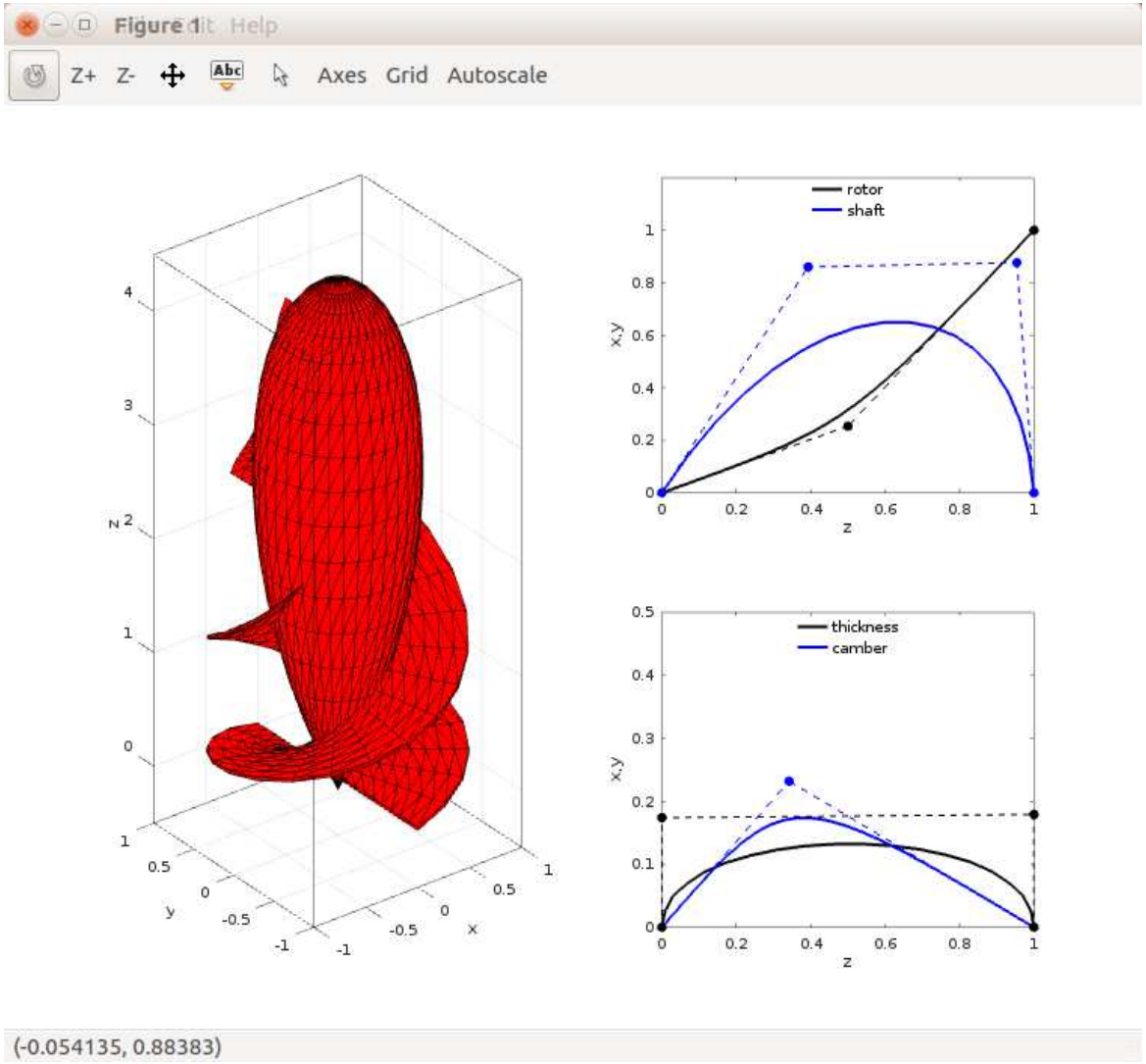
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – liczba łopatek wirnika



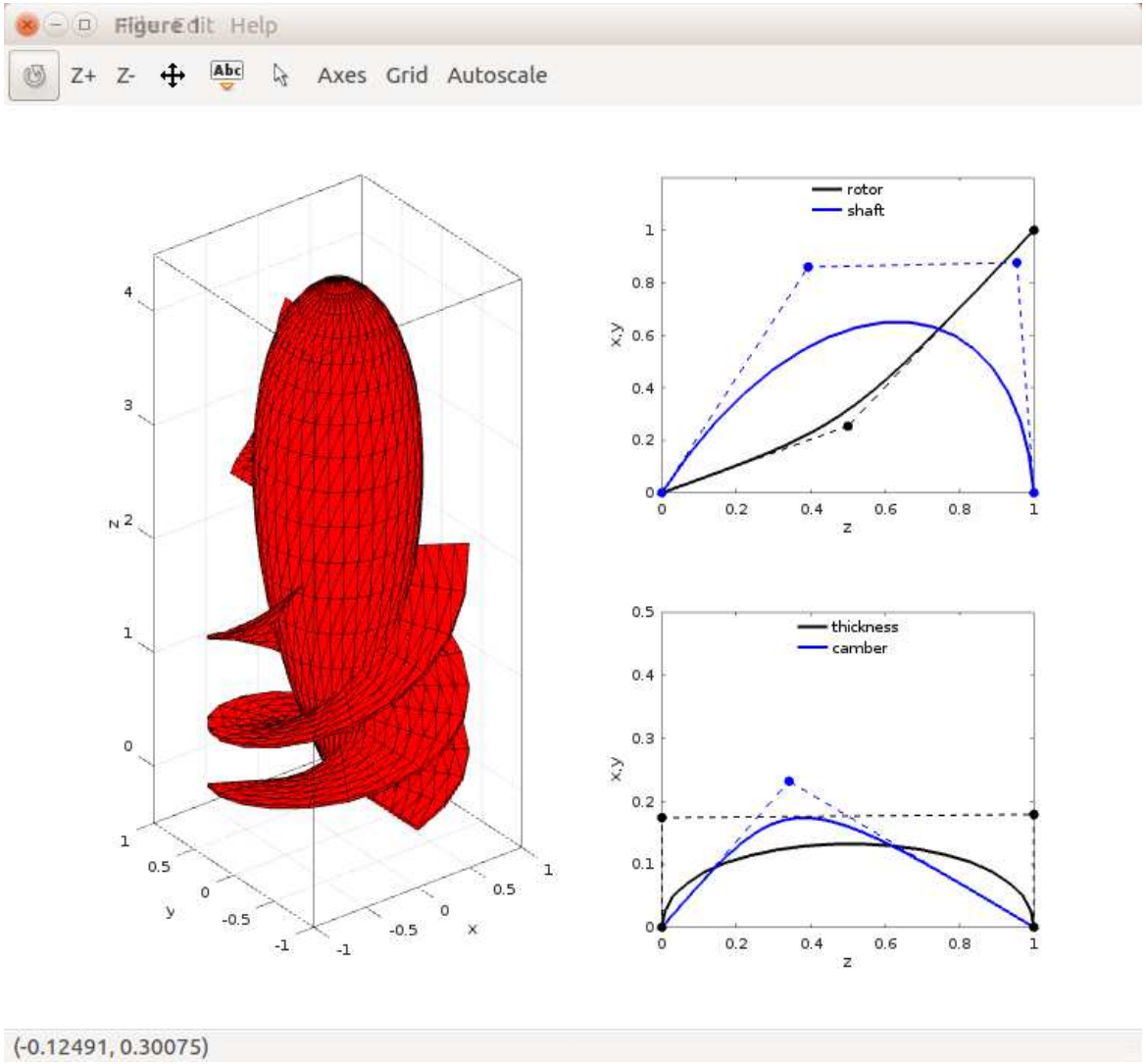
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – liczba łopatek wirnika



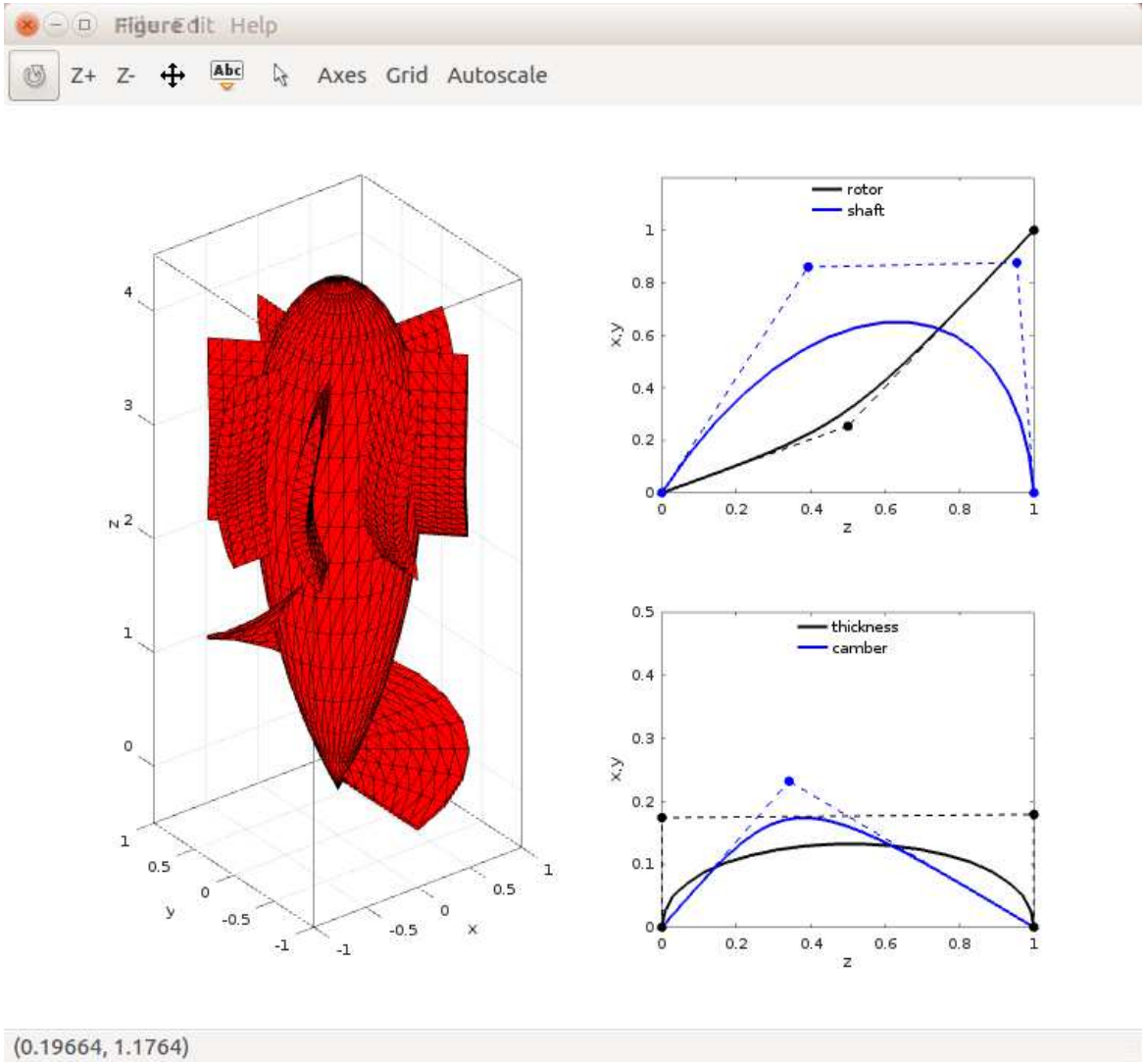
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – liczba łopatek wirnika



