Mechanika Płynów (15 h)

Krzysztof Tesch

WIMiO
Politechnika Gdańska

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Operator nabla i gradient

Wektor, np. wektor prędkości

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + u_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + u_z \hat{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Wektorowy operator różniczkowy ∇ (nabla)

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\imath}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Gradient funkcji skalarnej f

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{\imath}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Dywergencja wektora $\mathbf{u}$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_x & u_y & u_z\end{pmatrix} = \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{4}$$

Rotacja wektora $\mathbf{u}$

$$\nabla\times\mathbf{u} = \begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}+ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{5}$$

Operatory podwójne

	∇f	$\nabla \cdot \mathbf{u}$	$\nabla \times \mathbf{u}$
∇	tensor	wektor	tensor
$\nabla\cdot$	skalar	—	skalar
$\nabla\times$	wektor	—	wektor

Operatory podwójne

	∇f	$\nabla \cdot \mathbf{u}$	$\nabla \times \mathbf{u}$
∇	$\nabla\nabla f$	$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$	$\nabla(\nabla \times \mathbf{u})$
$\nabla\cdot$	$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$	—	$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$
$\nabla\times$	$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$	—	$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$

Operatory podwójne

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\hat{\boldsymbol{k}} =$$

$$0\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 0\hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Operatory podwójne

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} = 0 \qquad (7)$$

Operatory podwójne

Hesjan

$$\nabla\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Laplasjan

$$\nabla \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f \tag{10}$$

Pochodna substancjalna

$$\mathrm{d}f(t,x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \quad (11)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial z} \quad (12)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_x\frac{\partial f}{\partial x} + u_y\frac{\partial f}{\partial y} + u_z\frac{\partial f}{\partial z} \quad (13)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla f \quad (14)$$

Przyspieszenie

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla \mathbf{u} \quad (15)$$

Wstęp

Mechanika Płynów

- Co to jest płyn?
- Czym się zajmuje mechanika płynów?
- Obszary zastosowań $\longrightarrow$
- Mechanika a mechanika płynów $\longrightarrow$

Obszary zastosowań

- Turbiny wodne i pompy
- Turbiny parowe, gazowe, wiatrowe
- Sprężarki, wentylatory, dmuchawy
- Rurociągi i aparatura chemiczna
- Pojazdy, samoloty, statki
- Budowle hydrotechniczne i naziemne
- Wymiana ciepła, klimatyzacja, wentylacja
- Biomechanika/bioreologia i aparatura medyczna
- Meteorologia
- Grafika komputerowa/efekty specjalne
- Gry komputerowe...

Mechanika a mechanika płynów

Mechanika ($\mu\eta\chi\alpha\nu\iota\kappa\eta$):

- Mechanika kwantowa
- Mechanika klasyczna
  - Mechanika ogólna
  - Mechanika kontinuum
    - Mechanika ciała stałego
      - Sprężystość
      - Plastyczność
    - Mechanika płynów
      - Hydrodynamika
      - Aerodynamika
      - (Bio)reologia
      - **Teoretyczna mechanika płynów**
      - **Eksperymentalna mechanika płynów**
      - *Numeryczna mechanika płynów*

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy
  - pędu
  - momentu pędu
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
  - ...
  - ...

Kontinuum

- Postulat kontinuum
- Ciągłość

$$\mathrm{Kn} = \frac{l_0}{l} \ll 1 \tag{16}$$

- Płynność

$$\frac{t_0}{t} \ll 1 \tag{17}$$

- Element płynu – najmniejsza część ośrodka, która spełnia warunek płynności
- Gęstość

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \tag{18}$$

Kinematyka

Kinematyczny podział przepływów

Przepływy:

- 1D
- 2D
- 3D

Ponadto

- stacjonarne ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- niestacjonarne ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$)

Linie i powierzchnie prądu

Linie, do których styczne są wektory prędkości $\mathbf{u}$.
Wektor styczny do linii prądu $\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix}$.
Zatem $\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, czyli

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} =$$

$$(u_z\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (u_x\,\mathrm{d}z - u_z\,\mathrm{d}x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (u_y\,\mathrm{d}x - u_x\,\mathrm{d}y)\,\hat{\boldsymbol{k}} = 0\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 0\hat{\boldsymbol{k}} \quad (19)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z} \quad (20)$$

Jeżeli przez dowolną krzywą, która nie jest linią prądu, poprowadzimy linie prądu, to otrzymamy powierzchnię prądu.

Linie i powierzchnie wirowe

Jeżeli wektor prędkości zastąpimy wektorem wirowości

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{21}$$

to analogicznie mamy rzuty linii wirowych

$$\frac{\mathrm{d}x}{\Omega_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\Omega_y} = \frac{\mathrm{d}z}{\Omega_z} \tag{22}$$

Analogicznie – jeżeli przez dowolną krzywą, która nie jest linią wirową, poprowadzimy linie wirowe, to otrzymamy powierzchnię wirową.

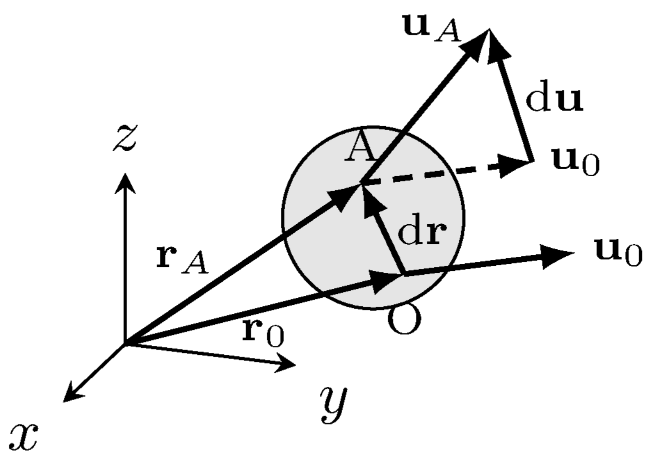
Wektorowe równanie trajektorii (torów) ma następującą postać

$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \tag{23}$$

W ogólnym przypadku linie prądu i trajektorie nie są tym samym. Jedne są tożsame z drugimi tylko dla przypadku stacjonarnego i niestacjonarnego jednowymiarowego.

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{24}$$

Opis ruchu elementu płynu



$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_0 + \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{25}$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \mathrm{d}\mathbf{u} \tag{26}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{27}$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{28}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \nabla \mathbf{u}\right)}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \mathbf{u}\right)}_{\mathbf{A}} \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}\right)^{\mathrm{T}} = \nabla \mathbf{u} \tag{30}$$

Opis ruchu elementu płynu

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{32}$$

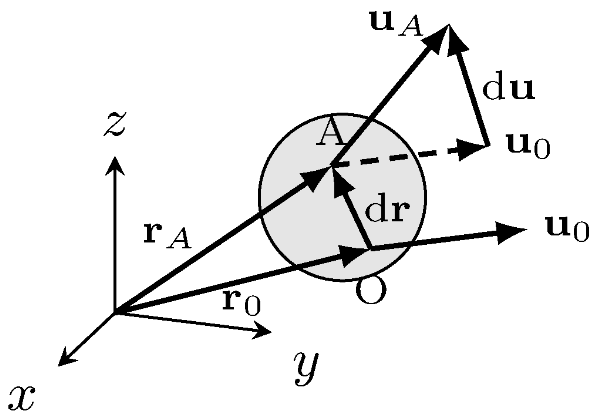
$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \nabla \mathbf{u}\right) \tag{33}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \mathbf{u}\right) \tag{34}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Opis ruchu elementu płynu



$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{37}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{D} + \mathbf{A} \tag{38}$$

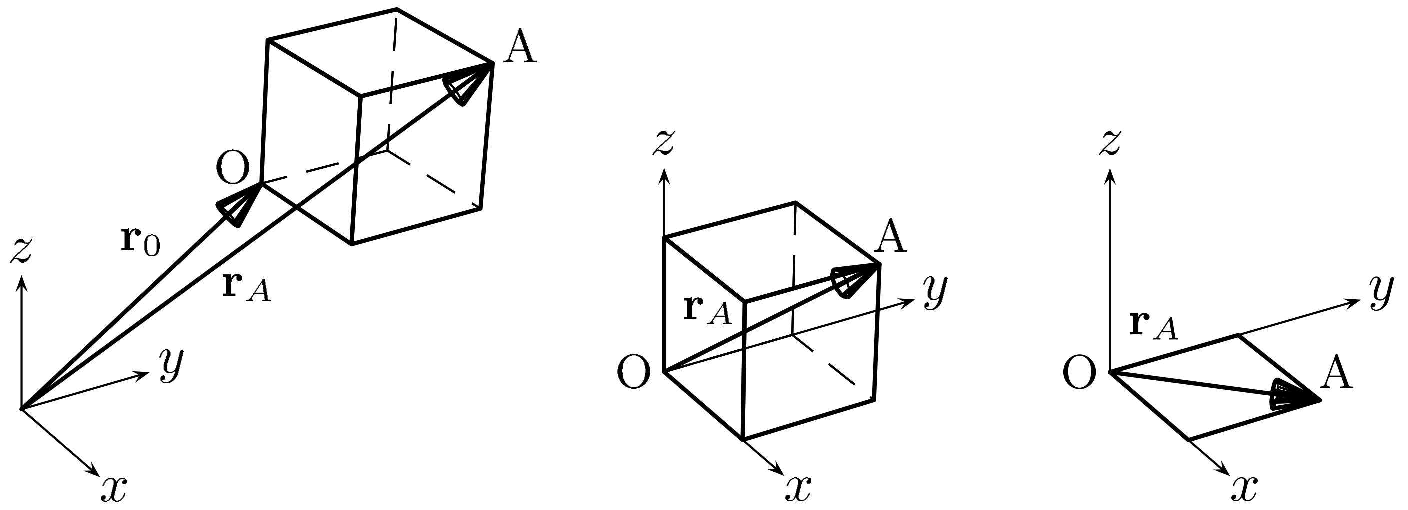
$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \mathbf{A}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \mathbf{D}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{39}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{40}$$

Ostatecznie

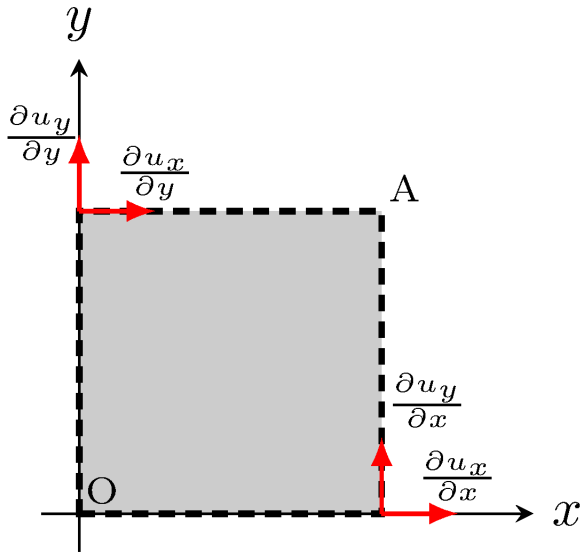
$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathrm{d}\mathbf{r} + \mathbf{D}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{41}$$

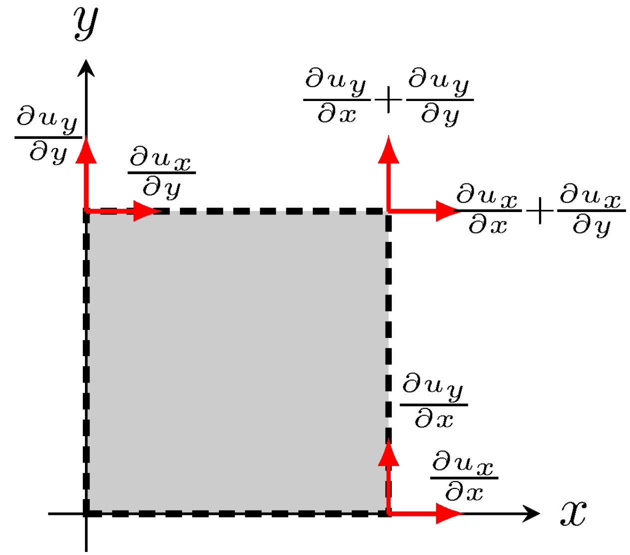
Interpretacja fizyczna składowych tensorów



Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{42}$$

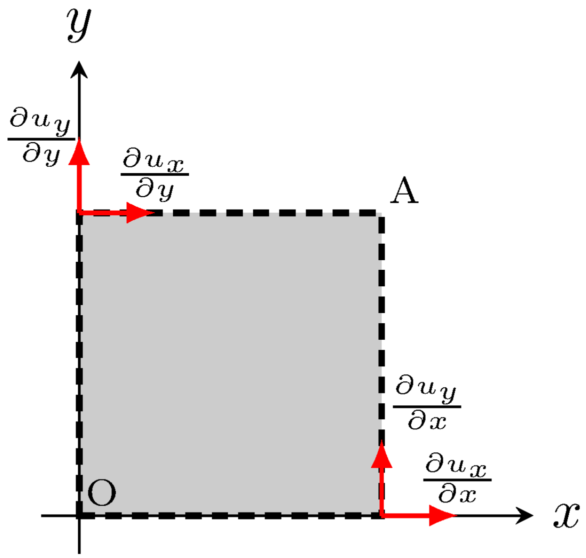




Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

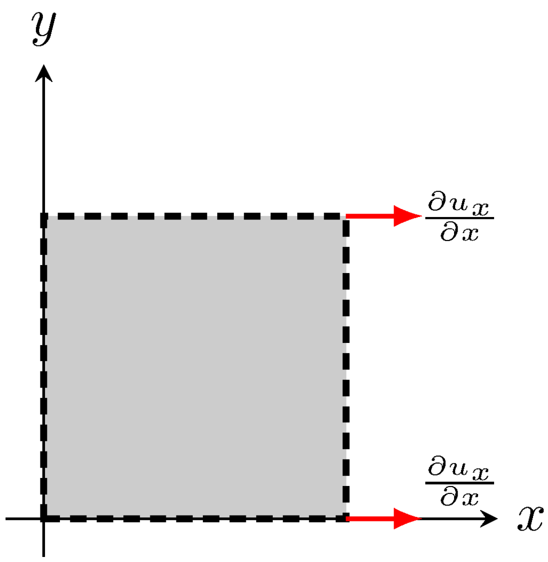


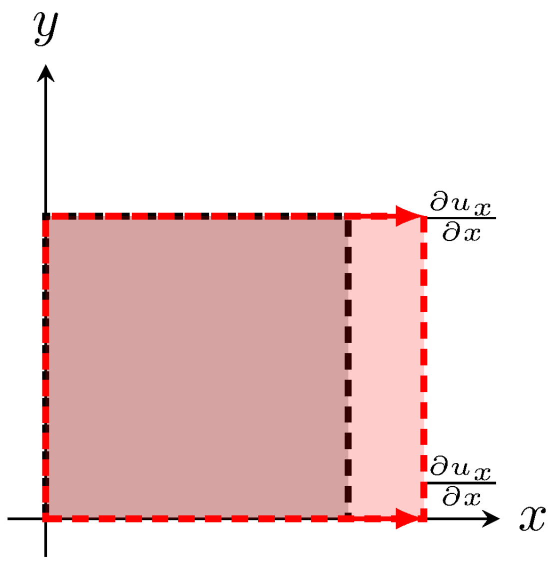
Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$\frac{\partial u_x}{\partial x} > 0$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$



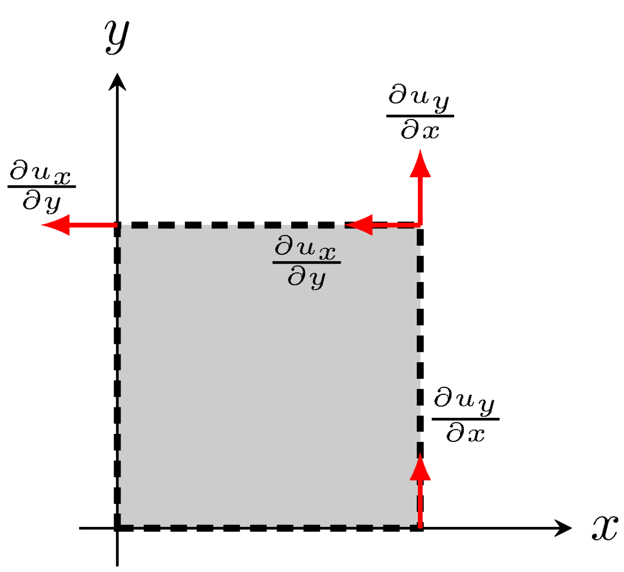


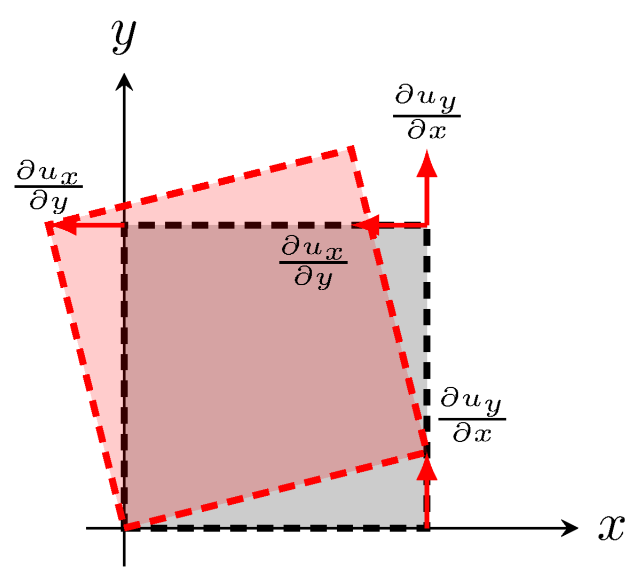
Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$$-\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$



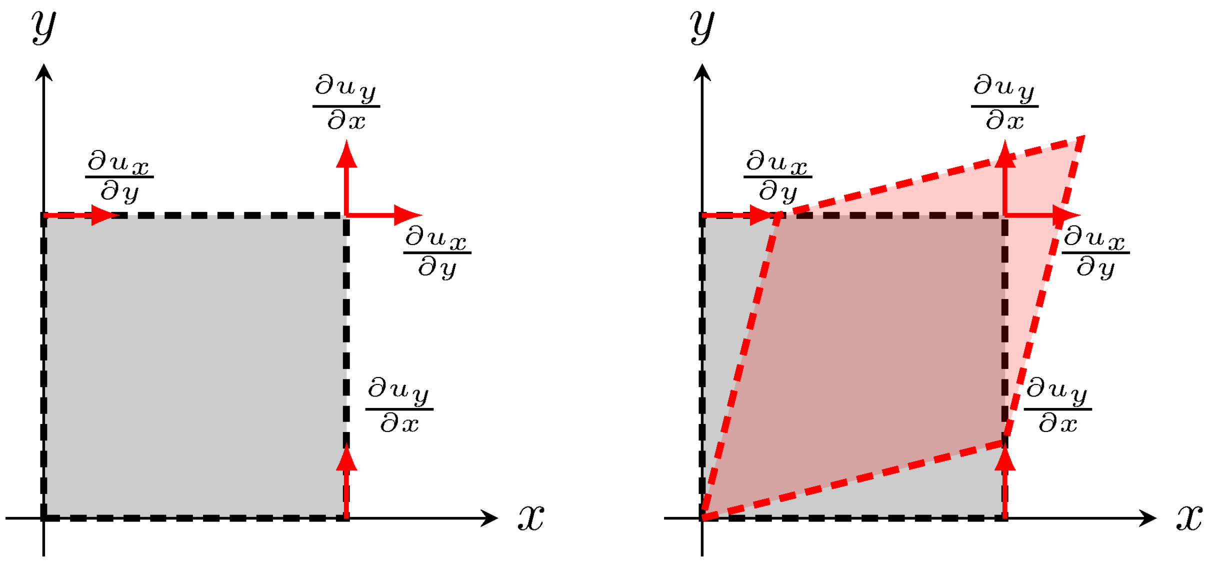


Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$



Interpretacja fizyczna składowych tensorów

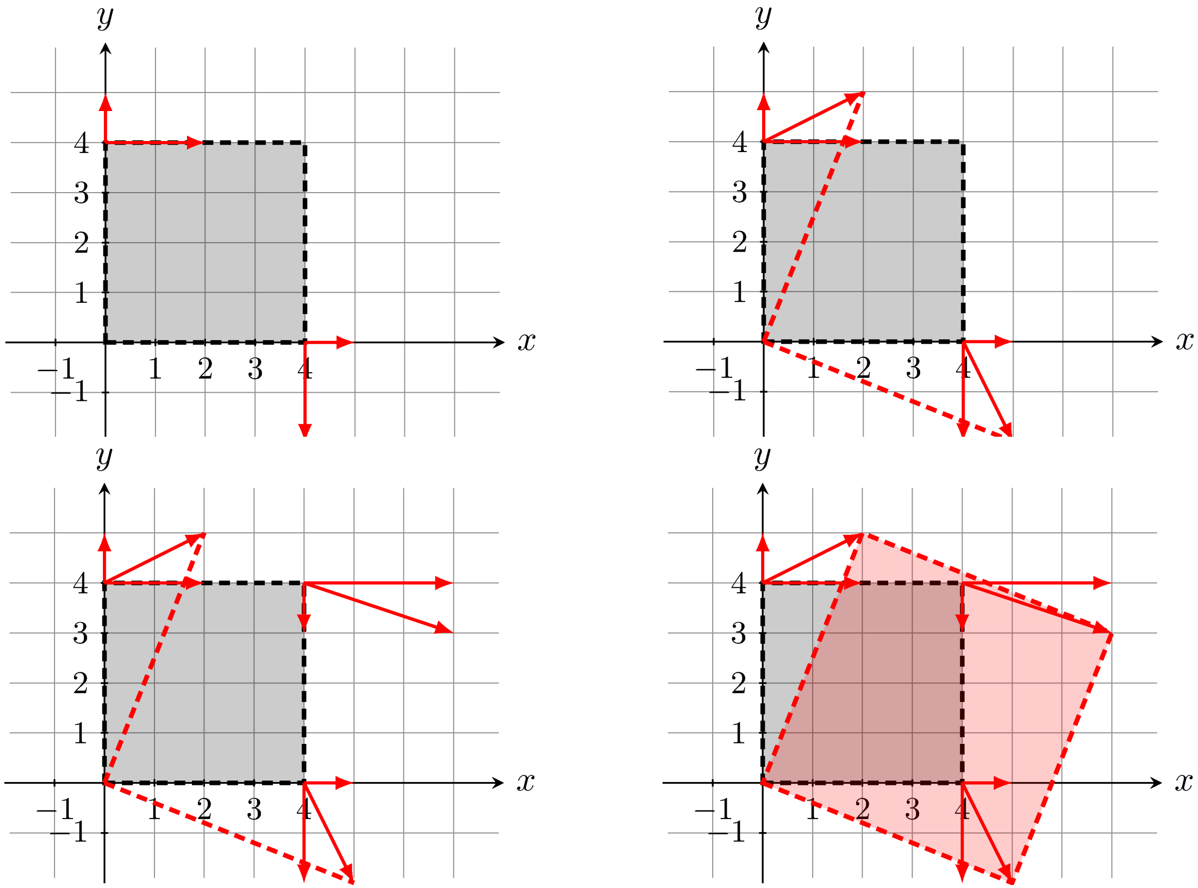
Prędkości:

- deformacji objętościowych $\frac{\partial u_x}{\partial x}, \ldots$
- deformacji postaciowych $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \ldots$
- obrotowe $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \ldots$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Przykład

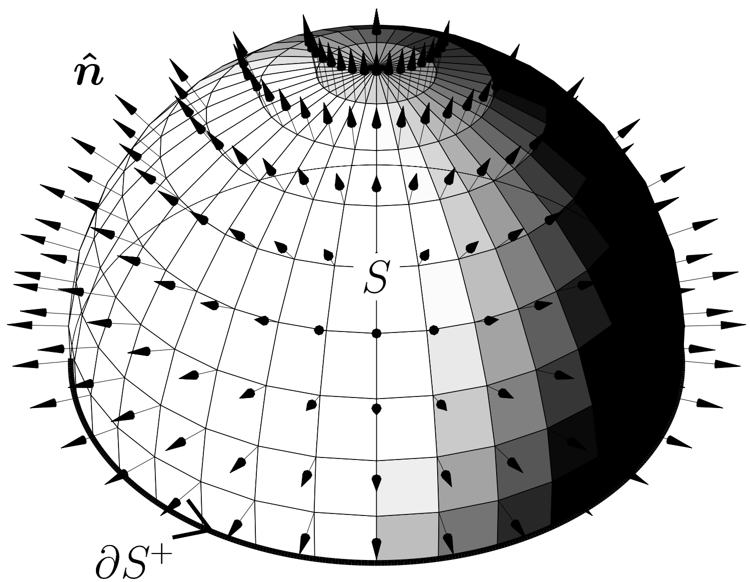
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (52)$$



Wzór Stokesa

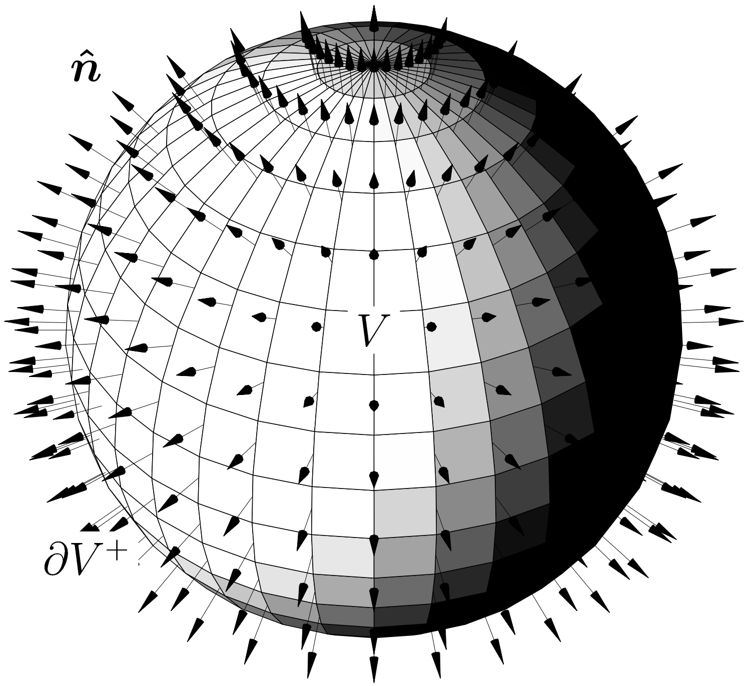
$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})\, \mathrm{d}S \tag{53}$$

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{54}$$



$$\oiint_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \tag{55}$$

$$\oiint_{\partial V^+} \mathbf{u} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \tag{56}$$



Hydrodynamiczna interpretacja wzorów

Twierdzenie Newtona-Leibniza

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \tag{57}$$

Twierdzenie Stokesa

$$\underbrace{\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}_{\text{cyrkulacja}} = \underbrace{\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{u})}_{\text{wirowość}}\,\mathrm{d}S}_{\text{strumień}} \tag{58}$$

Twierdzenie Gaussa

$$\underbrace{\oiint_{\partial V^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\text{strumień}} = \iiint_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u}}_{\text{źródłowość}}\,\mathrm{d}V \tag{59}$$

I tw. Helmholtza o wirowości

Wzór Stokesa

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})\, \mathrm{d}S \tag{60}$$

Cyrkulacja

$$\Gamma = \oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{61}$$

Wirowość

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{62}$$

Wzór Stokesa

$$\Gamma = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}S = \iint_S \Omega_n\, \mathrm{d}S = \bar{\Omega}_n |S| \tag{63}$$

I tw. Helmholtza o wirowości

Tożsamość (7)

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0 \tag{64}$$

przy użyciu wektora wirowości (21)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \tag{65}$$

Całkując obustronnie

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} \, \mathrm{d}V = 0 \tag{66}$$

i wykorzystując twierdzenie Gaussa

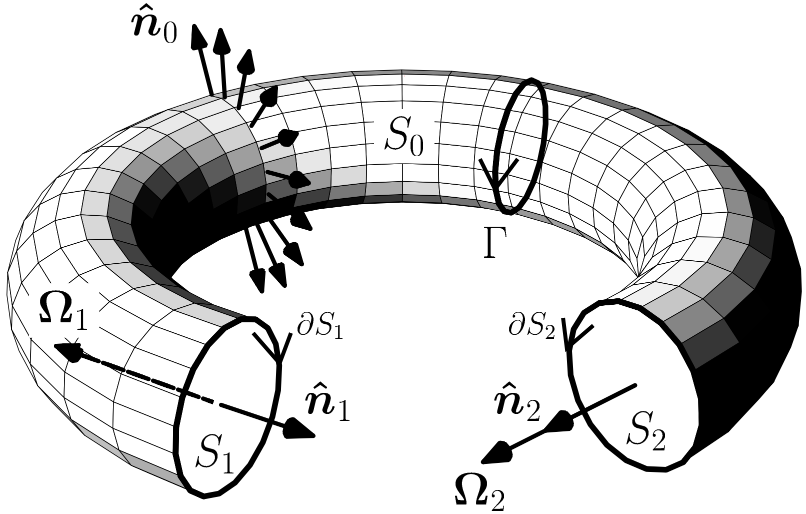
$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} \, \mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{67}$$

I tw. Helmholtza o wirowości

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{68}$$

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, \mathrm{d}S =$$

$$\underbrace{\iint\limits_{S_0} \hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}_0 \, \mathrm{d}S}_{=0, \quad \hat{\boldsymbol{n}}_0 \perp \boldsymbol{\Omega}_0} + \iint\limits_{S_1} \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_1 \, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \hat{\boldsymbol{n}}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_2 \, \mathrm{d}S = 0 \tag{69}$$



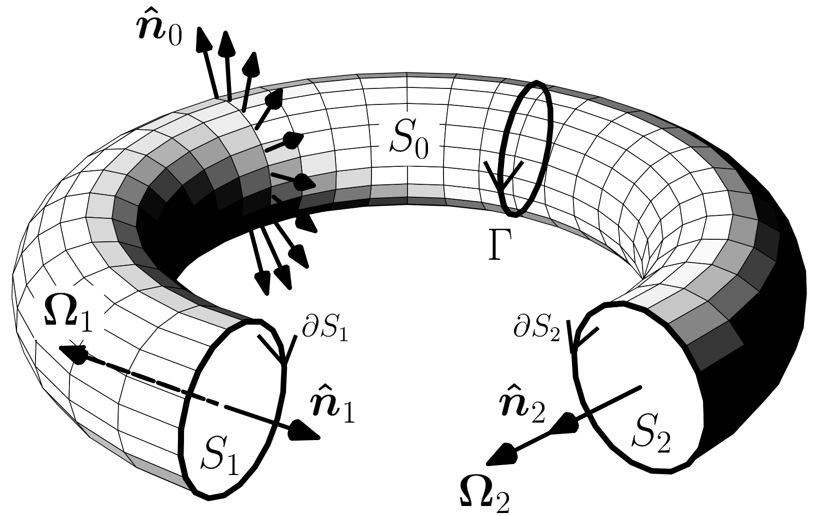
I tw. Helmholtza o wirowości

$$\iint\limits_{S_1} \underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_1}_{<0} \,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_2}_{>0} \,\mathrm{d}S = 0 \tag{70}$$

$$-\iint\limits_{S_1} \Omega_{1n} \,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \Omega_{2n} \,\mathrm{d}S = 0 \tag{71}$$

$$\bar{\Omega}_{1n}|S_1| = \bar{\Omega}_{2n}|S_2| = \mathrm{const} \tag{72}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \mathrm{const} \tag{73}$$



Twierdzenie Reynoldsa o transporcie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho f \,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V f\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\mathrm{d}V \tag{74}$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho f \,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \frac{\partial(\rho f)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot(\rho f\mathbf{u})\,\mathrm{d}V \tag{75}$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho f \,\mathrm{d}V = \underbrace{\iiint\limits_V \frac{\partial(\rho f)}{\partial t}\,\mathrm{d}V}_{\text{zamiany wew. } V} + \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+} \rho f\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S}_{\text{strumień przez } \partial V} \tag{76}$$

Równanie zachowania masy

$$m = \iiint\limits_V \rho \, \mathrm{d}V \tag{77}$$

$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint\limits_V \rho \, \mathrm{d}V = 0 \tag{78}$$

Za pomocą twierdzenia (74) dla $f = 1$ mamy

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathrm{d}V = 0 \tag{79}$$

czyli pierwsza postać

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{80}$$

Równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}V = 0 \tag{81}$$

Za pomocą twierdzenia (75) dla $f = 1$ mamy

$$\iiint\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{82}$$

czyli druga postać

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{83}$$

Równnie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}V = 0 \qquad (84)$$

Za pomocą twierdzenia (76) dla $f = 1$ mamy trzecią (całkową) postać

$$\underbrace{\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V}_{\text{zamiany wew. } V} + \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+} \rho\boldsymbol{\hat{n}}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S}_{\text{strumień przez } \partial V} = 0 \qquad (85)$$

Równnie zachowania masy

Różniczkowe postaci równania zachowania masy:

- pierwsza
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$
- druga
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$$

Druga postać

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \qquad (86)$$

Niewiadome ρ, u_x, u_y, u_z

Równanie zachowania masy – uproszczenia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{87}$$

- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{88}$$

  Niewiadome ρ, u_x, u_y, u_z

- $\rho = \mathrm{const}$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{89}$$

  Niewiadome u_x, u_y, u_z

- $\rho = \mathrm{const}$ i potencjalność
  $\mathbf{u} = \nabla \varphi \iff \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \tag{90}$$

  Niewiadoma φ

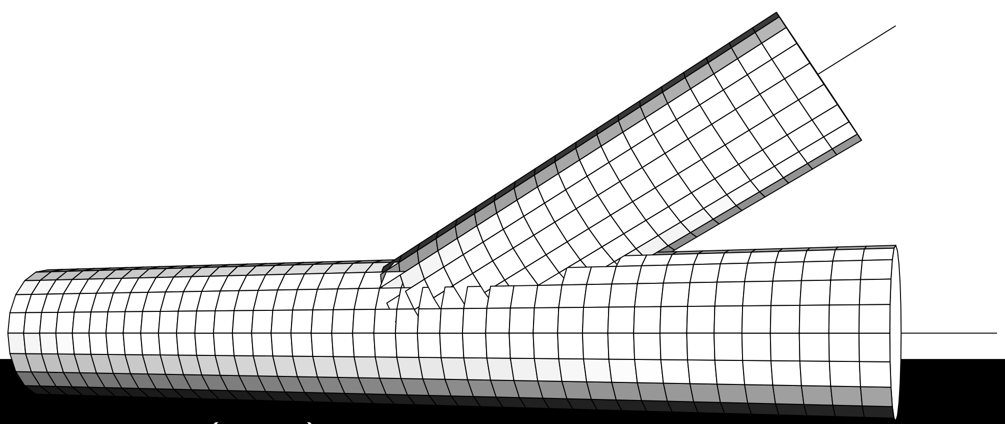
Równanie zachowania masy – interpretacja