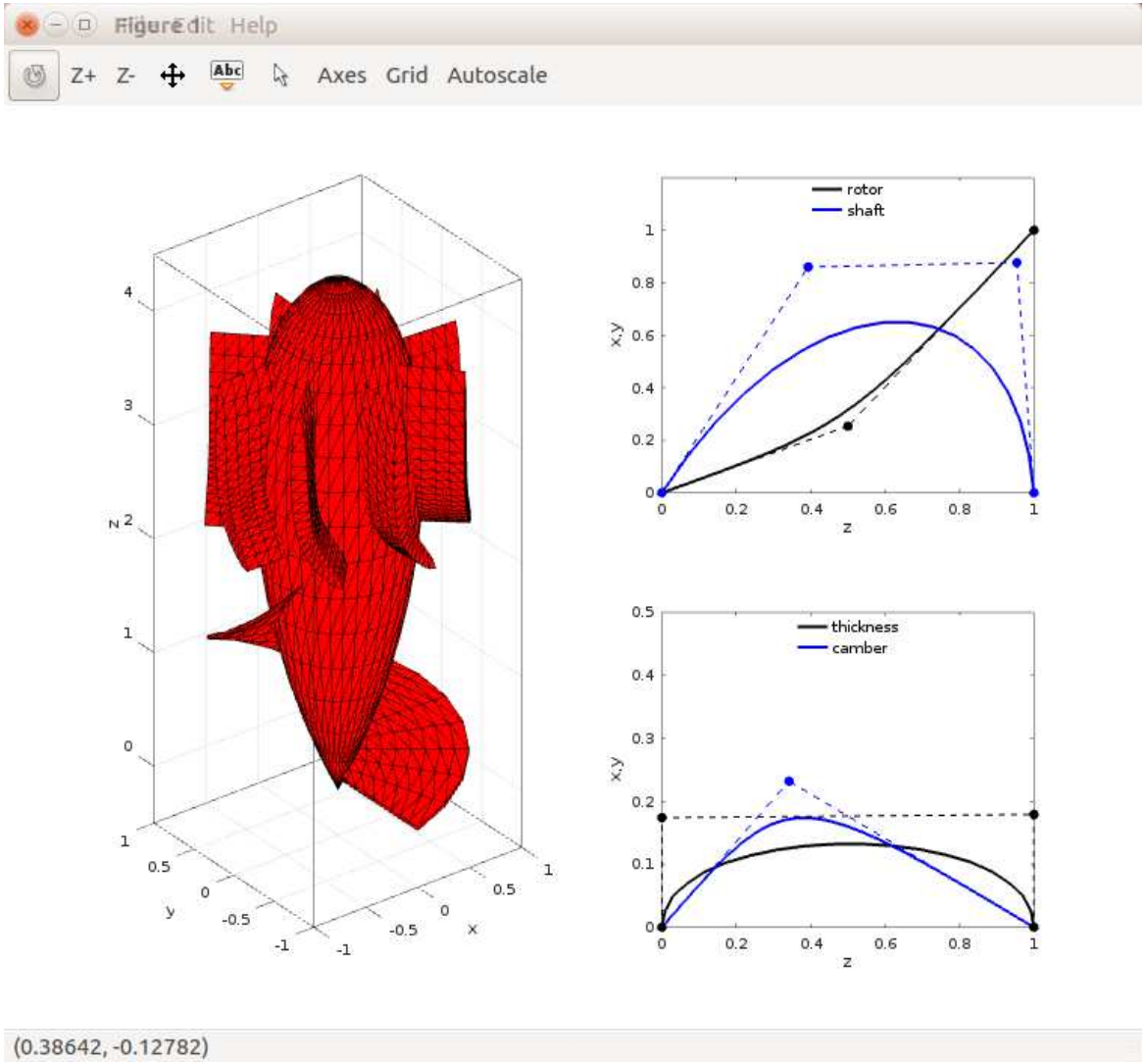
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – kąty skręcenia łopatek kierowniczych



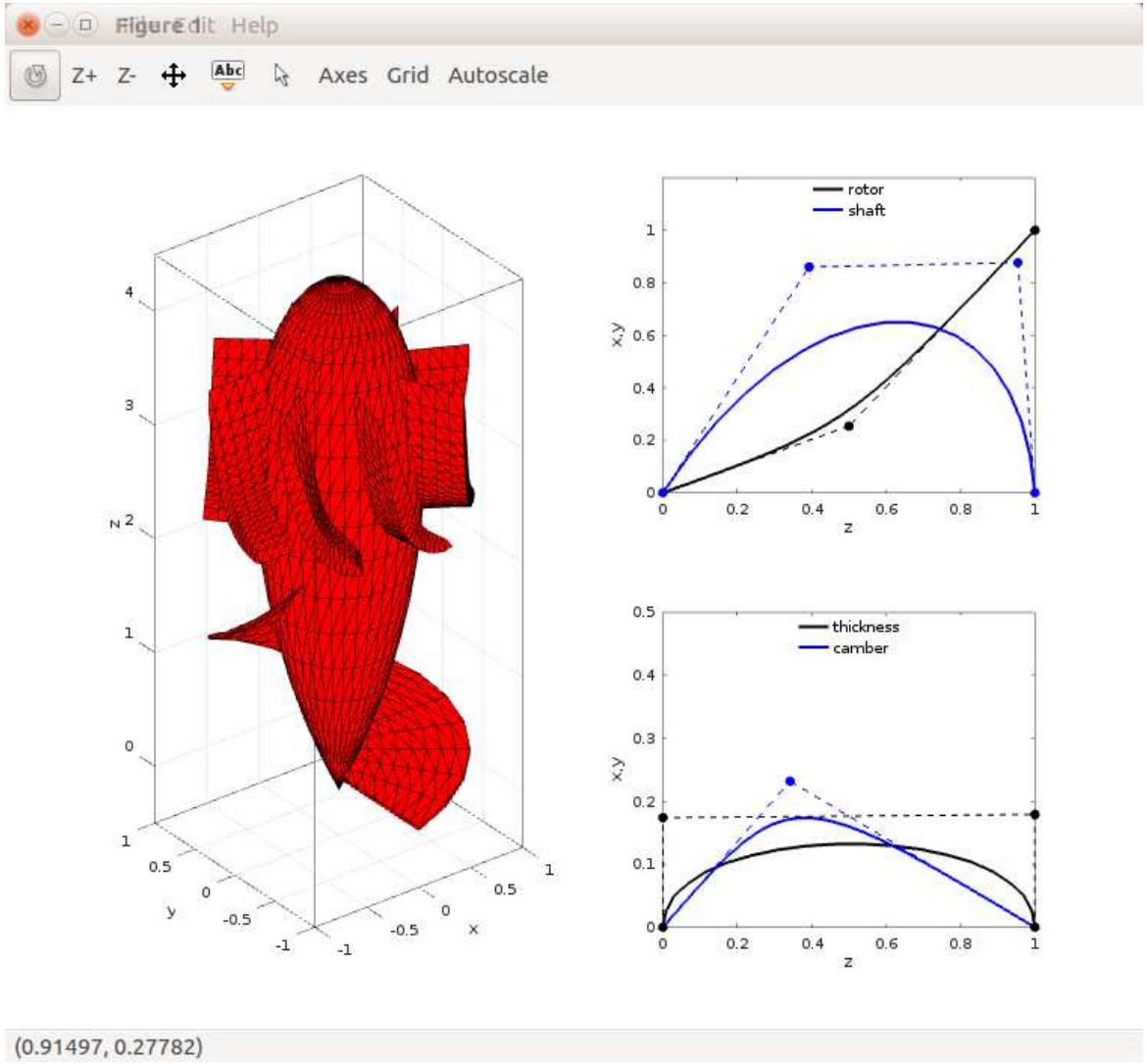
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – kąty skręcenia łopatek kierowniczych



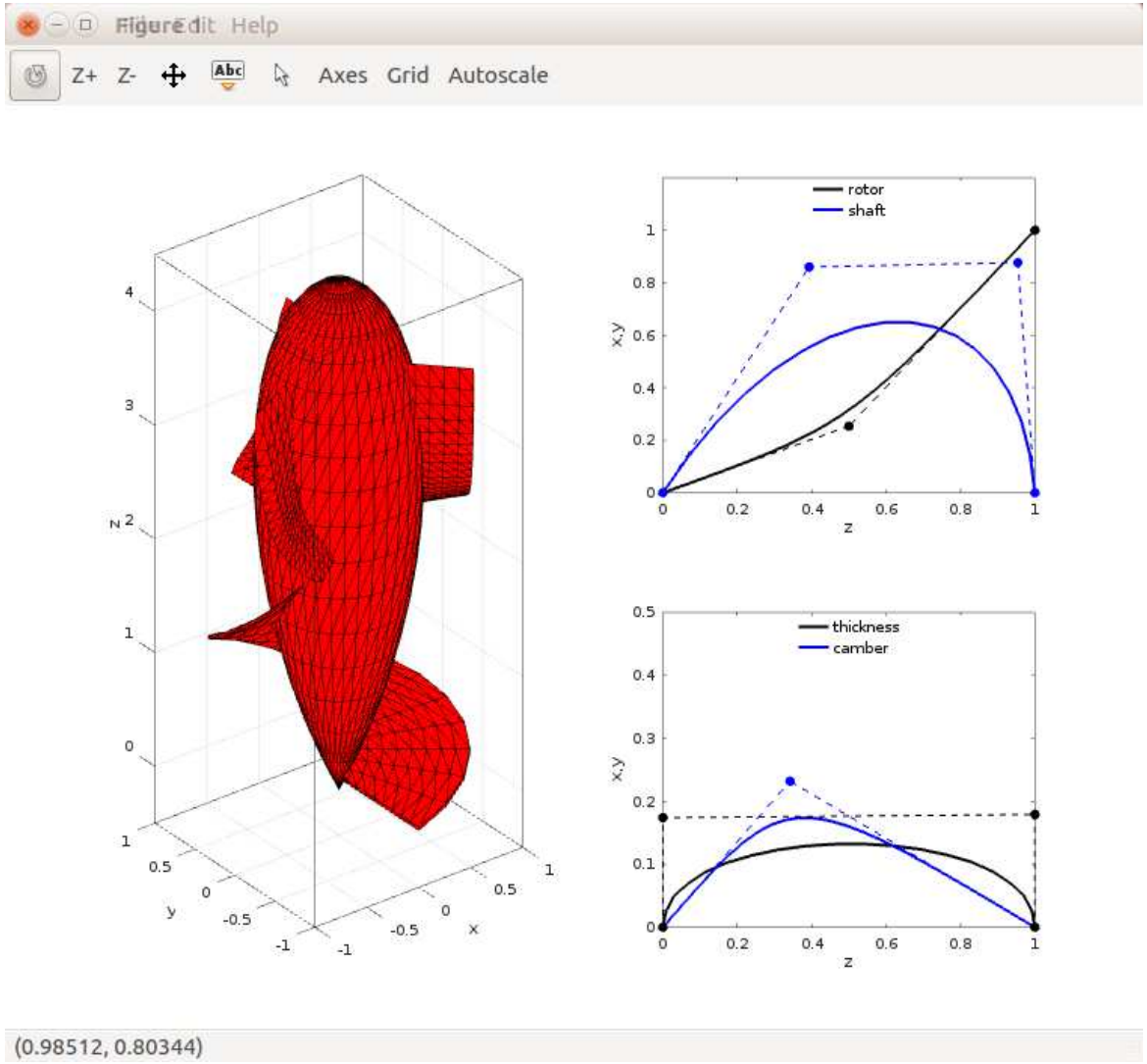
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – kąty skręcenia łopatek kierowniczych



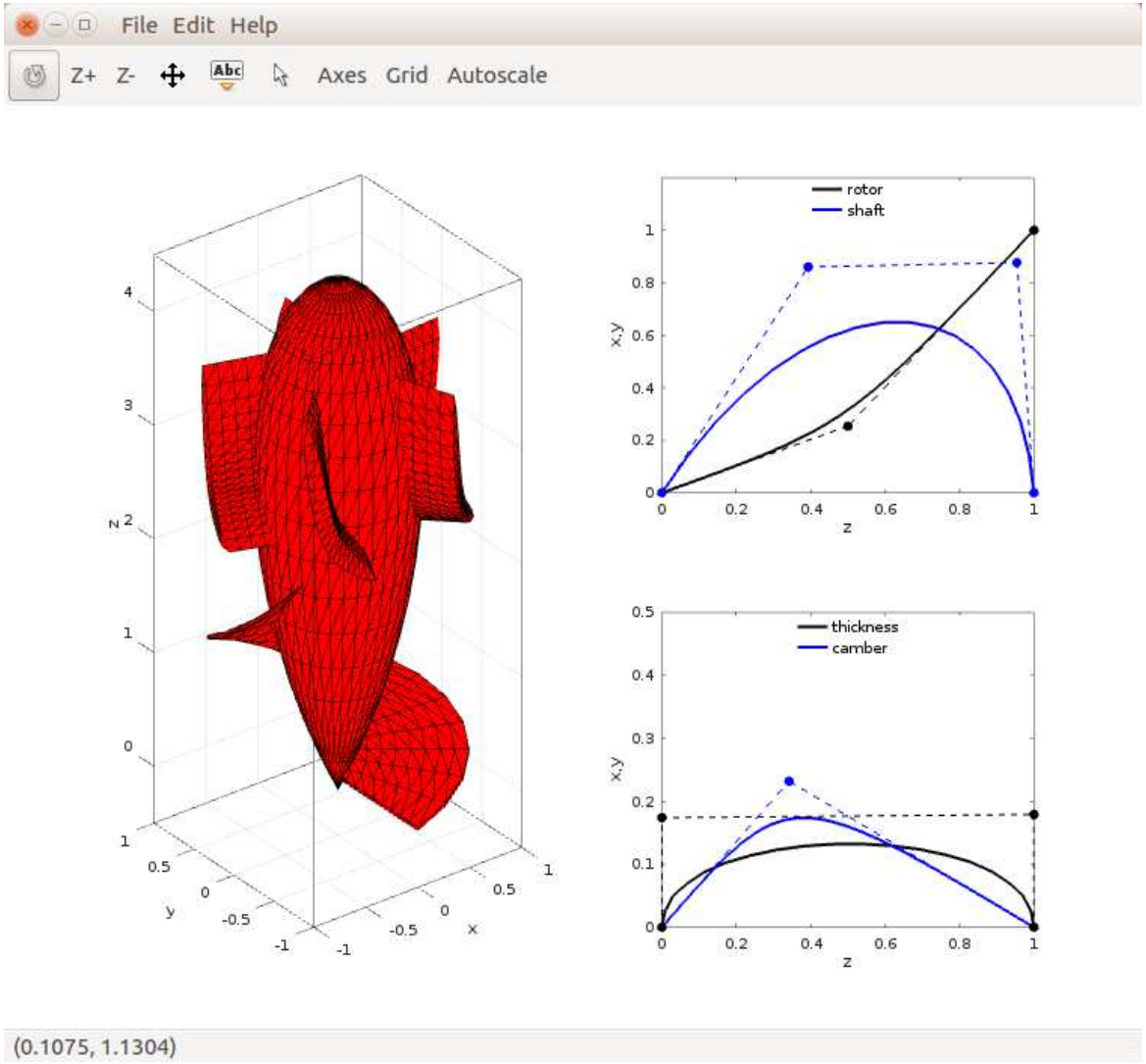
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – liczba łopatek kierowniczych