Całkowa postać równania zachowania masy (85)

$$\underbrace{\iiint\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V}_{\text{zamiany wew. } V} + \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^{+}} \rho \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}S}_{\text{strumień przez } \partial V} = 0 \tag{91}$$

przy założeniu stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\oiint\limits_{\partial V^{+}} \rho \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{92}$$

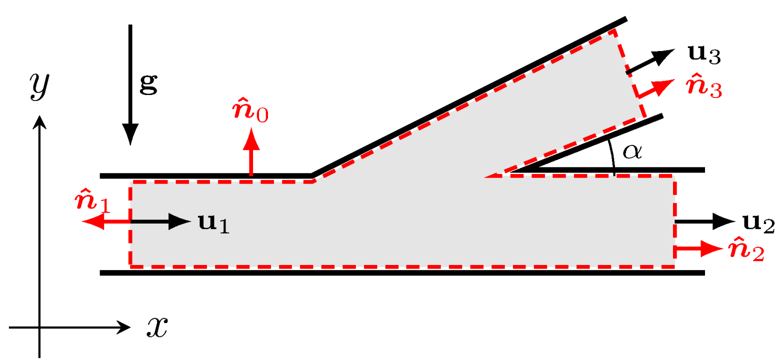


Równanie zachowania masy – interpretacja

$$\oiint_{\partial V^+} \rho \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{93}$$

$$\underbrace{\iint_{S_0} \rho_0 \hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \, \mathrm{d}S}_{=0, \quad \hat{\boldsymbol{n}}_0 \perp \mathbf{u}_0} + \iint_{S_1} \underbrace{\rho_1 \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \mathbf{u}_1}_{<0} \, \mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_2} \underbrace{\rho_2 \hat{\boldsymbol{n}}_2 \cdot \mathbf{u}_2}_{>0} \, \mathrm{d}S + \iint_{S_3} \underbrace{\rho_3 \hat{\boldsymbol{n}}_3 \cdot \mathbf{u}_3}_{>0} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{94}$$



Równanie zachowania masy – interpretacja

$$-\iint\limits_{S_1} \rho_1\, u_{1n}\, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \rho_2\, u_{2n}\, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_3} \rho_3\, u_{3n}\, \mathrm{d}S = 0 \tag{95}$$

Średnia prędkość

$$\bar{u}_n = \frac{\iint\limits_S u_n\, \mathrm{d}S}{\iint\limits_S \mathrm{d}S} = \frac{\iint\limits_S u_n\, \mathrm{d}S}{|S|} \tag{96}$$

Średnia gęstość

$$\bar{\rho} = \frac{\iint\limits_S \rho\, u_n\, \mathrm{d}S}{\iint\limits_S u_n\, \mathrm{d}S} = \frac{\iint\limits_S \rho\, u_n\, \mathrm{d}S}{\bar{u}_n |S|} \tag{97}$$

Równanie zachowania masy – interpretacja

$$-\bar{\rho}_1\bar{u}_{1n}|S_1| + \bar{\rho}_2\bar{u}_{2n}|S_2| + \bar{\rho}_3\bar{u}_{3n}|S_3| = 0 \qquad (98)$$

Jednostka

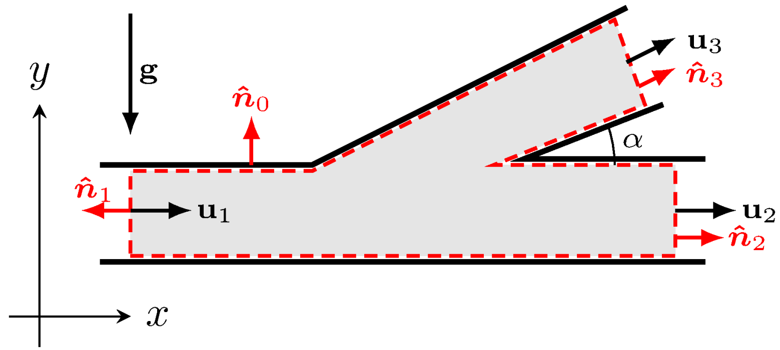
$$[\bar{\rho}\bar{u}_n|S|] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \qquad (99)$$

Masowe natężenia przepływu

$$\dot{m} = \bar{\rho}\bar{u}_n|S| \qquad (100)$$

Ostatecznie

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \qquad (101)$$



Równanie zachowania masy – interpretacja

Jeżeli gęstość jest stała

$$-\bar{u}_{1n}|S_1| + \bar{u}_{2n}|S_2| + \bar{u}_{3n}|S_3| = 0 \tag{102}$$

Jednostka

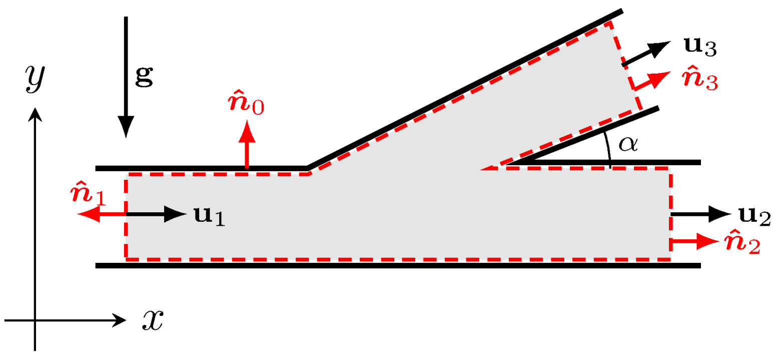
$$[\bar{u}_n|S|] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \tag{103}$$

Objętościowe natężenia przepływu

$$\dot{V} = \bar{u}_n|S| \tag{104}$$

Ostatecznie

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \tag{105}$$



Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu
  - momentu pędu
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
  - ...
  - ...

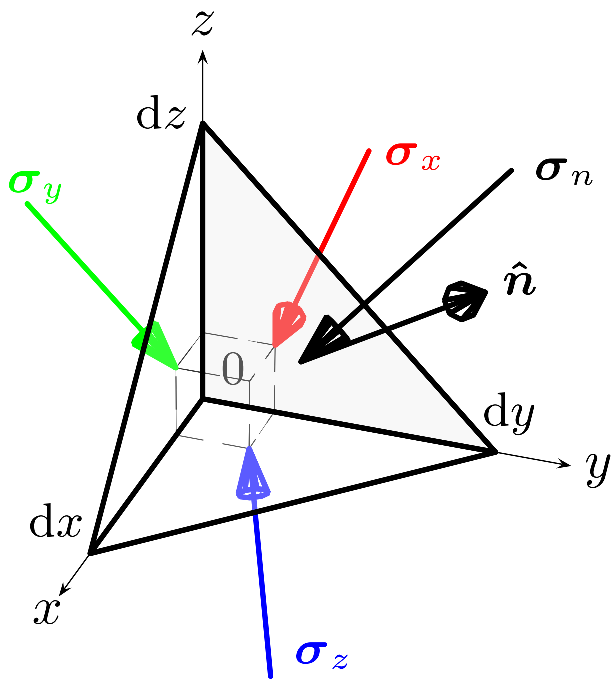
Dynamika

Dwa rodzaje sił:

- masowe

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_V}{\mathrm{d}V} \tag{106}$$

- powierzchniowe

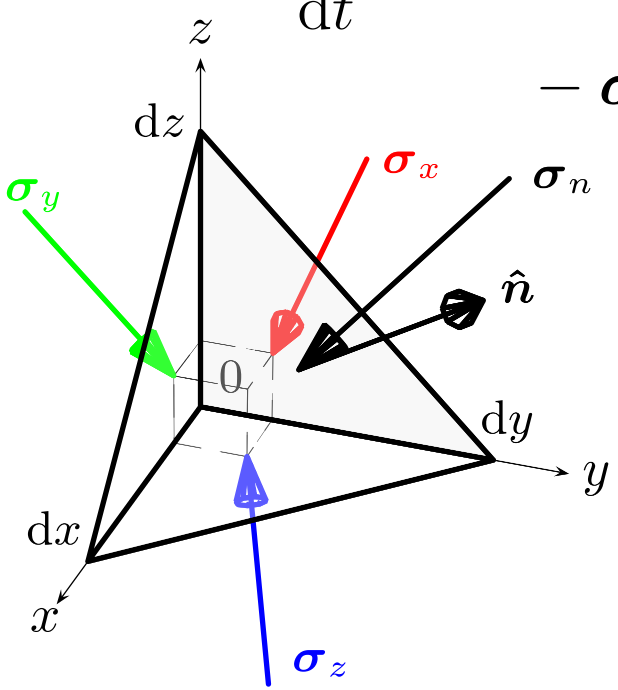


$$\boldsymbol{\sigma}_n = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_S}{\mathrm{d}S} \tag{107}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Analiza wymiarowa
Literatura

Siły działające na elementarny czworościan

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V = \rho \mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S - \boldsymbol{\sigma}_x\,\mathrm{d}D_{yz} - \boldsymbol{\sigma}_y\,\mathrm{d}D_{xz} - \boldsymbol{\sigma}_z\,\mathrm{d}D_{xy} \quad (108)$$



$$\mathrm{d}V \sim \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad (109)$$

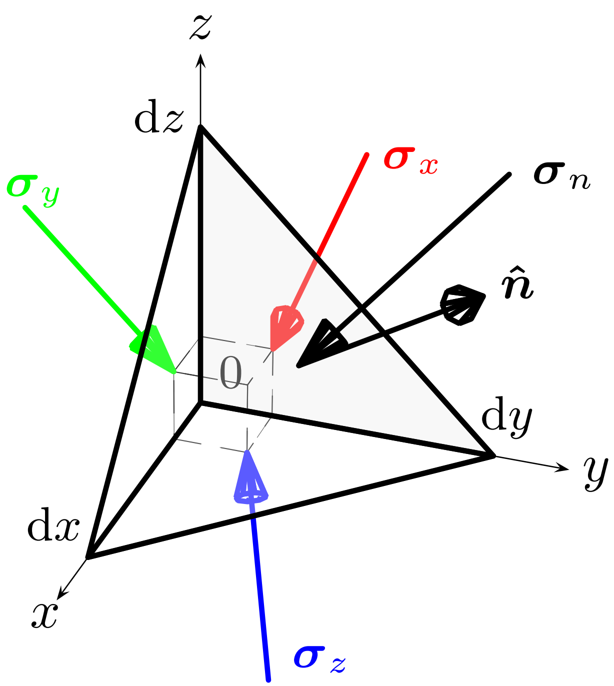
$$\mathrm{d}D_{xy} \sim \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (110)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{\sigma}_x\,\mathrm{d}D_{yz} + \boldsymbol{\sigma}_y\,\mathrm{d}D_{xz} + \boldsymbol{\sigma}_z\,\mathrm{d}D_{xy} \quad (111)$$