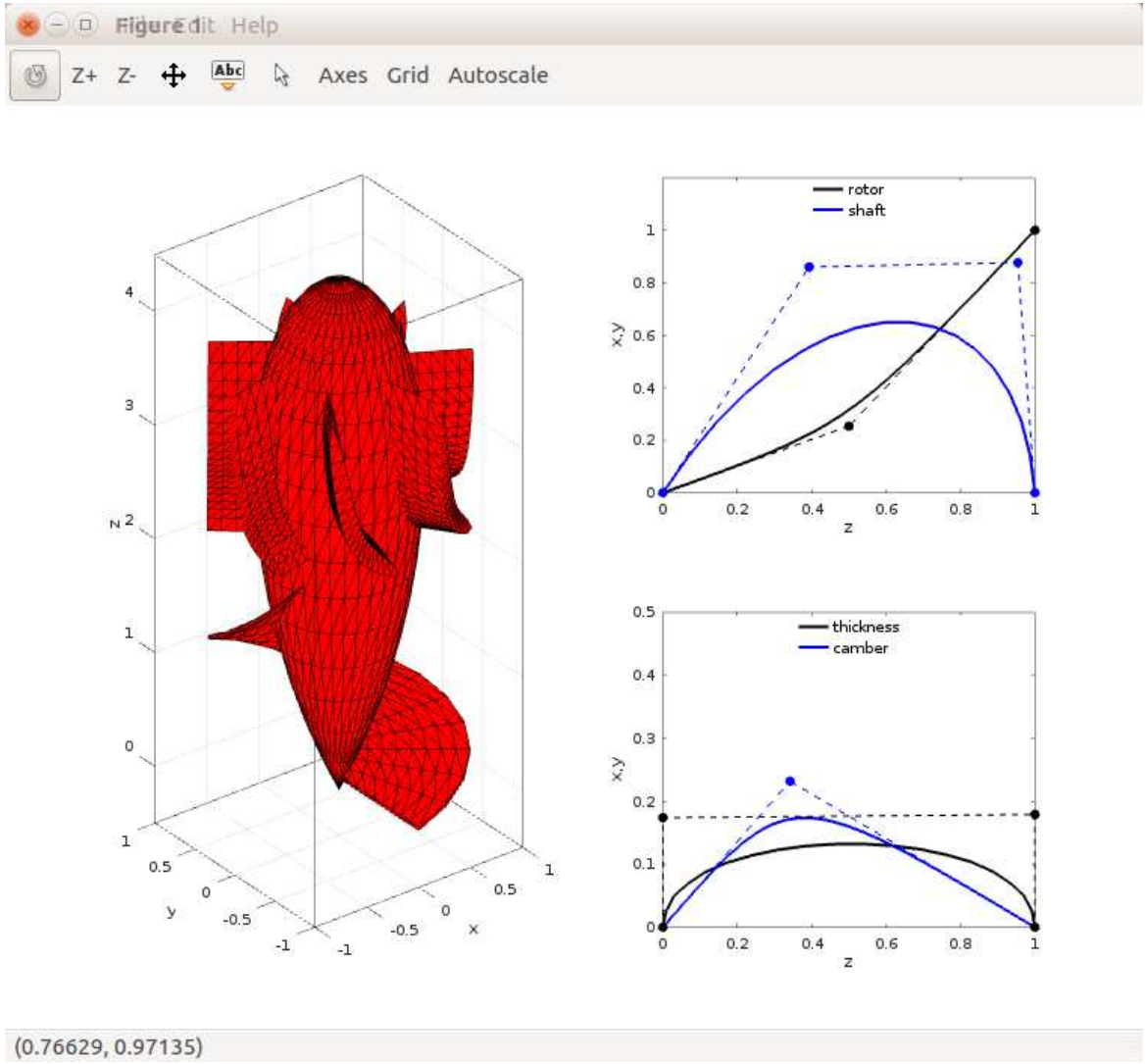
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – liczba łopatek kierowniczych



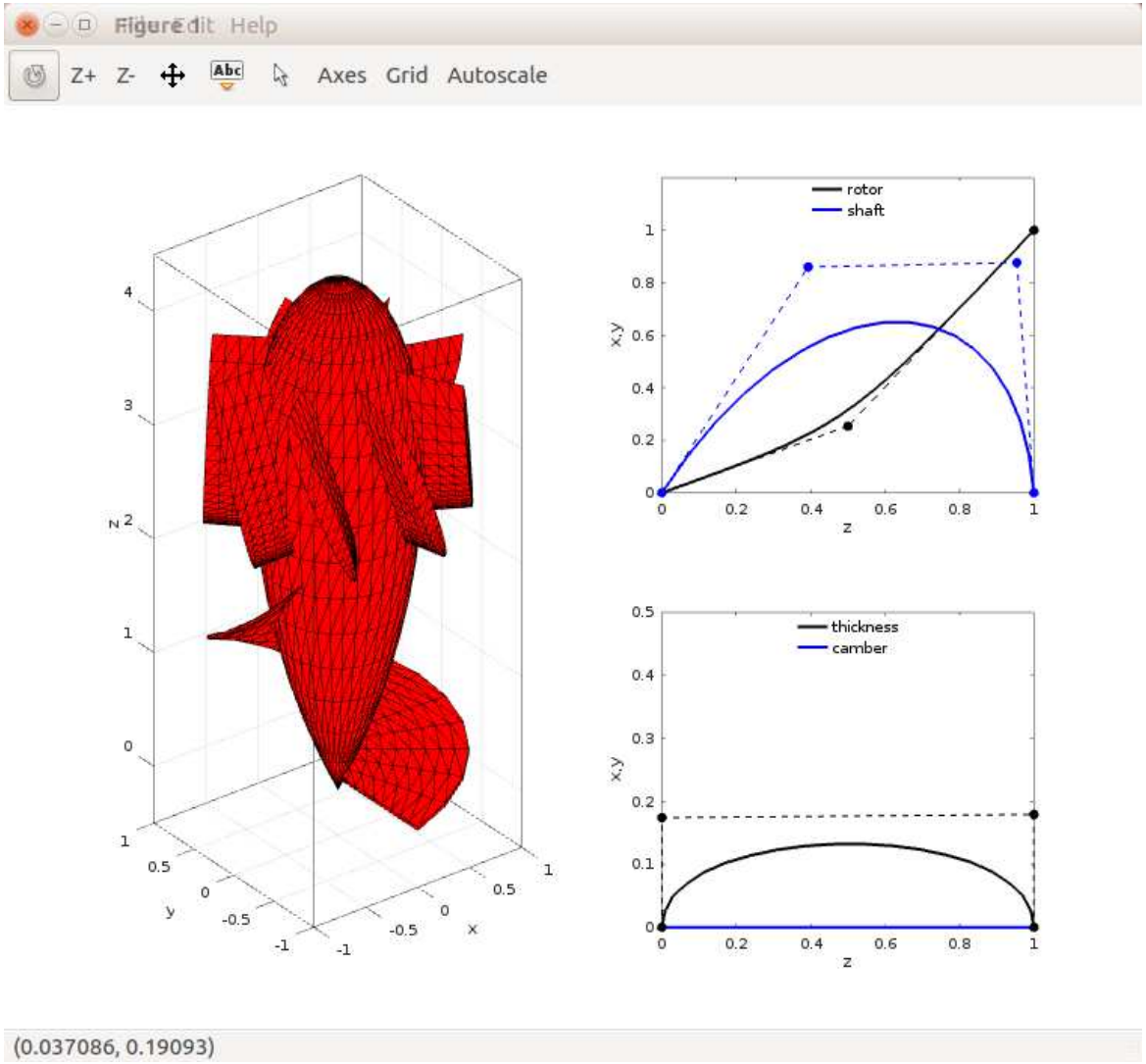
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – liczba łopatek kierowniczych



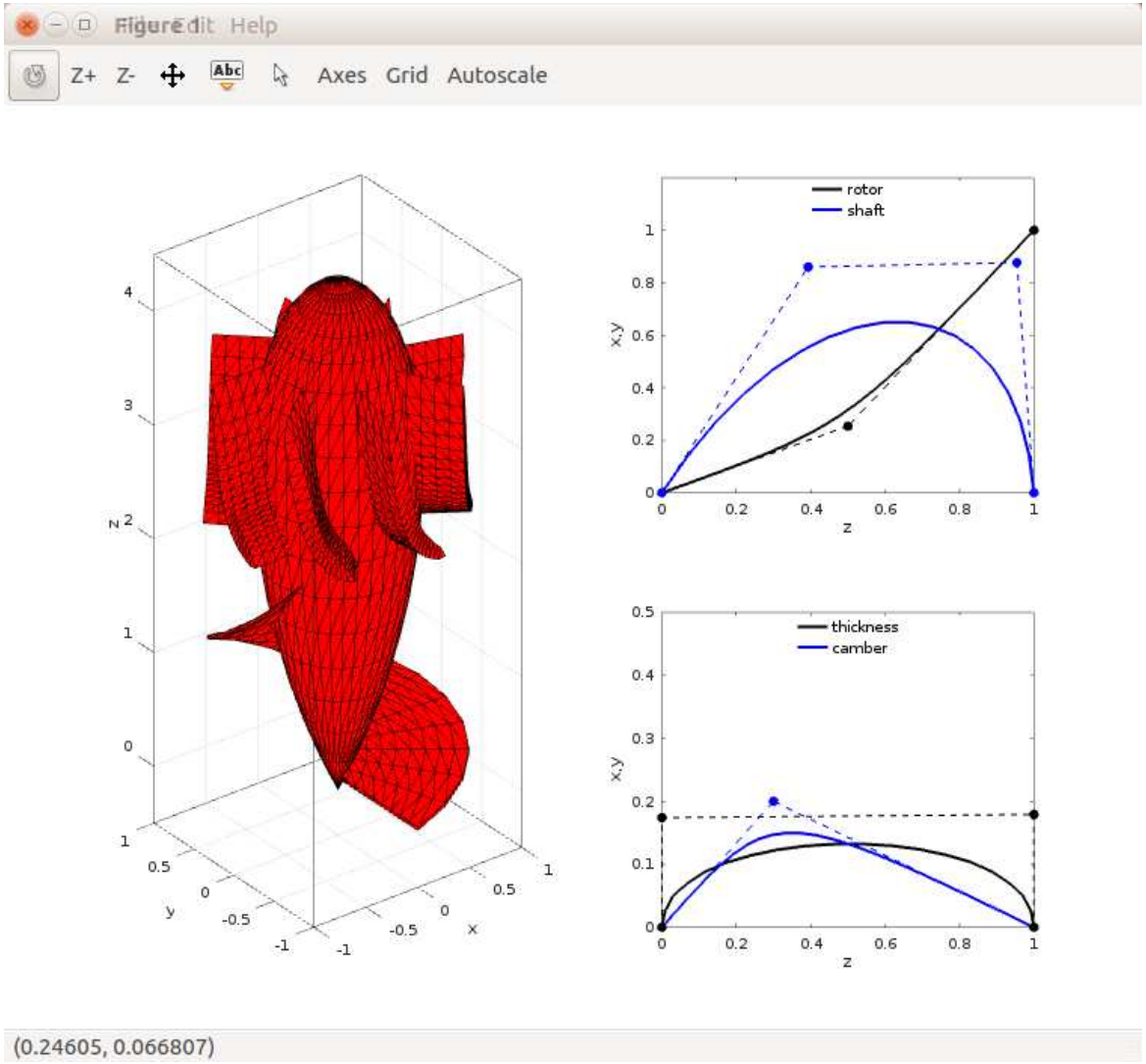
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – kształt łopatki kierowniczej



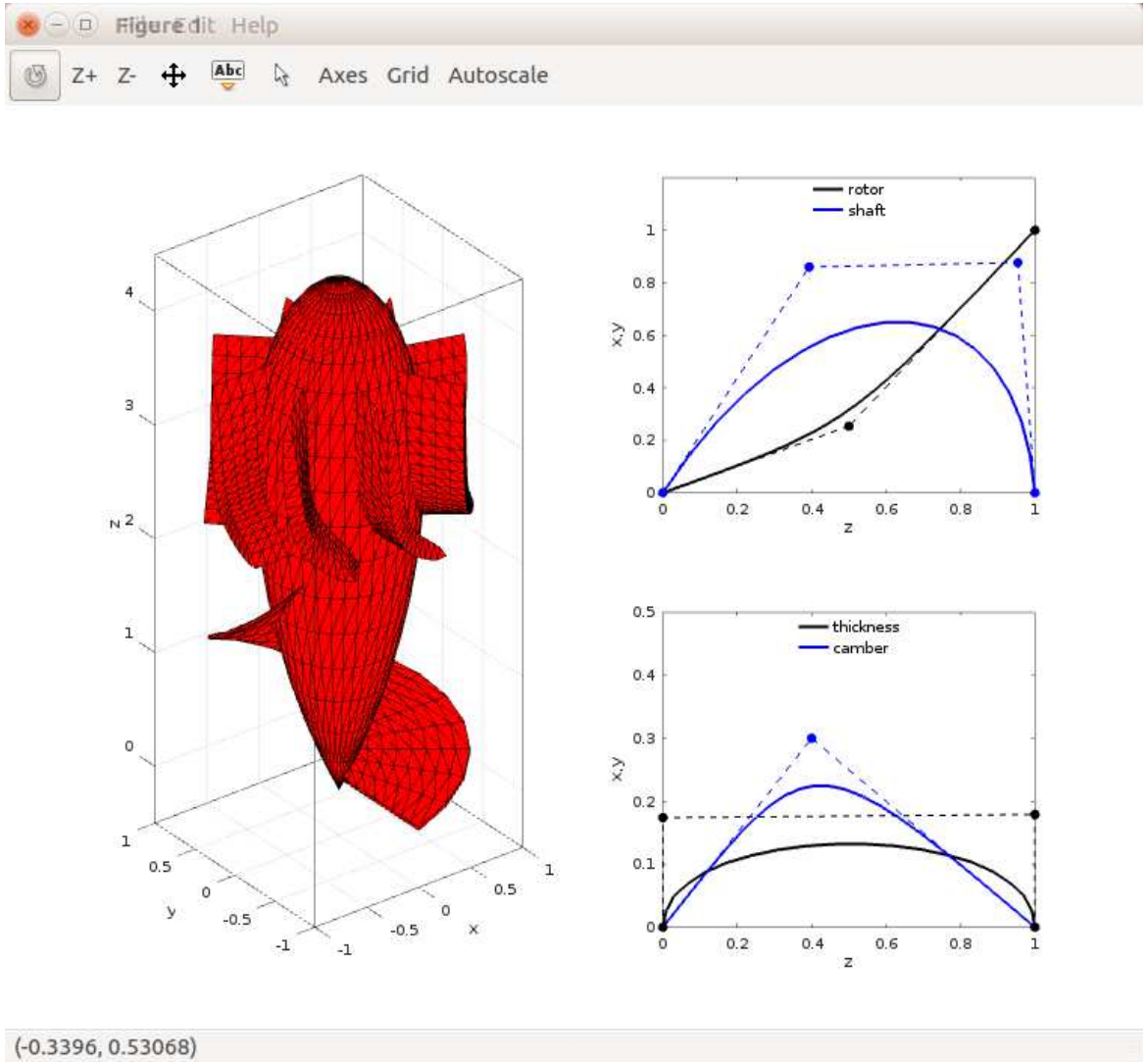
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – kształt łopatki kierowniczej



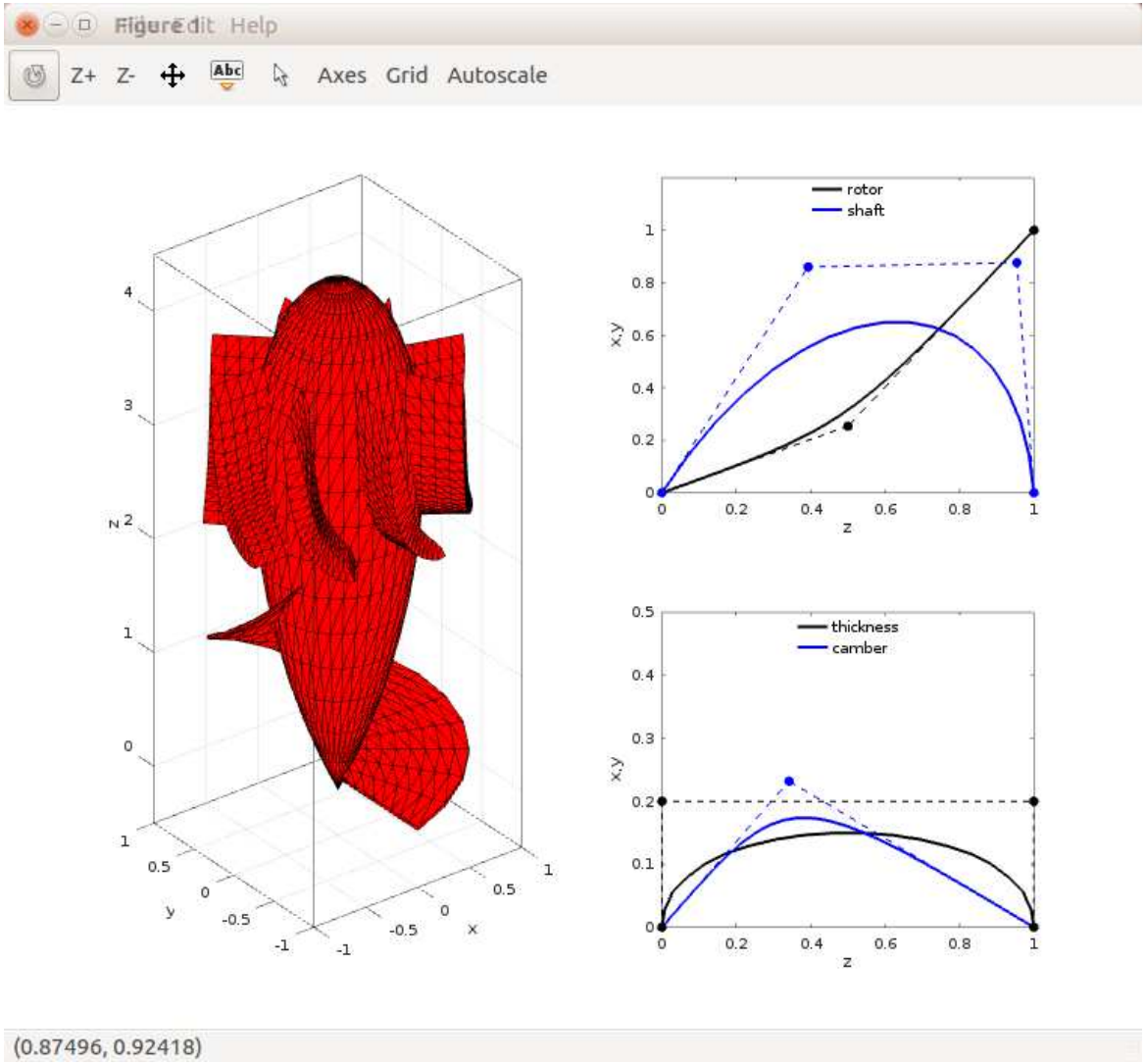
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – kształt łopatki kierowniczej



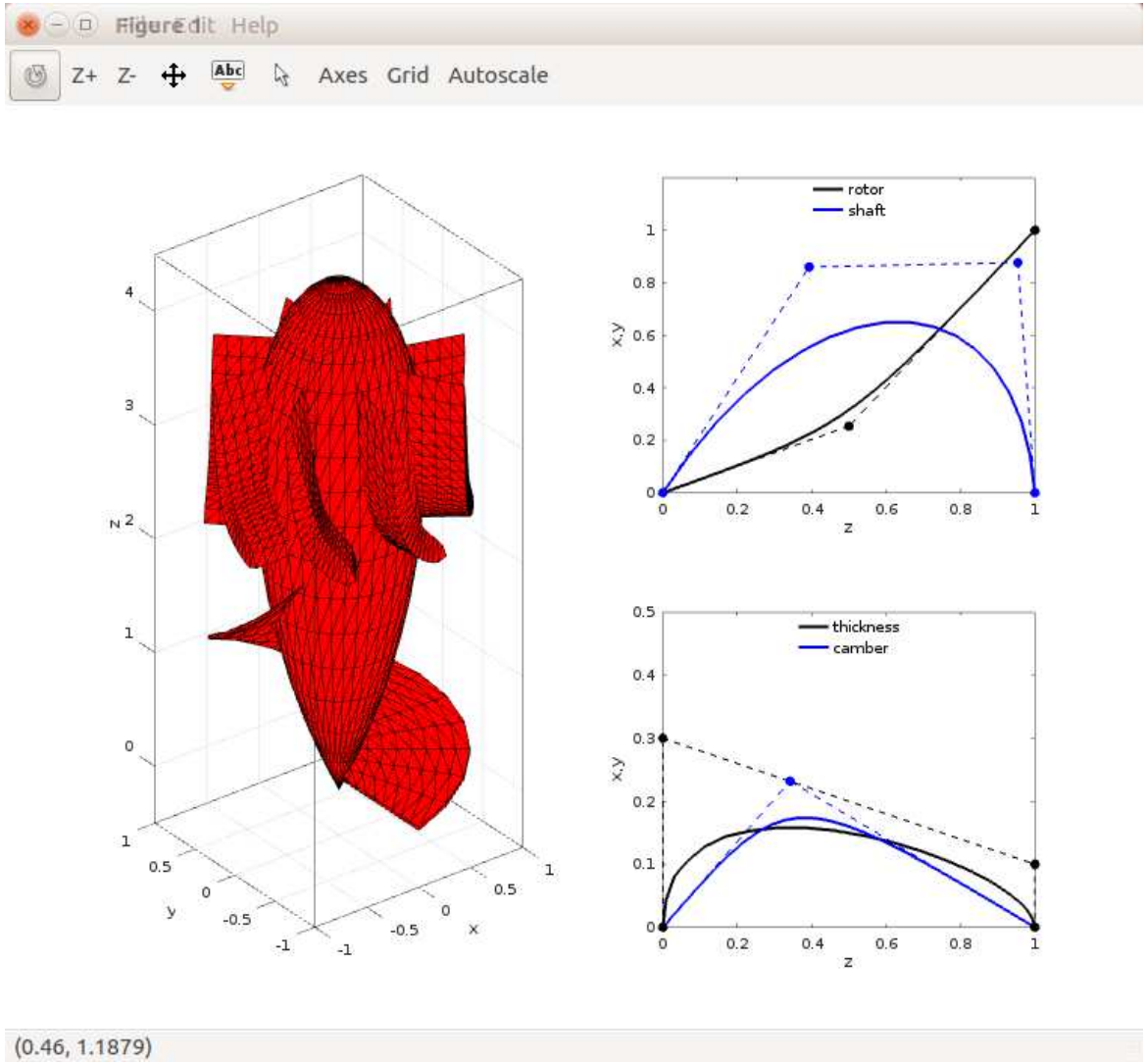
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – grubość łopatki kierowniczej



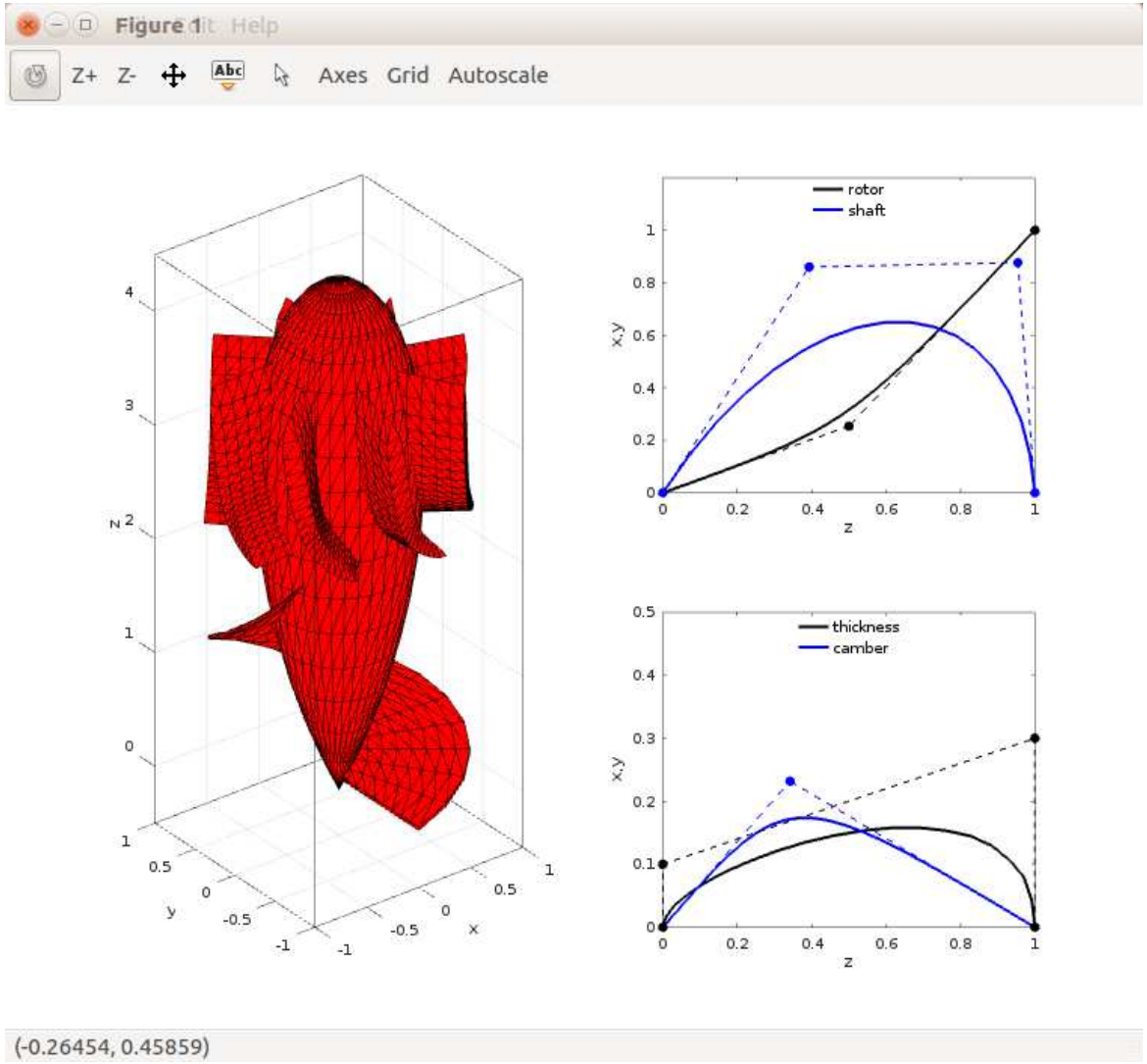
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – grubość łopatki kierowniczej