Siły i stan naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma}_n \,\mathrm{d}S = \boldsymbol{\sigma}_x \,\mathrm{d}D_{yz} + \boldsymbol{\sigma}_y \,\mathrm{d}D_{xz} + \boldsymbol{\sigma}_z \,\mathrm{d}D_{xy} \tag{112}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} \tag{113}$$



$$\hat{\boldsymbol{n}} = n_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + n_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + n_z \hat{\boldsymbol{k}} \tag{114}$$

$$\mathrm{d}D_{xy} = n_z \,\mathrm{d}S \tag{115}$$

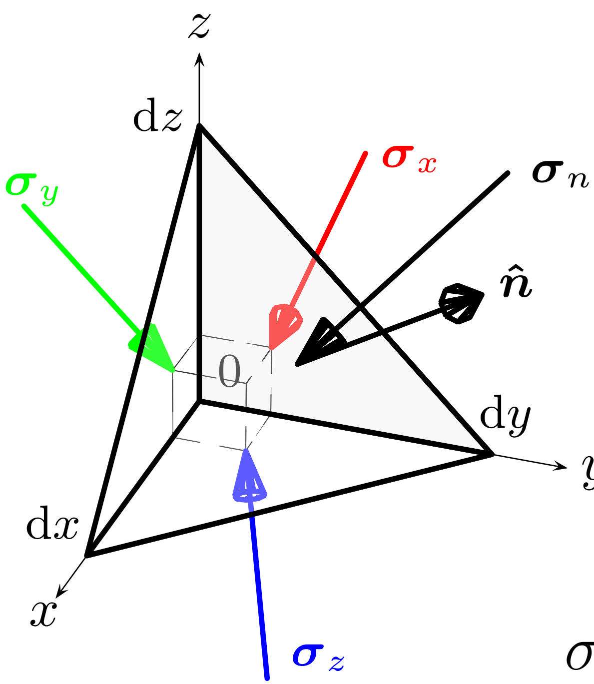
$$\mathrm{d}D_{xz} = n_y \,\mathrm{d}S \tag{116}$$

$$\mathrm{d}D_{yz} = n_x \,\mathrm{d}S \tag{117}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = n_x \boldsymbol{\sigma}_x + n_y \boldsymbol{\sigma}_y + n_z \boldsymbol{\sigma}_z \tag{118}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = n_x \boldsymbol{\sigma}_x + n_y \boldsymbol{\sigma}_y + n_z \boldsymbol{\sigma}_z \tag{119}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{nx} \hat{\boldsymbol{\imath}} + \sigma_{ny} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \sigma_{nz} \hat{\boldsymbol{k}} \tag{120}$$



$$\boldsymbol{\sigma}_x = \sigma_{xx} \hat{\boldsymbol{\imath}} + \sigma_{xy} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \sigma_{xz} \hat{\boldsymbol{k}} \tag{121}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \sigma_{yx} \hat{\boldsymbol{\imath}} + \sigma_{yy} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \sigma_{yz} \hat{\boldsymbol{k}} \tag{122}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \sigma_{zx} \hat{\boldsymbol{\imath}} + \sigma_{zy} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \sigma_{zz} \hat{\boldsymbol{k}} \tag{123}$$

$$\sigma_{nx} = n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx} + n_z \sigma_{zx} \tag{124}$$

$$\sigma_{ny} = n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy} \tag{125}$$

$$\sigma_{nz} = n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz} \tag{126}$$

To samo w zapisie macierzowym

$$\begin{pmatrix}\sigma_{nx} & \sigma_{ny} & \sigma_{nx}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n_x & n_y & n_z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \tag{127}$$

Wzór Cauchy'ego

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{128}$$

Tensor naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \tag{129}$$

Równanie zachowania pędu

Siły

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_V = \rho \mathbf{f}\,\mathrm{d}V, \quad \mathrm{d}\mathbf{F}_S = \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \tag{130}$$

Sformułowanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \tag{131}$$

Wzór Cauchy'ego

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{132}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S \tag{133}$$

Równanie zachowania pędu

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V}_{\text{tw. Reynoldsa (74)}} = \iiint_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \underbrace{\oiint_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S}_{\text{tw. Gaussa}} \quad (134)$$

$$\iiint_V \rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V + \iiint_V \mathbf{u}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\mathbf{u}\right)}_{\text{r.z.m.}=0}\mathrm{d}V = \iiint_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V \quad (135)$$

Równanie zachowania pędu

Pierwsza postać całkowa

$$\iiint_V \rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V \tag{136}$$

Postać różniczkowa

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{137}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{138}$$

Jedno równanie wektorowe (trzy równania skalarne). Dodatkowe niewiadome σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yx}, σ_{yy}, σ_{yz}, σ_{zx}, σ_{zy}, σ_{zz} oprócz dotychczasowych ρ, u_x, u_y, u_z

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V} \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V}_{\text{tw. Reynoldsa (76)}} = \iiint\limits_{V} \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^{+}} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S \tag{139}$$

Druga postać całkowa

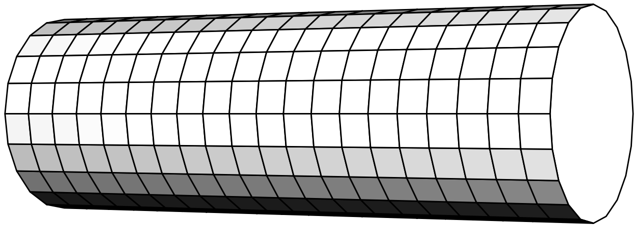
$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^{+}} \rho\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_{V} \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^{+}} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S \tag{140}$$

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$\iiint\limits_V \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}}_{\text{Cauchy}}\,\mathrm{d}S \quad (141)$$

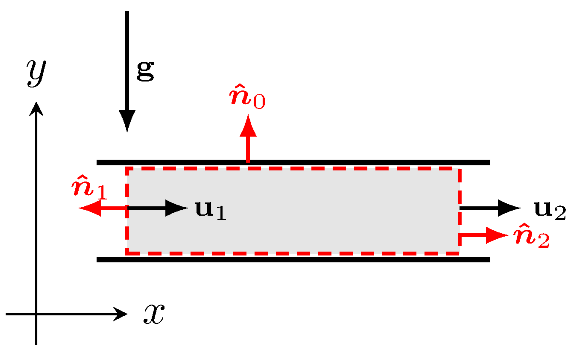
Założenie stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \quad (142)$$



Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$\underbrace{\oiint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S}_{?} = \iiint_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \qquad (143)$$



$$\oiint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_0} \underbrace{\rho_0\mathbf{u}_0\mathbf{u}_0\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_0}_{=\mathbf{0},\quad \hat{\boldsymbol{n}}_0\perp\mathbf{u}_0}\,\mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_1} \rho_1\mathbf{u}_1\,\underbrace{\mathbf{u}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1}_{<0}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho_2\mathbf{u}_2\,\underbrace{\mathbf{u}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2}_{>0}\,\mathrm{d}S =$$

$$-\iint_{S_1} \rho_1\mathbf{u}_1 u_{1n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho_2\mathbf{u}_2 u_{2n}\,\mathrm{d}S \qquad (144)$$

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$\oiint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = - \iint_{S_1} \rho_1 \mathbf{u}_1 u_{1n} \, \mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho_2 \mathbf{u}_2 u_{2n} \, \mathrm{d}S \quad (145)$$

Średni wektor prędkości

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\iint_S \rho \mathbf{u} u_n \, \mathrm{d}S}{\iint_S \rho u_n \, \mathrm{d}S} = \frac{\iint_S \rho \mathbf{u} u_n \, \mathrm{d}S}{\dot{m}} \quad (146)$$

pozwala zapisać

$$\oiint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = -\dot{m}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2 \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (147)$$

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$-\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2 = \underbrace{\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V}_{?} + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \tag{148}$$

Gęstość rozkładu sił masowych $\mathbf{f}$ sprowadza się do wektora grawitacji $\mathbf{g}$

$$\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{g}\,\mathrm{d}V = \mathbf{g}\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}V = \mathbf{g}M \tag{149}$$

co pozwala zapisać

$$-\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g}M + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \tag{150}$$

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$-\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1+\dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2=\mathbf{g}M+\underbrace{\oiint_{\partial V^+}\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S}_{?} \tag{151}$$

Dekompozycja wektora naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma}_n=\boldsymbol{\sigma}_{nn}+\boldsymbol{\sigma}_{nt} \tag{152}$$

daje

$$\oiint_{\partial V^+}\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S=\underbrace{\iint_{S_0}\left(\boldsymbol{\sigma}_{nn0}+\boldsymbol{\sigma}_{nt0}\right)\,\mathrm{d}S}_{=\mathbf{R}_0}+$$

$$\iint_{S_1}(\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nn1}}_{=-\sigma_{nn1}\hat{\boldsymbol{n}}_1}+\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nt1}}_{\approx\mathbf{0}})\,\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nn2}}_{=-\sigma_{nn2}\hat{\boldsymbol{n}}_2}+\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nt2}}_{\approx\mathbf{0}})\,\mathrm{d}S=$$

$$\mathbf{R}_0-\hat{\boldsymbol{n}}_1\iint_{S_1}p_1\,\mathrm{d}S-\hat{\boldsymbol{n}}_2\iint_{S_2}p_2\,\mathrm{d}S \tag{153}$$

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \, \mathrm{d}S = \mathbf{R}_0 - \hat{\boldsymbol{n}}_1 \iint_{S_1} p_1 \, \mathrm{d}S - \hat{\boldsymbol{n}}_2 \iint_{S_2} p_2 \, \mathrm{d}S \quad (154)$$

Średnie ciśnienie

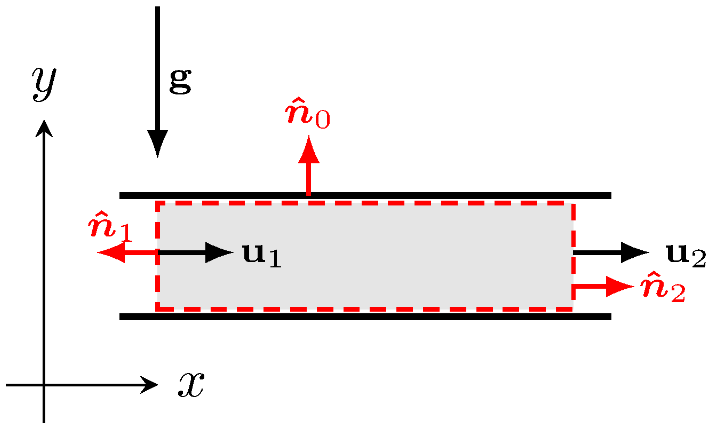
$$\bar{p} = \frac{\iint_S p \, \mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S} = \frac{\iint_S p \, \mathrm{d}S}{|S|} \quad (155)$$

prowadzi do

$$-\dot{m}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2 \bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g} M + \mathbf{R}_0 - \bar{p}_1 |S_1| \hat{\boldsymbol{n}}_1 - \bar{p}_2 |S_2| \hat{\boldsymbol{n}}_2 \quad (156)$$

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$-\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g}M + \mathbf{R}_0 - \bar{p}_1|S_1|\hat{\boldsymbol{n}}_1 - \bar{p}_2|S_2|\hat{\boldsymbol{n}}_2 \tag{157}$$



$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{u}_1\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{158}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{u}_2\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{159}$$

$$\mathbf{g} = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{160}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_1 = -\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{161}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_2 = \hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{162}$$

$$\begin{split}-\dot{m}_1\bar{u}_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dot{m}_2\bar{u}_2\hat{\boldsymbol{\imath}} = -gM\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \\ R_{0x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + R_{0y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \bar{p}_1|S_1|\hat{\boldsymbol{\imath}} - \bar{p}_2|S_2|\hat{\boldsymbol{\imath}}\end{split} \tag{163}$$

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$
\begin{aligned}
-\dot{m}_1\bar{u}_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dot{m}_2\bar{u}_2\hat{\boldsymbol{\imath}} = -gM\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \\
R_{0x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + R_{0y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \bar{p}_1|S_1|\hat{\boldsymbol{\imath}} - \bar{p}_2|S_2|\hat{\boldsymbol{\imath}}
\end{aligned}
\quad (164)
$$

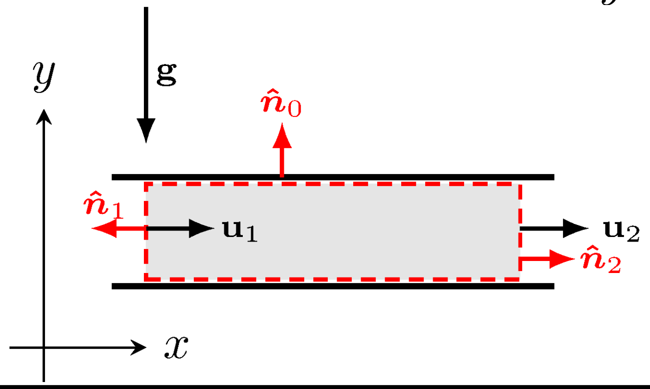
$$
-\dot{m}_1\bar{u}_1 + \dot{m}_2\bar{u}_2 = R_{0x} + \bar{p}_1|S_1| - \bar{p}_2|S_2| \quad (165)
$$

$$
0 = -gM + R_{0y} \quad (166)
$$

Jeżeli $|S_1| = |S_2| = |S|$, to $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ i $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$

$$
R_x = -R_{0x} = (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\,|S| \quad (167)
$$

$$
R_y = -R_{0y} = -gM \quad (168)
$$



Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
  - ...
  - ...