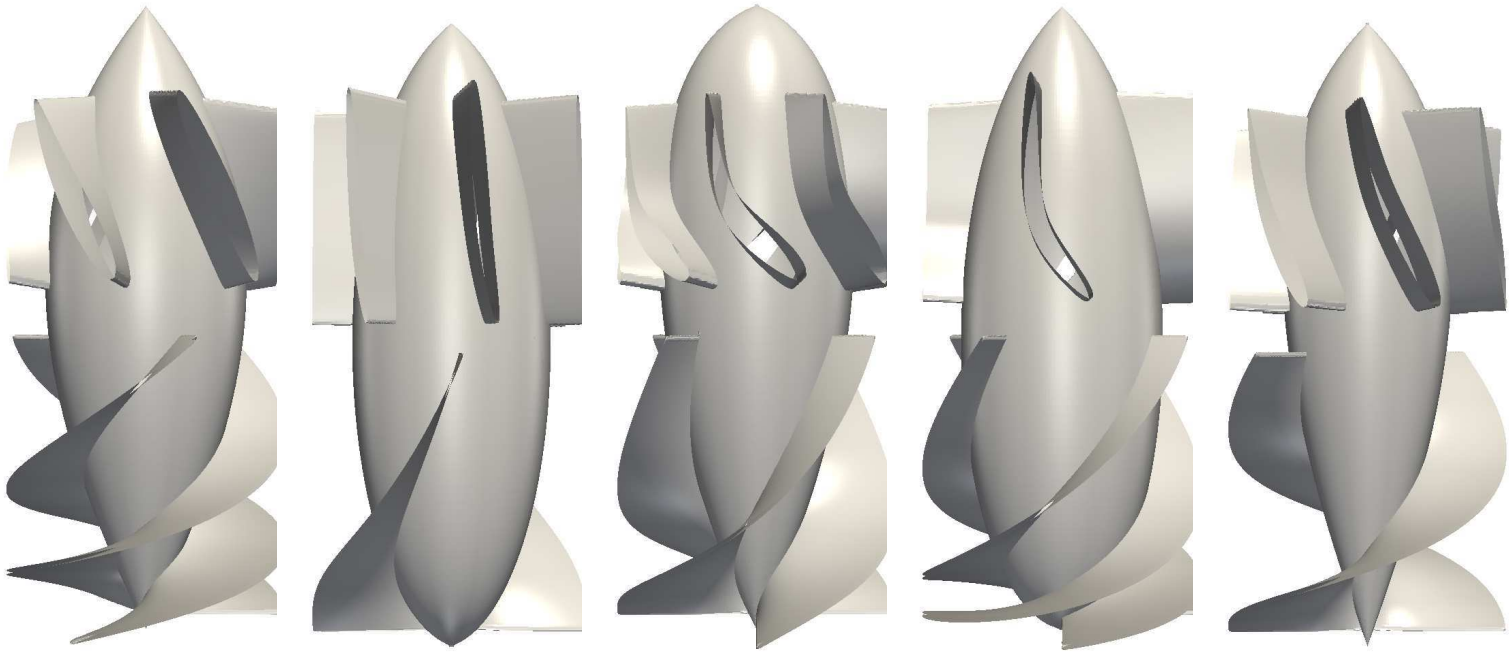
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Geometria – grubość łopatki kierowniczej



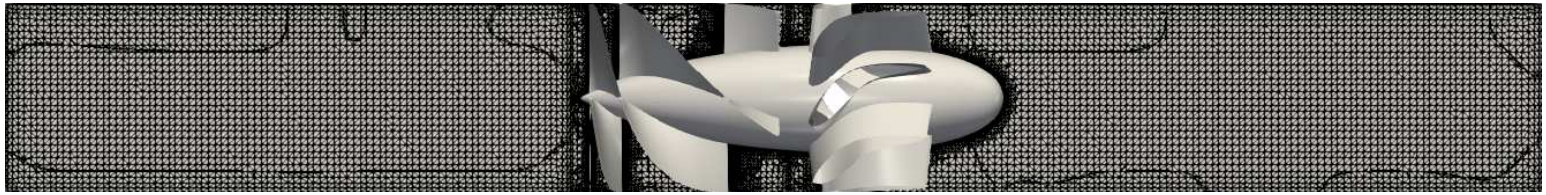
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

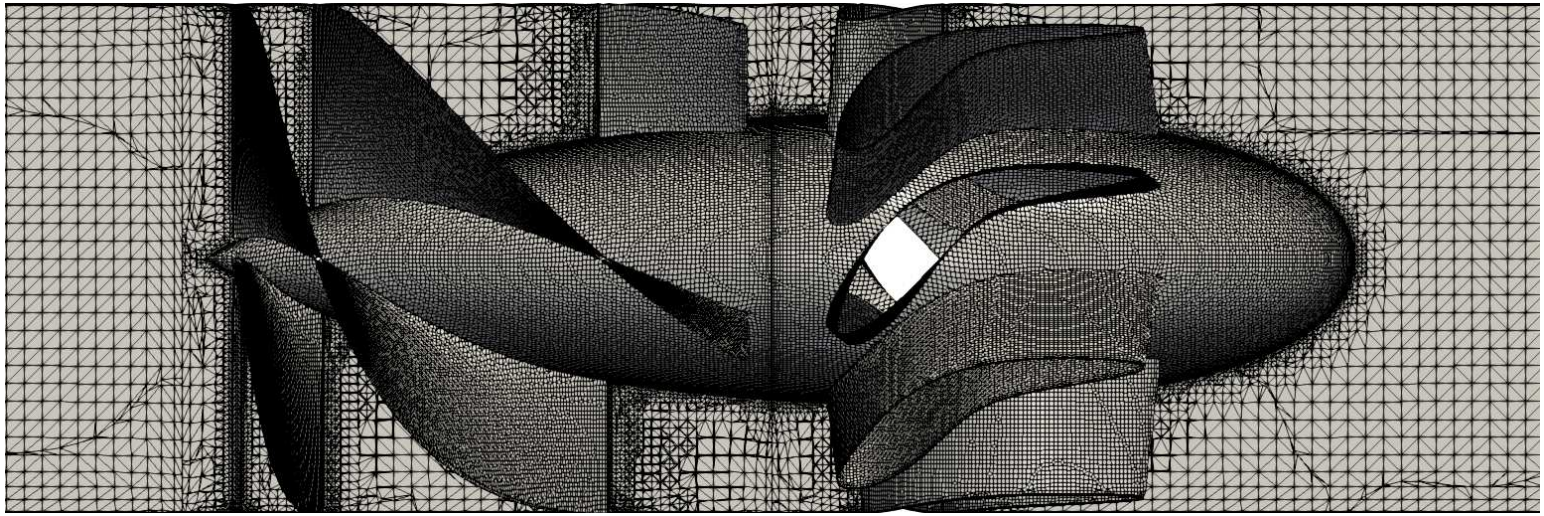
Geometria – przykładowe losowe kształty



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Dyskretyzacja

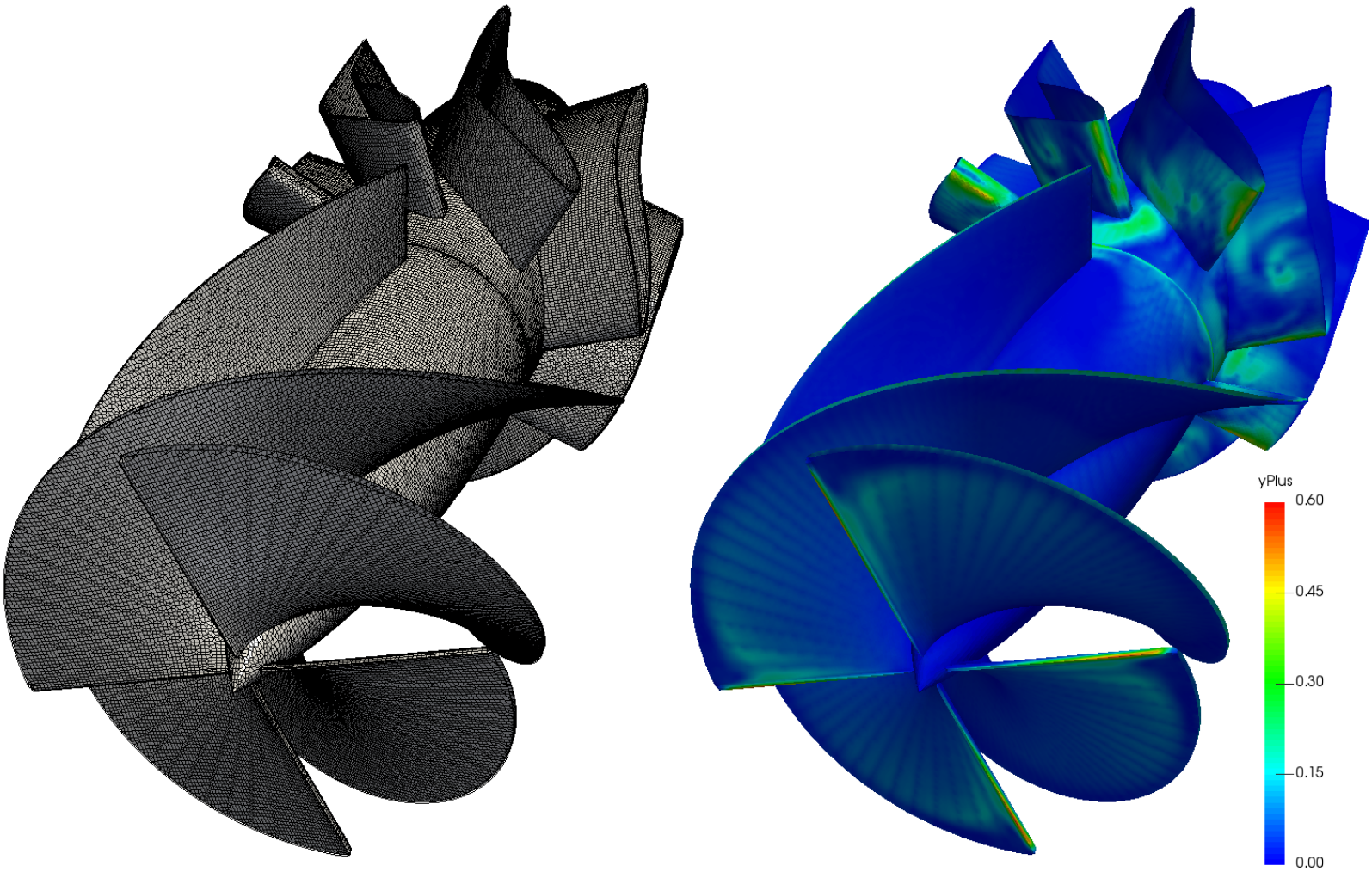




Liczba węzłów $1\,689\,534$, liczba objętości $1\,495\,877$

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Jakość siatki



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Warunki brzegowe

- Wlot. $\dot{V} = 3\,\mathrm{dm/min}$ skierowany prostopadle do wlotu. Intensywność turbulencji 1% iloraz lepkości $\nu_t/\nu = 1$;
- Wylot. Stałe ciśnienie;
- Ściany. Zerowa prędkość na kierownicy. Obroty wirnika $n = 6000\,\mathrm{obr/min}$;

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Optymalizacja – funkcja celu

Funkcja celu – maksymalny przyrost ciśnienia Δp.

$$\Delta p_0 = \min_{\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^D} \left(-\Delta p(\mathbf{x}) \right) \tag{288}$$

Globalne minimum funkcji celu wyrażone jest przez

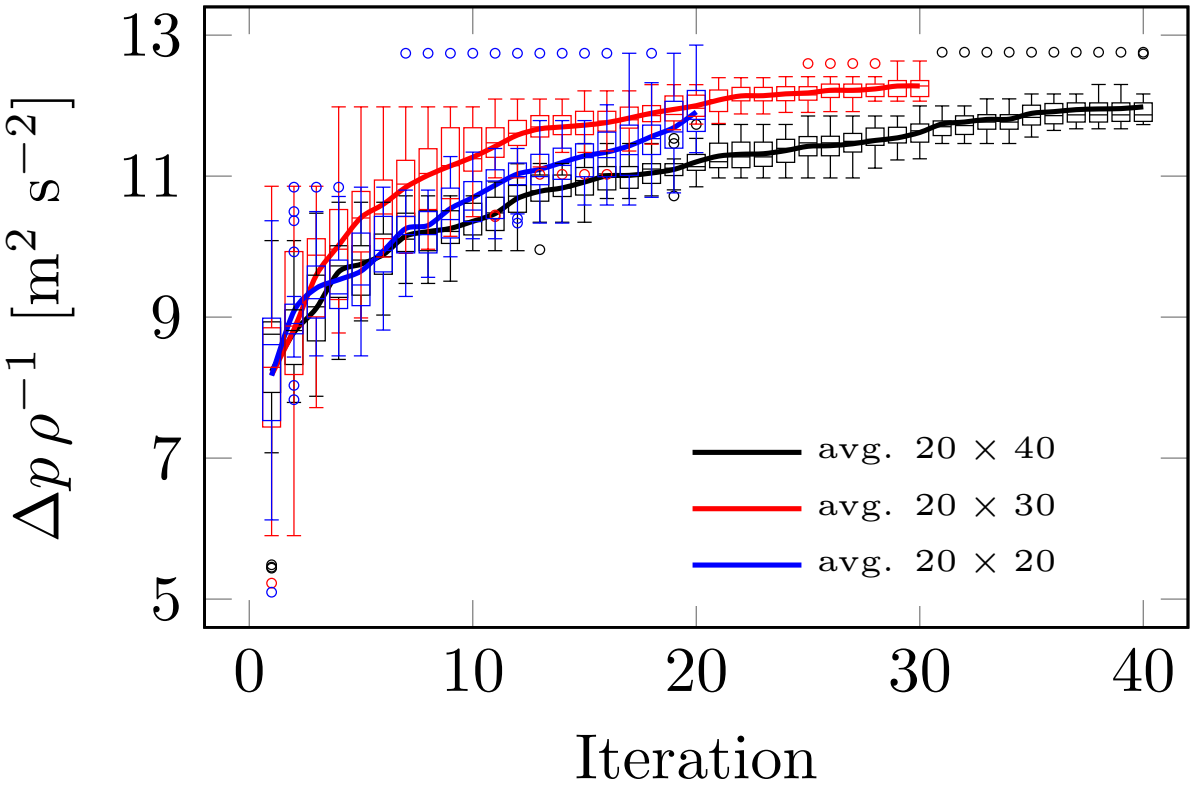
$$\mathbf{g} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^D} \left(-\Delta p(\mathbf{x}) \right) \tag{289}$$

gdzie $D = 14$ jest liczbą zmiennych i liczbą ograniczeń przestrzeni Ω (L_i i U_i są odpowiednio dolnymi i górnymi ograniczeniami poszczególnych zmiennych)

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D : L_i \leqslant x_i \leqslant U_i \right\} \tag{290}$$

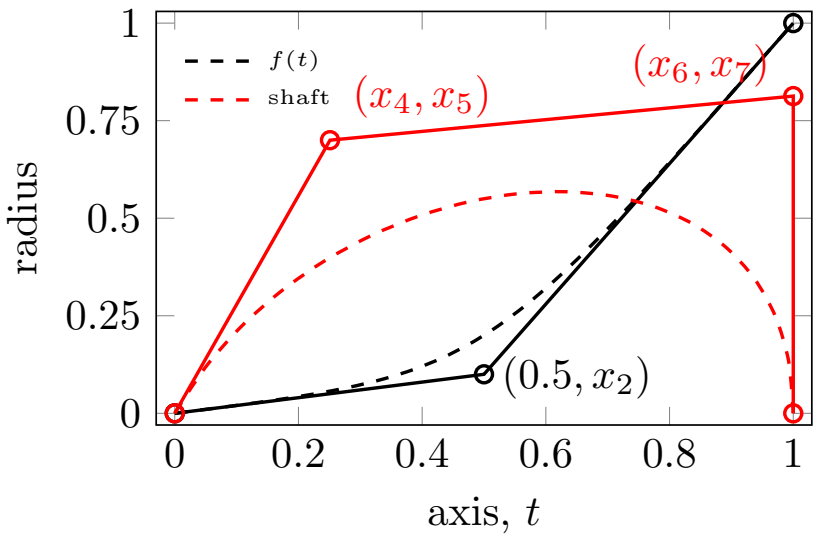
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

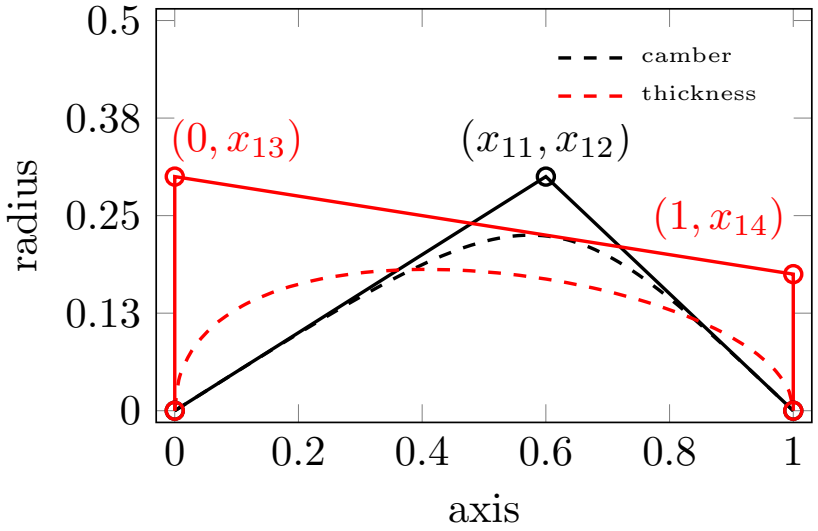
Optymalizacja – zbieżność

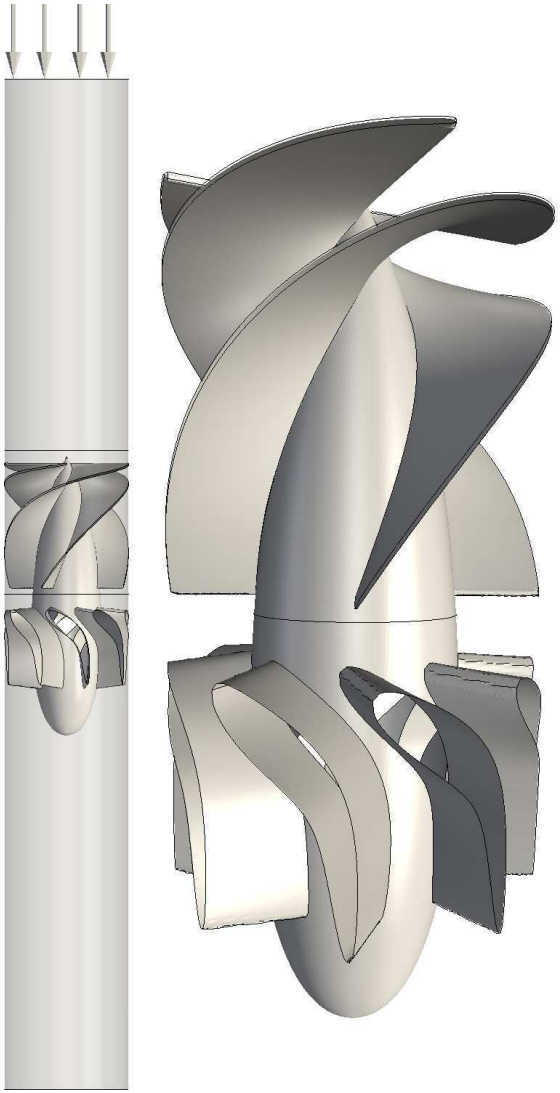


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Wyniki – najlepsze rozwiązanie







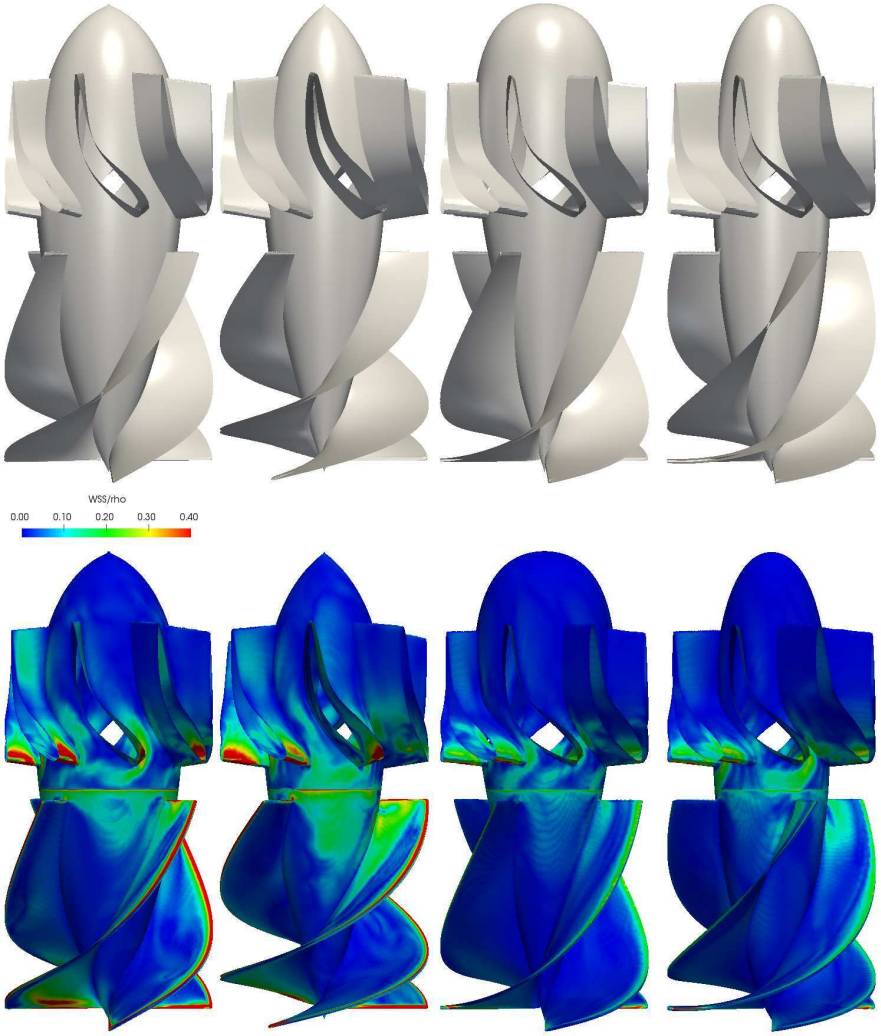
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Wyniki – średniego kształty

Ewolucja średniego kształtu (iteracje 1, 6, 12, 17 i 20)

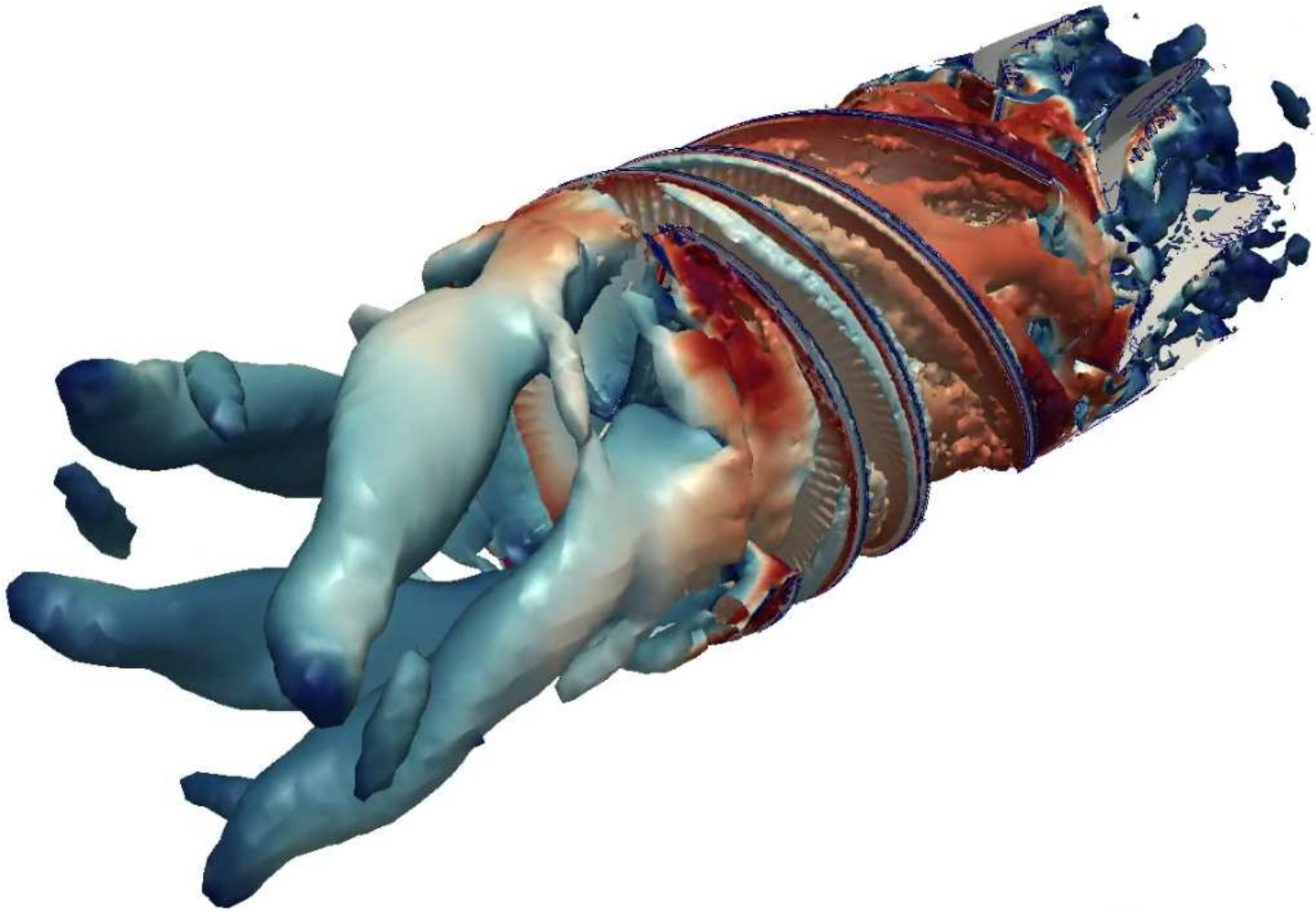
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Wyniki – najlepsze kształty (iter. 1, 2, 7,20)