Równanie zachowania momentu pędu

Z równanie tego wynika, że

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{169}$$

Pozwala to zredukować liczbą niewiadomych o trzy ρ, u_x, u_y, u_z, σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yy}, σ_{yz}, σ_{zz}

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu (wniosek) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
  - ...
  - ...

Hipoteza Newtona

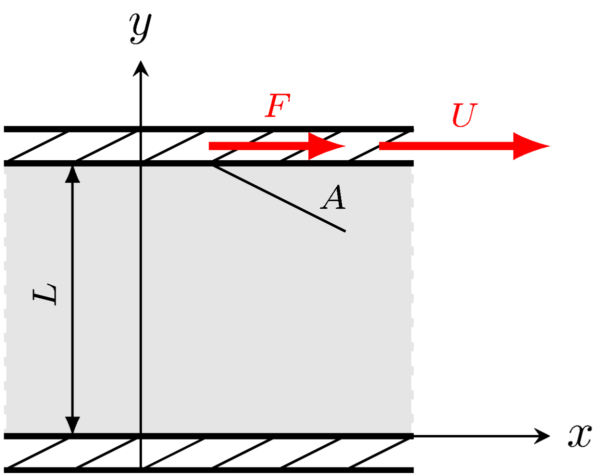
Dekompozycja na część odwracalną $-p_t\boldsymbol{\delta}$ i nieodwracalną (lepką) $\boldsymbol{\tau}$ w postaci

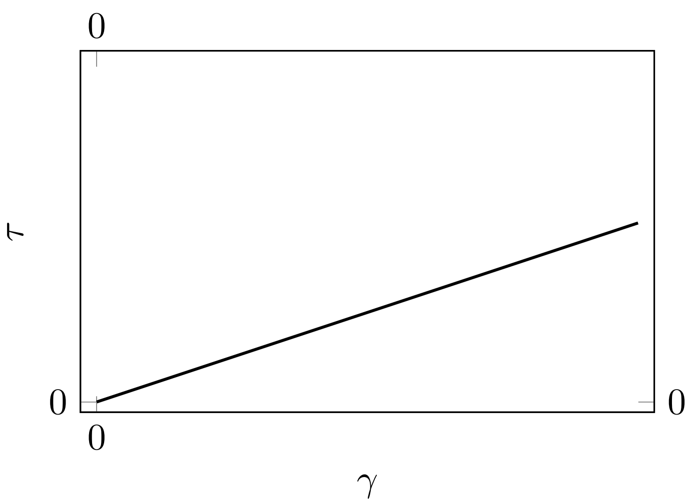
$$\boldsymbol{\sigma} = -p_t\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{170}$$

Poszukiwana jest zależność na tensor $\boldsymbol{\tau}$.
Hipoteza Newtona jest tzw. mechanicznym lub reologicznym równaniem konstytutywnym.
Ponieważ $\boldsymbol{\sigma}$ jest symetryczny, więc $\boldsymbol{\tau}$ jest również symetryczny

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \tag{171}$$

Hipoteza Newtona





$$\frac{F}{A} \sim \frac{U}{L} \tag{172}$$

$$\tau_{xy} \sim \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{173}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{174}$$

$$\tau = \mu \gamma \tag{175}$$

Hipoteza Newtona

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_t \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{176}$$

Najogólniej można zapisać, że lepka (nieodwracalna) część tensora naprężenia ma postać (dlaczego?)

$$\boldsymbol{\tau} = f(\nabla \mathbf{u}), \tag{177}$$

ale $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$, więc

$$\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{D}) \tag{178}$$

Najogólniejsza postać $\boldsymbol{\tau}$ wynika z twierdzenia Cayleya-Hamiltona

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 \tag{179}$$

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{D}$ ma postać

$$w(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{\delta} - \mathbf{D}| \tag{180}$$

czyli

$$w(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ & \lambda & 0 \\ & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ & D_{yy} & D_{yz} \\ & & D_{zz} \end{pmatrix} \right| \tag{181}$$

lub

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - D_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ & \lambda - D_{yy} & -D_{yz} \\ & & \lambda - D_{zz} \end{vmatrix} \tag{182}$$

lub ostatecznie

$$w(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{183}$$

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Wielomian charakterystyczny

$$w(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{184}$$

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona mówi, że $\mathbf{D}$ jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego

$$w(\mathbf{D}) = \mathbf{0} \tag{185}$$

lub

$$\mathbf{D}^3 + b_2\mathbf{D}^2 + b_1\mathbf{D} + b_0\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \tag{186}$$

skąd wynika (dlaczego?) najogólniejsza postać $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = a_0\boldsymbol{\delta} + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 \tag{187}$$

Hipoteza Newtona

Najogólniejsza postać $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 \tag{188}$$

i to samo po rozpisaniu

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + a_2 \mathbf{D}^2 \tag{189}$$

Hipoteza Newtona

$$
\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} +
$$

$$
a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + a_2 \mathbf{D}^2
$$

Dla pierwszego wiersza i drugiej kolumny mamy

$$
\tau_{xy} = a_0\, 0 + a_1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial u_y}{\partial x}}\right) + \left(a_2 \mathbf{D}^2\right)_{xy} \qquad (190)
$$

$$
\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \qquad (191)
$$

skąd wynika, że $a_1 = 2\mu$, $a_2 = 0$

Hipoteza Newtona

Najogólniejsza postać $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 \tag{192}$$

ale $a_1 = 2\mu$, $a_2 = 0$, więc

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D} \tag{193}$$

Skoro całkowity tensor naprężenia na postać

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_t \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{194}$$

zatem

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(-p_t + a_0\right) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D} \tag{195}$$

Nie znamy jednak a_0...

Hipoteza Newtona

Najogólniejsza postać tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p_t + a_0)\,\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{196}$$

Skoro obie strony (tensory) są sobie równe, więc równe muszą być ich niezmienniki

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = (-p_t + a_0)\operatorname{tr}\boldsymbol{\delta} + 2\mu\operatorname{tr}\mathbf{D} \tag{197}$$

Poszczególne niezmienniki mają postać $p = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{\delta} = 3$, $\quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = \nabla\cdot\mathbf{u}$, zatem

$$-3p = (-p_t + a_0)\,3 + 2\mu\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{198}$$

skąd wynika

$$-p_t + a_0 = -p - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{199}$$

Ostateczna postać tensora naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(-p - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{200}$$

Hipoteza Newtona

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(-p - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}$$

Tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ zapisany inaczej

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\underbrace{\left(\mathbf{D} - \boldsymbol{\delta}\tfrac{1}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)}_{\mathbf{D}^{\mathrm{D}}} \tag{201}$$

Ostatecznie dla płynów newtonowskich mamy

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{202}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{203}$$

lub dla płynów nieściśliwych $\mathbf{D}^{\mathrm{D}} = \mathbf{D}$ (dlaczego?)

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{204}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \tag{205}$$

Płyn i ciało stałe

Płyn	Ciało stałe
hipoteza Newtona	prawo Hooke'a
$\tau = \mu\gamma$	$\sigma = E\varepsilon$
$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{\left(-\frac{2}{3}\mu \operatorname{tr}\mathbf{D}\right)\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}}_{=2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}}$	$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\,\boldsymbol{\delta} + 2G\boldsymbol{\varepsilon}$
$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$	
	$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(-\frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}$

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu (wniosek) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
    - newtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}$
    - nienewtonowskie
  - ...
  - ...

Równania Naviera-Stokesa i Eulera

Równanie zachowania pędu

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{206}$$

Dekompozycja

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_t \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{207}$$

Równanie zachowania pędu po dekompozycji

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{208}$$

Równania Naviera-Stokesa i Eulera

Równanie zachowania pędu

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{209}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} \tag{210}$$

Hipoteza Newtona

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{211}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{212}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{213}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \tag{214}$$

Równanie N.-S. = r.z.p. + h.N.

Równania Naviera-Stokesa i Eulera

- $\rho = \text{var}, \ \mu = \text{var}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \left(2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}}\right) \tag{215}$$

- $\rho = \text{const}, \ \mu = \text{var}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{216}$$

- $\rho = \text{var}, \ \mu = \text{const}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \tfrac{1}{3}\mu \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) \tag{217}$$

- $\rho = \text{const}, \ \mu = \text{const}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{218}$$

- $\mu = 0$ równanie Eulera

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p \tag{219}$$

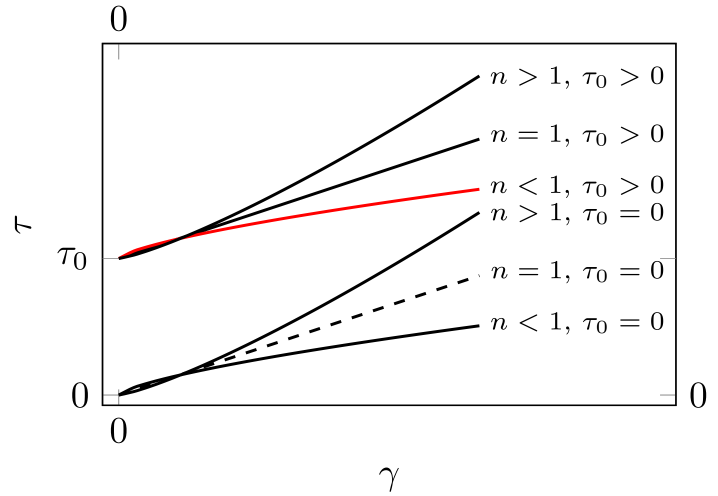
Płyny nienewtonowskie

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D} \tag{220}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu(\gamma)\mathbf{D} \tag{221}$$

Krzywa płynięcia

$$\tau = \mu(\gamma)\gamma \tag{222}$$



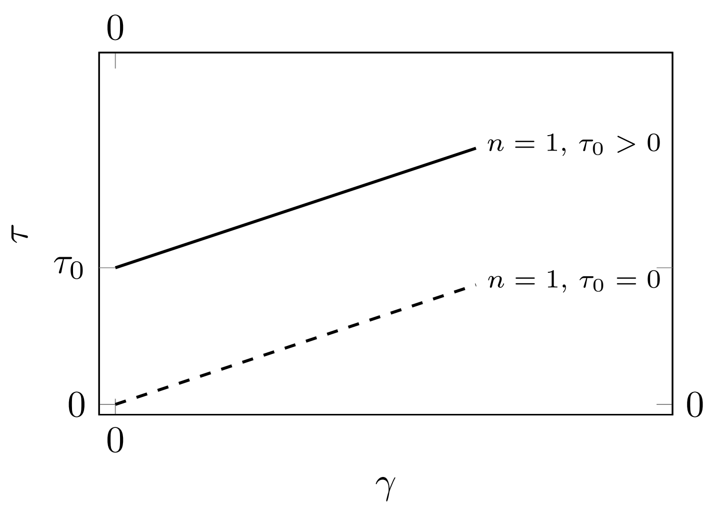
Model Binghama

$$\tau = \tau_0 + k\gamma \tag{223}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau_0}{|\gamma|} + k \tag{224}$$

k – stała konsystencji

τ_0 – granica płynięcia

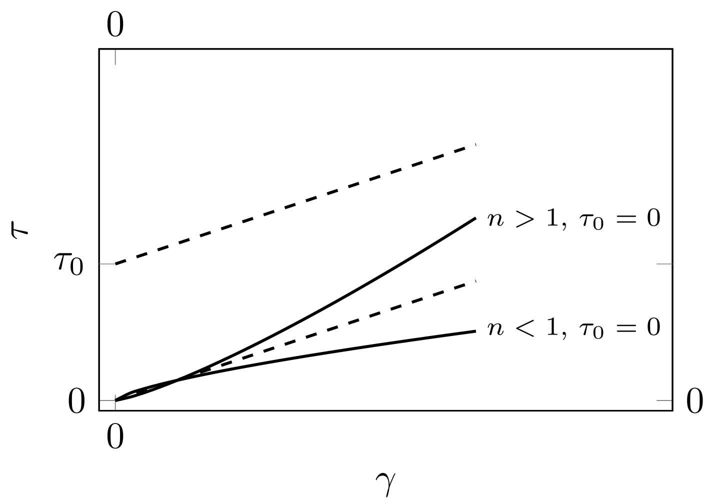


Model Ostwalda-de Waele

$$\tau = k\gamma^n \tag{225}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = k|\gamma|^{n-1} \tag{226}$$

n – bezwymiarowy parametr reologiczny
k – stała konsystencji

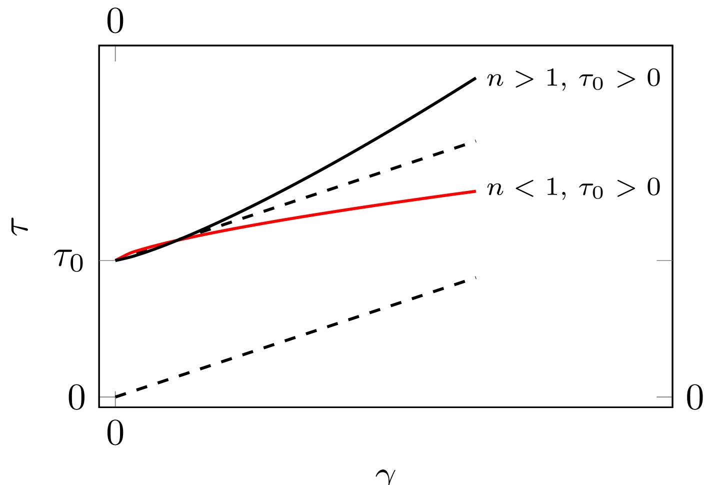


Model Herschela-Bulkleya

$$\tau = \tau_0 + k\gamma^n \tag{227}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \tau_0|\gamma|^{-1} + k|\gamma|^{n-1} \tag{228}$$

k – stała konsystencji
τ_0 – granica płynięcia
n – bezwymiarowy parametr reologiczny



Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu (wniosek) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
    - newtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}$
    - nienewtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$
  - ...
  - ...

Energia i entropia

Równanie zachowania energii

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = P + Q \tag{229}$$

Sformułowanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e\right)}_{=e_k} \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{230}$$

Równanie zachowania energii

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e\right)}_{=e_k} \mathrm{d}V}_{\text{tw. Reynoldsa (74)}} = \iiint\limits_V \rho\, \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V +$$

$$\underbrace{\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S}_{\text{tw. Gaussa}} - \underbrace{\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S}_{\text{tw. Gaussa}} \quad (231)$$

$$\iiint\limits_V \rho\frac{\mathrm{d}e_k}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V e_k \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u}\right)}_{\text{r.z.m.}=0} \mathrm{d}V =$$

$$\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{q})\,\mathrm{d}V \quad (232)$$

Równanie zachowania energii

Pierwsza postać całkowa

$$\iiint\limits_V \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{q}\right)\mathrm{d}V \quad (233)$$

Postać różniczkowa

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e\right) = \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{q}\right) \quad (234)$$

Jedno równanie skalarne. Dodatkowe niewiadome – trzy składowe wektora $\mathbf{q}$ i e

Równanie zachowania energii

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho e_k \,\mathrm{d}V}_{\text{tw. Reynoldsa (76)}} = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \quad (235)$$

Druga postać całkowa

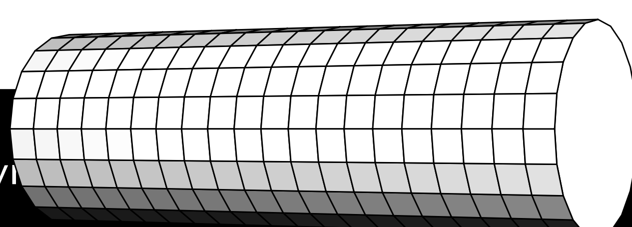
$$\iiint\limits_V \frac{\partial(\rho e_k)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \rho e_k \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \quad (236)$$

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\iiint\limits_V \frac{\partial(\rho e_k)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \rho e_k \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{237}$$

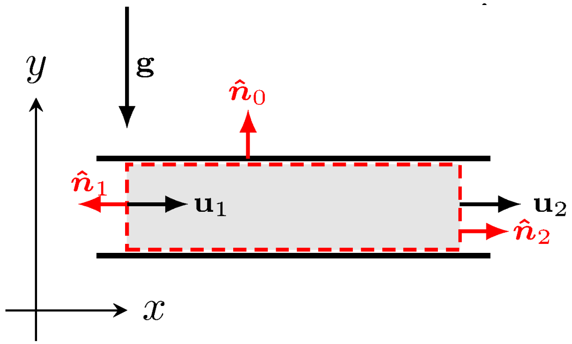
Założenie stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{f} = -\nabla\Pi \implies \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} = \rho\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t}$

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \rho\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e + \Pi\right)}_{=e_m}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{238}$$



Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+} \rho\, e_m \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S}_{?} = \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{239}$$



$$\oiint\limits_{\partial V^+} \rho\, e_m \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_0} \underbrace{\rho_0\, e_{m0}\mathbf{u}_0\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_0}_{=0,\quad \hat{\boldsymbol{n}}_0\perp\mathbf{u}_0}\,\mathrm{d}S +$$
$$\iint\limits_{S_1} \rho_1\, e_{m1}\underbrace{\mathbf{u}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1}_{<0}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \rho_2\, e_{m2}\underbrace{\mathbf{u}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2}_{>0}\,\mathrm{d}S =$$
$$-\iint\limits_{S_1} \rho_1\, e_{m1} u_{1n}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \rho_2\, e_{m2} u_{2n}\,\mathrm{d}S \tag{240}$$

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\oiint_{\partial V^+} \rho\, e_m \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S =$$

$$- \iint_{S_1} \rho_1\, e_{m1} u_{1n}\, \mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho_2\, e_{m2} u_{2n}\, \mathrm{d}S \quad (241)$$

Średnia energia mechaniczna

$$\bar{e}_m = \frac{\iint_S \rho\, e_m u_n\, \mathrm{d}S}{\iint_S \rho\, u_n\, \mathrm{d}S} = \frac{\iint_S \rho\, e_m u_n\, \mathrm{d}S}{\dot{m}} \quad (242)$$

$$\oiint_{\partial V^+} \rho\, e_m \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = -\dot{m}_1\, \bar{e}_{m1} + \dot{m}_2\, \bar{e}_{m2} \quad (243)$$

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$-\dot{m}_1\,\bar{e}_{m1} + \dot{m}_2\,\bar{e}_{m2} = \underbrace{\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}S}_{?} - \oiint_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{244}$$

Rozkład wektora naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_{nn} + \boldsymbol{\sigma}_{nt} \tag{245}$$

pozwala zapisać

$$\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_0} \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}_{nn0} + \boldsymbol{\sigma}_{nt0}) \cdot \mathbf{u}_0}_{=0,\quad \mathbf{u}_0=\mathbf{0}}\,\mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_1} (\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nn1}}_{=-p_1\hat{\boldsymbol{n}}_1} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nt1}}_{=0,\boldsymbol{\sigma}_{nt1}\perp\mathbf{u}_1}) \cdot \mathbf{u}_1\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} (\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nn2}}_{=-p_2\hat{\boldsymbol{n}}_2} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nt2}}_{=0}) \cdot \mathbf{u}_2\,\mathrm{d}S =$$

$$\iint_{S_1} p_1 \underbrace{u_{1n}}_{<0}\,\mathrm{d}S - \iint_{S_2} p_2 \underbrace{u_{2n}}_{>0}\,\mathrm{d}S \tag{246}$$

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} \frac{p_1}{\rho_1} \rho_1 u_{1n} \, \mathrm{d}S - \iint\limits_{S_2} \frac{p_2}{\rho_2} \rho_2 u_{2n} \, \mathrm{d}S \tag{247}$$

Średnia energia ciśnienia

$$\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} = \frac{\iint\limits_{S} \frac{p}{\rho} \rho \, u_n \, \mathrm{d}S}{\iint\limits_{S} \rho \, u_n \, \mathrm{d}S} = \frac{\iint\limits_{S} \frac{p}{\rho} \rho \, u_n \, \mathrm{d}S}{\dot{m}} \tag{248}$$

prowadzi do

$$-\dot{m}_1 \, \bar{e}_{m1} + \dot{m}_2 \, \bar{e}_{m2} = \dot{m}_1 \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_1 - \dot{m}_2 \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_2 - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{q} \, \mathrm{d}S \tag{249}$$

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$-\dot{m}_1\,\bar{e}_{m1}+\dot{m}_2\,\bar{e}_{m2}=\dot{m}_1\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_1-\dot{m}_2\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_2-\underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S}_{?} \tag{250}$$

Strumienie ciepła

$$\oiint\limits_{\partial V^+}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_0}\underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_0\cdot\mathbf{q}_0}_{<0}\,\mathrm{d}S+ \iint\limits_{S_1}\underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_1\cdot\mathbf{q}_1}_{=0,\ \mathbf{q}_1=\mathbf{0}}\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2}\underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_2\cdot\mathbf{q}_2}_{=0,\ \mathbf{q}_2=\mathbf{0}}\,\mathrm{d}S= -\iint\limits_{S_0}q_{n0}\,\mathrm{d}S=-Q_0 \tag{251}$$