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływ niestacjonarny – przykład

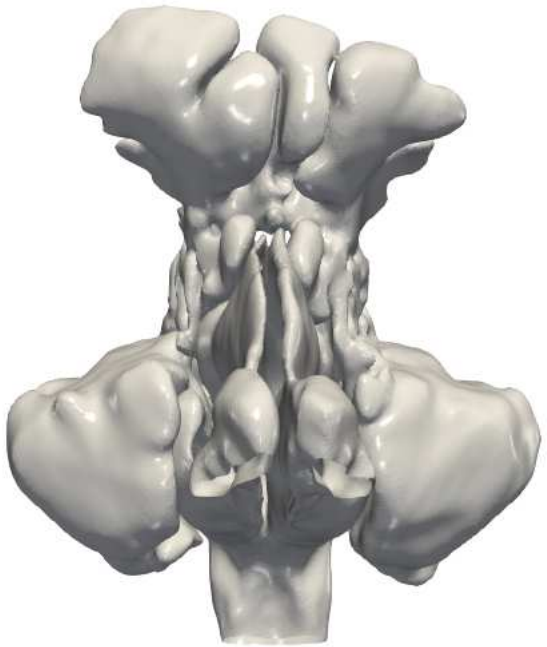


Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Przepływy w układzie oddechowym

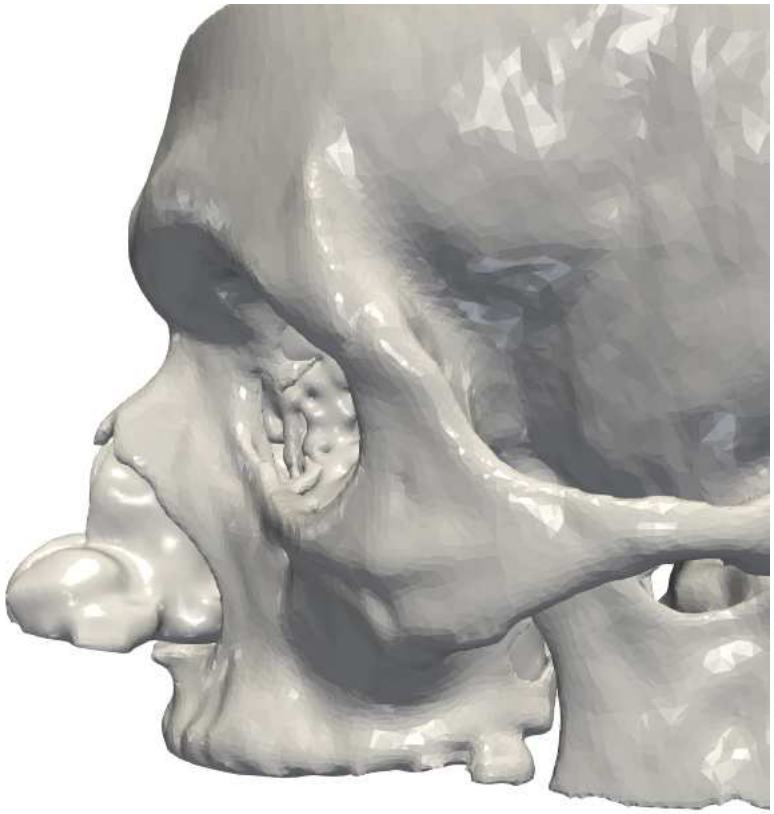
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Górne drogi oddechowe



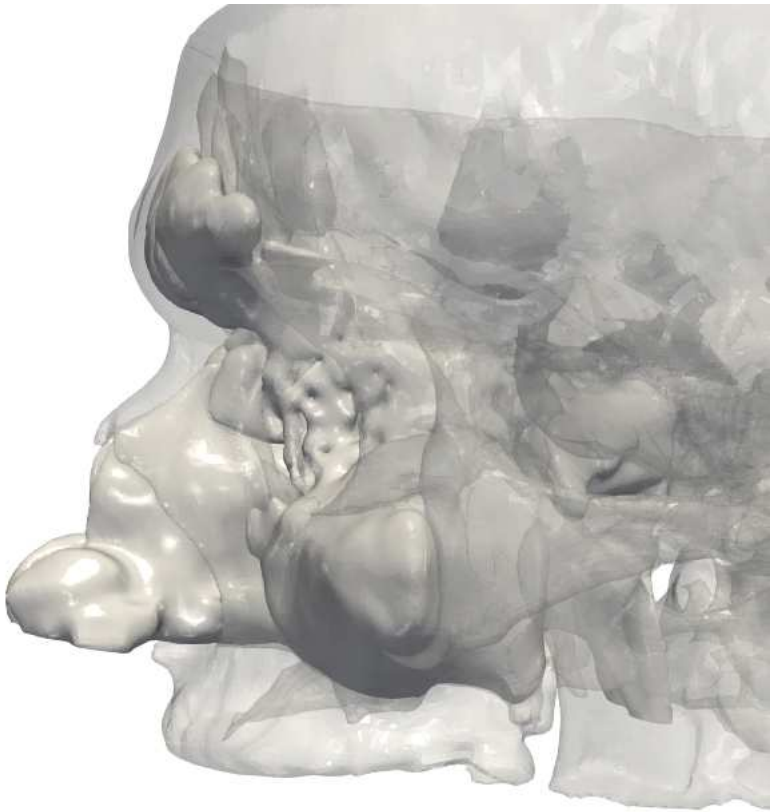
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Górne drogi oddechowe



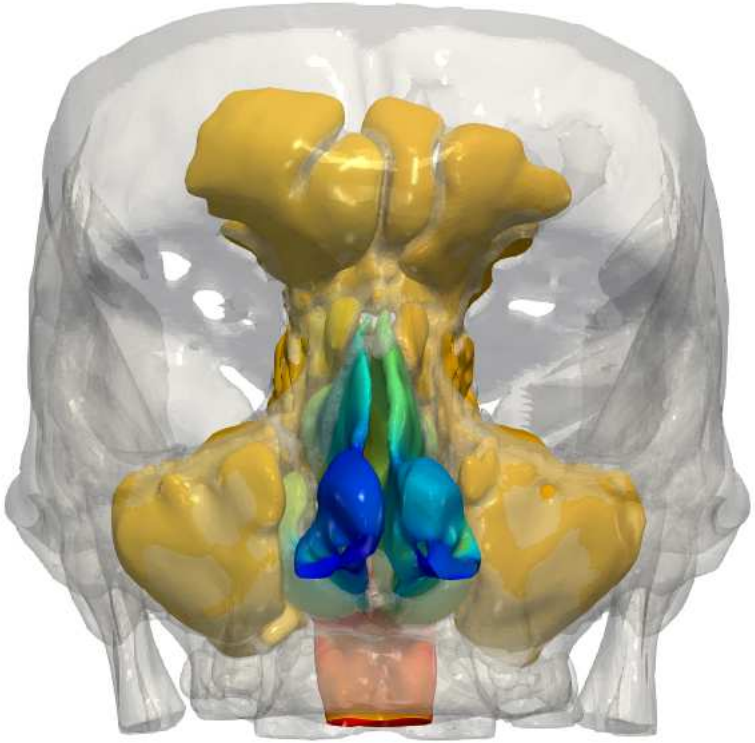
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

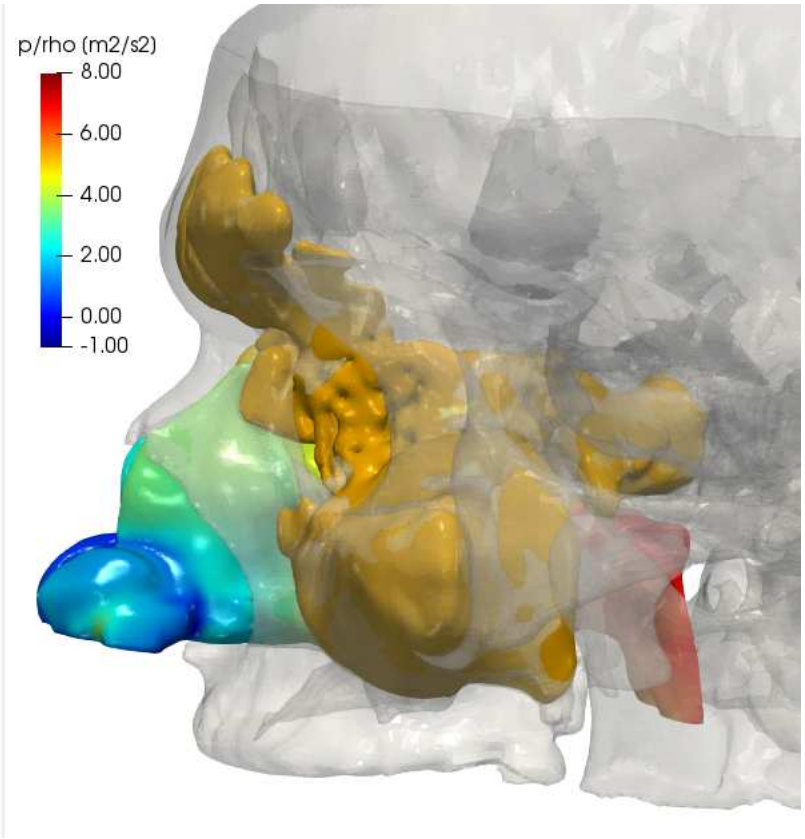
Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

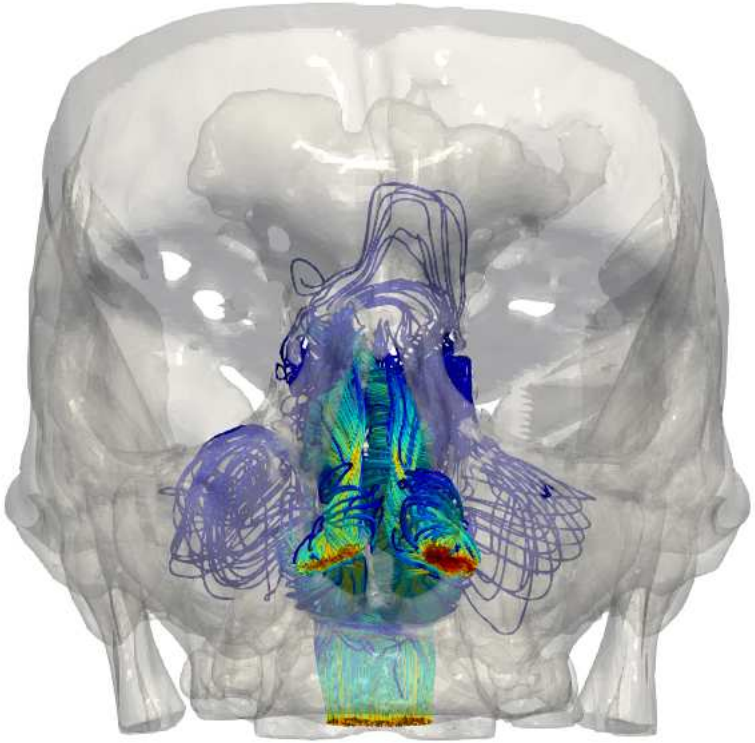
Górne drogi oddechowe

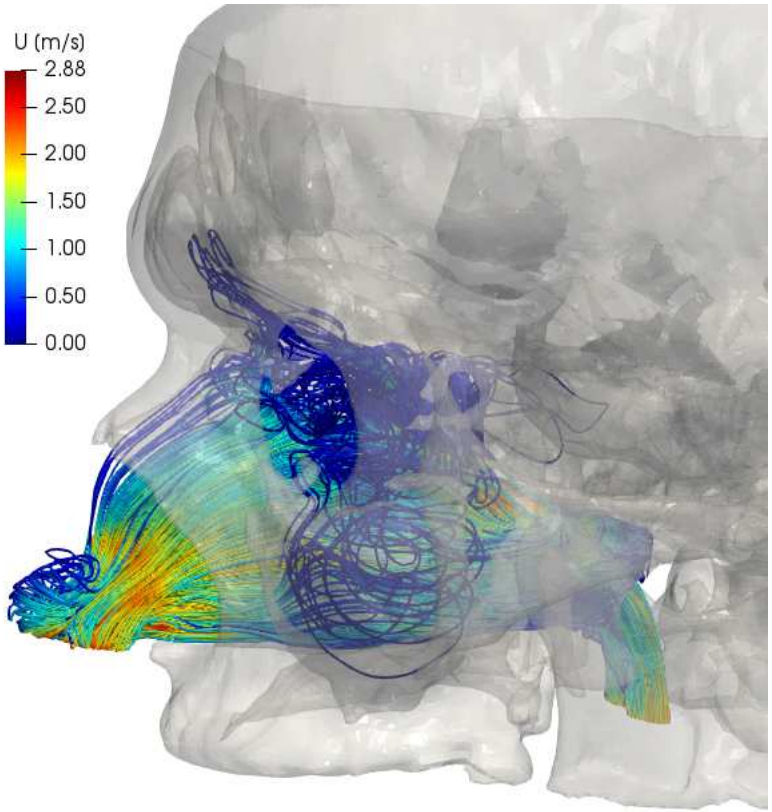




Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

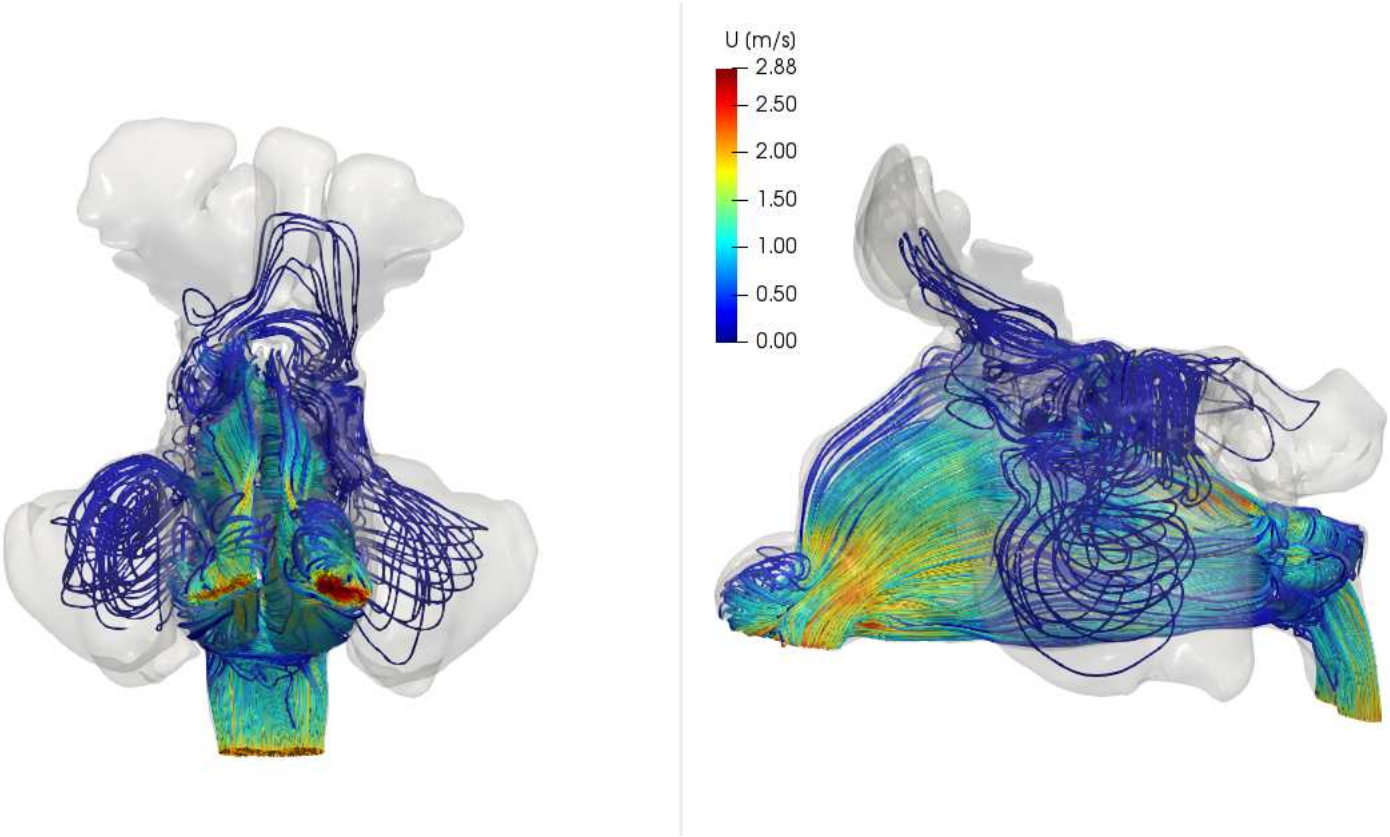
Górne drogi oddechowe





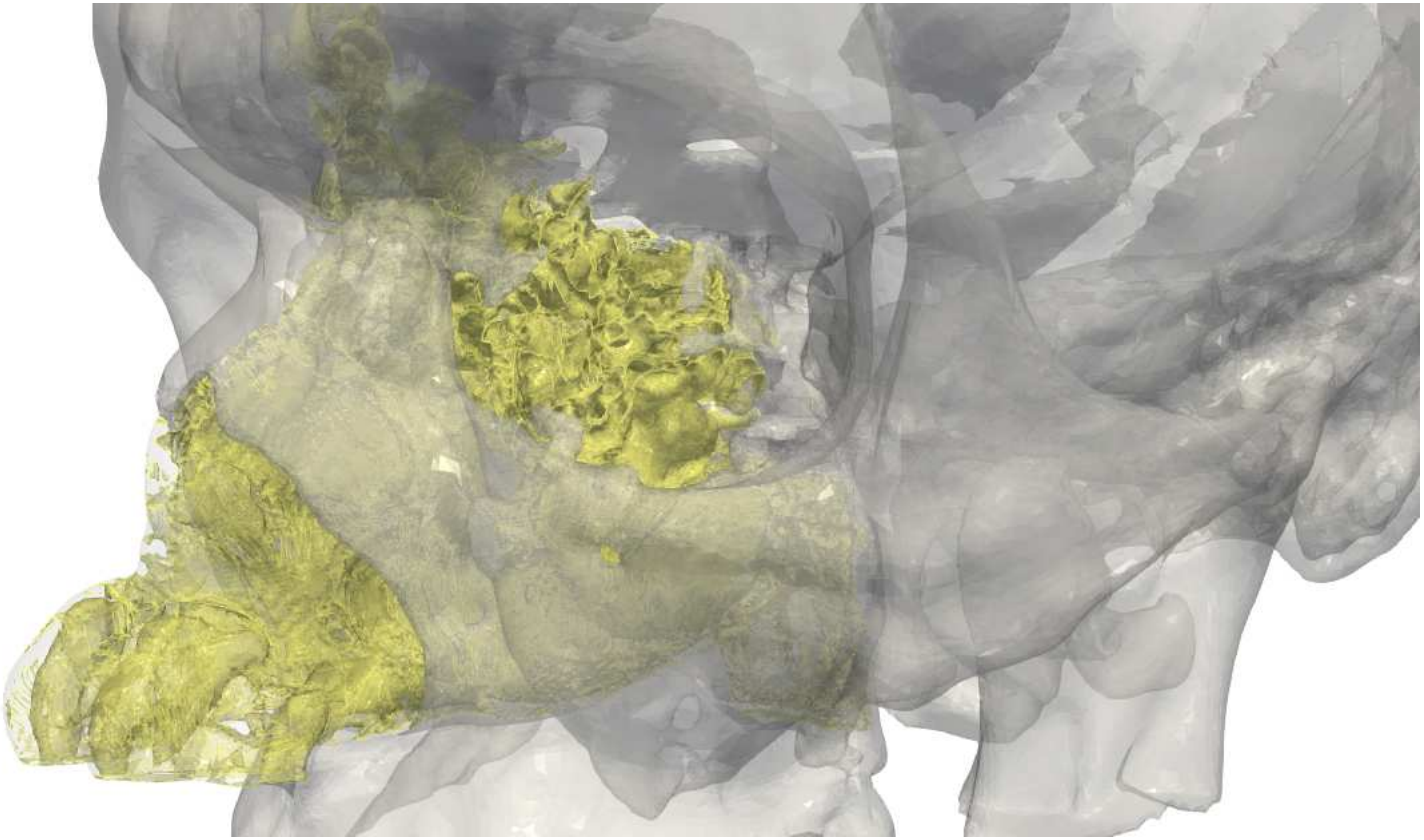
Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

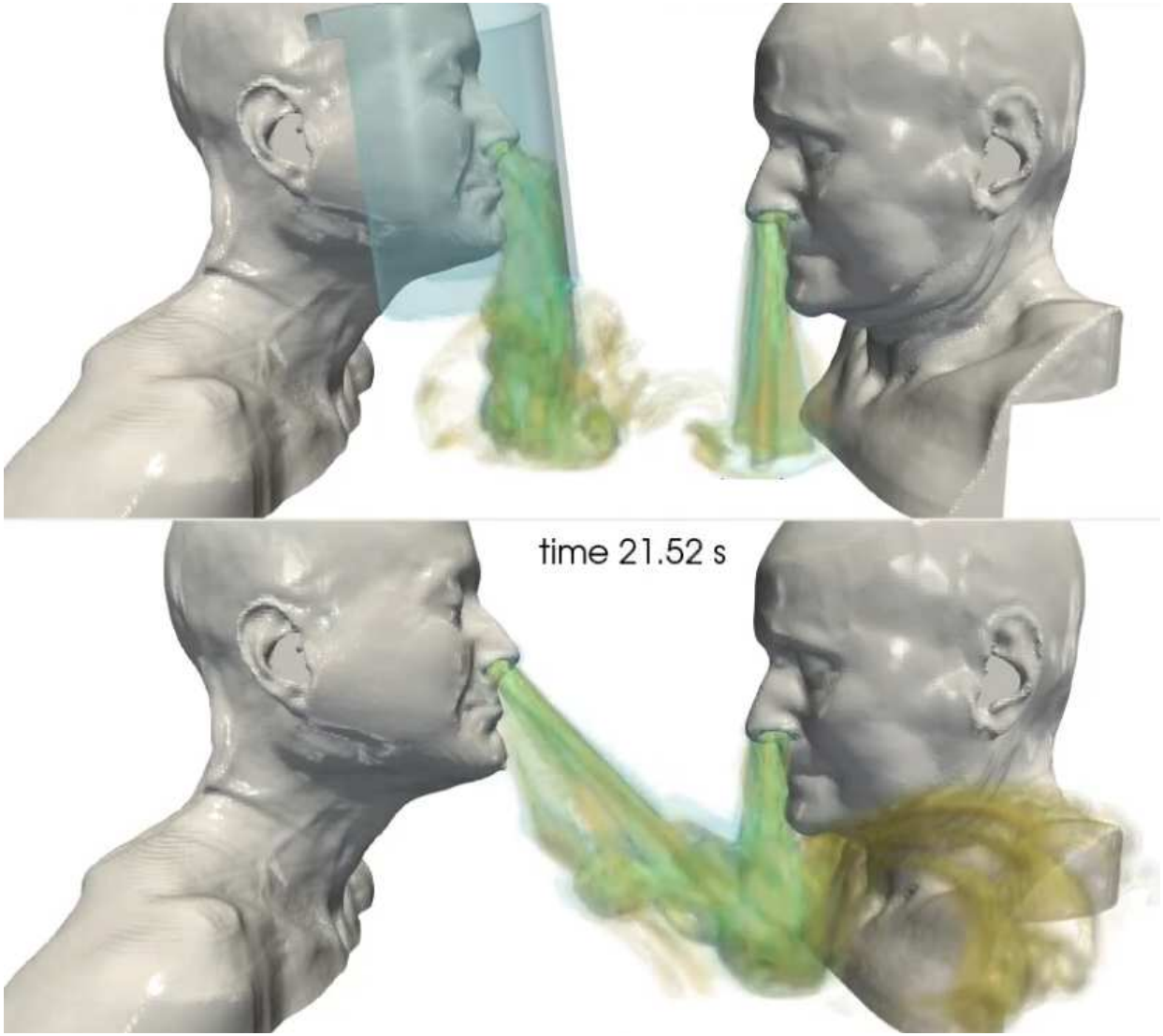
Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura

Górne drogi oddechowe



Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Laboratorium

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Literatura

Podstawowe równania
Bioreologia
Przykładowe rozwiązania analityczne
Analogia mechaniczno-elektryczna
Sieci naczyń
Prawa Murraya
Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi
Urządzenia do wspomagania krążenia
Przepływy w układzie oddechowym
Laboratorium
Literatura

Literatura

[1] Tesch K., *Mechanika Płynów*, Wyd. PG, Gdańsk, 2008

[2] Tesch K., *On Some Extensions of Murray's Law*, TASK Quarterly 14(3), 227–235, 2010 **LINK**

[3] Tesch K., *Generalised Herschel Model Applied to Blood Flow Modelling*, TASK Quarterly 16(3-4), 253–262, 2012 **LINK**

[4] Tesch K., *Wybrane zagadnienia modelowania przepływów krwi...*, Wyd. PG, Gdańsk, 2012

[5] Tesch K., Kaczorowska K., *Arterial cannula shape optimization by means of the rotational firefly algorithm*, Engineering Optimization 48(3), 497–518, 2015

[6] Kaczorowska K., Tesch K., *A Short Review of Blood Flow Modelling Methds: From Macro- to Microscales*, TASK Quarterly 21(1), 5–16, 2017 **LINK**

[7] Tesch K., Kaczorowska K., *The Discrete-Continuous, Global Optimisation of an Axial Flow Blood Pump*, Flow, Turbulence and Combustion 104, 777–793, 2020 **LINK**

[8] Tesch K., *Podstawy podstaw mechaniki płynów*, online, Gdańsk, 2020 **LINK**

Podstawowe równania

Bioreologia

Przykładowe rozwiązania analityczne

Analogia mechaniczno-elektryczna

Sieci naczyń

Prawa Murraya

Wieloskalowe modelowanie przepływów krwi

Urządzenia do wspomagania krążenia

Przepływy w układzie oddechowym

Laboratorium

Literatura