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$-\dot m_1\,\bar e_{m1} + \dot m_2\,\bar e_{m2} = \dot m_1\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_1 - \dot m_2\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_2 + Q_0 \quad (252)$$

$$\dot m_2 \underbrace{\left(\overline{\frac{1}{2}u^2} + \bar e + \bar\Pi + \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}\right)_2}_{=\bar e_{c2}} - \dot m_1 \underbrace{\left(\overline{\frac{1}{2}u^2} + \bar e + \bar\Pi + \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}\right)_1}_{=\bar e_{c1}} = Q_0 \quad (253)$$

gdzie e_c – energia całkowita

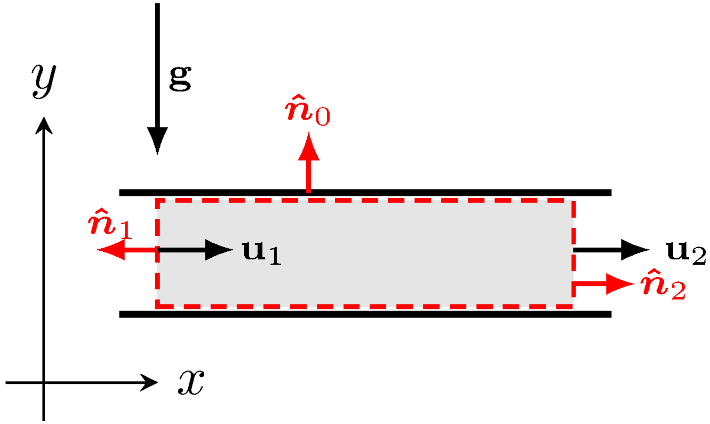
$$\dot m_2\,\bar e_{c2} - \dot m_1\,\bar e_{c1} = Q_0 \quad (254)$$

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\dot m_2\,\bar e_{c2} - \dot m_1\,\bar e_{c1} = Q_0 \tag{255}$$

Jeżeli dodatkowo $Q_0 = 0$, to $\bar e_{c2} = \bar e_{c1}$, bo $\dot m_1 = \dot m_2$

$$\left(\overline{\frac{1}{2}u^2} + \bar e + \bar\Pi + \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}\right)_1 = \left(\overline{\frac{1}{2}u^2} + \bar e + \bar\Pi + \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}\right)_2 \tag{256}$$



Równanie zachowania energii

Postać różniczkowa

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}u^2+e\right)=\rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{q}) \qquad (257)$$

Kaloryczne równanie stanu

$$\mathrm{d}e=c_v\,\mathrm{d}T \qquad (258)$$

Prawo Fouriera

$$\mathbf{q}=-\lambda\nabla T \qquad (259)$$

Zasady termodynamiki

- Druga zasada termodynamiki

$$\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \geqslant -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \tag{260}$$

- Bilans entropii

$$\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\phi}{T} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \tag{261}$$

- Pierwsza zasada termodynamiki

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \tag{262}$$

Pierwsza zasada termodynamiki

Pierwszą zasadę otrzymujemy, mnożąc skalarnie przez $\mathbf{u}$ równanie (206) i odejmując od równania (234)

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau} : \nabla\mathbf{u} + \underbrace{\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}}_{=-p\nabla\cdot\mathbf{u}} - \nabla\cdot\mathbf{q} \qquad (263)$$

Potrzebne są aż trzy równania konstytutywne

$$\underbrace{c_v\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}}_{\mathrm{d}e=c_v\,\mathrm{d}T} = \underbrace{\phi_\mu}_{=\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{u}} + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla\cdot\underbrace{(\lambda\nabla T)}_{=-\mathbf{q}} \qquad (264)$$

Pierwsza zasada termodynamiki

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \tag{265}$$

Funkcja dyssypacji ϕ składa się z części mechanicznej (lepkościowej) ϕ_μ i termicznej ϕ_λ

$$\phi = \phi_\mu + \phi_\lambda \tag{266}$$

Część mechaniczna funkcji dyssypacji

$$\phi_\mu = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} = 2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}2} \geqslant 0 \tag{267}$$

Pierwsza zasada termodynamiki

Równanie

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \qquad (268)$$

nazywane jest:

- pierwszą zasadą termodynamiki dla ośrodków ciągłych
- równaniem energii wewnętrznej
- równaniem Fouriera-Kirchhoffa

Dla $\rho = \mathrm{const}$ i $\lambda = \mathrm{const}$, otrzymujemy

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T \qquad (269)$$

Równanie energii – podsumowanie

- Równanie zachowania energii

$$\rho \frac{\mathrm{d}e_k}{\mathrm{d}t} = \rho\, \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) \tag{270}$$

- Równanie energii mechanicznej (bez e)

$$\rho \frac{\mathrm{d}e_m}{\mathrm{d}t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) \tag{271}$$

- Równanie energii całkowitej

$$\rho \frac{\mathrm{d}e_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \tag{272}$$

- Równanie energii wewnętrznej

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \tag{273}$$

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu (wniosek) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$
  - energii
    $\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}u^2 + e\right) = \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}) - \nabla\cdot\mathbf{q}$
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
    - newtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}$
    - nienewtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$
  - stanu $p = \rho RT$, $\mathrm{d}e = c_v\,\mathrm{d}T$
  - strumienie (prawo Fouriera) $\mathbf{q} = -\lambda\nabla T$

Domknięte układy równań

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ i $\mu = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{274}$$

i równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{275}$$

Daje to cztery równania skalarne i cztery niewiadome p, u_x, u_y, u_z.

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ i $\mu = f(T)$ mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{276}$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{277}$$

i równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T \tag{278}$$

Daje to sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych T, p, u_x, u_y, u_z, μ.

Dla płynu ściśliwego $\rho = \mathrm{var}$, $\mu = \mathrm{const}$ i $c_v = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{279}$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \tfrac{1}{3}\mu \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) \tag{280}$$

równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \lambda \nabla^2 T \tag{281}$$

i równanie stanu $p = \rho R T$. Daje to sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych ρ, T, p, u_x, u_y, u_z.

Domknięte układy równań

Dla płynu ściśliwego $\rho = \mathrm{var}$, $\mu = f_1(T)$ i $c_v = f_2(T)$ mamy równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{282}$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \left(2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}} \right) \tag{283}$$

równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \lambda \nabla^2 T \tag{284}$$

i równanie stanu $p = \rho R T$. Daje to osiem równań skalarnych i niewiadomych ρ, T, p, u_x, u_y, u_z, μ, c_v.

Domknięte układy równań

Płyn nienewtonowski.
Równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{285}$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu\mathbf{D}) \tag{286}$$

Wzór na lepkość według wybranego modelu

$$\mu = f(\gamma) \tag{287}$$

Daje to pięć równań skalarnych i pięć niewiadomych p, u_x, u_y, u_z, μ.

Statyka

Płyn w stanie równowagi:

- bezwzględnej – względem układu współrzędnych
- względnej – względem poruszającego się naczynia

Statyka:

- cieczy – hydrostatyka
- gazów – aerostatyka

Wykorzystuje się dotychczasowe równia przy założeniu, że płyn znajduje się w spoczynku

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{288}$$

Równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad (289)$$

przy założeniu $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, redukuje się do postaci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (290)$$

Wnioski:

- gęstość nie może być funkcją czasu
- gęstość może zależeć od położenia

Równanie zachowania pędu

Równanie zachowania pędu

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{291}$$

przy założeniu $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, redukuje się do postaci

$$\mathbf{0} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{292}$$

a hipoteza Newtona

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{293}$$

do

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} \tag{294}$$

Równanie równowagi

Równanie zachowania pędu z hipotezą Newtona przyjmie postać równania równowagi

$$\rho\,\mathbf{f} = \nabla p \tag{295}$$

To samo w zapisie skalarnym

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \tag{296}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \tag{297}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \tag{298}$$

Powierzchnia rozdziału

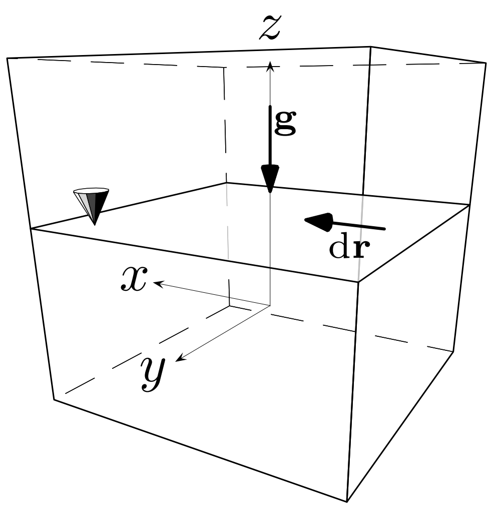
Dwa płyny o różnych gęstościach $\rho_1 \neq \rho_2$

$$\rho_1 \, \mathbf{g} = \nabla p_1 \tag{299}$$

$$\rho_2 \, \mathbf{g} = \nabla p_2 \tag{300}$$

$$\rho_1 \, \mathbf{g} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \, \mathrm{d}p_1 \tag{301}$$

$$\rho_2 \, \mathbf{g} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \, \mathrm{d}p_2 \tag{302}$$



$$\nabla p_1 \neq \nabla p_2 \tag{303}$$

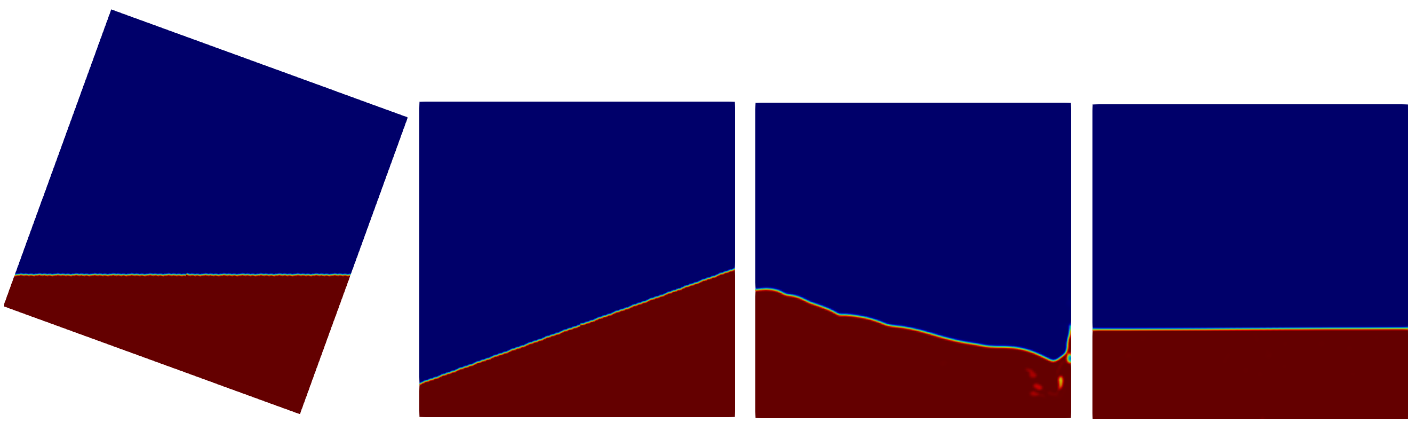
$$\mathrm{d}p_1 = \, \mathrm{d}p_2 \tag{304}$$

$$(\rho_1 - \rho_2) \, \mathbf{g} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{305}$$

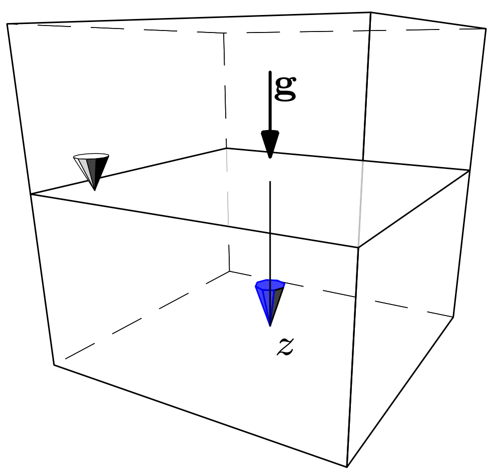
$$\mathbf{g} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g} \perp \, \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{306}$$

Dwa płyny (powietrze i woda) o różnych gęstościach $\rho_1 \neq \rho_2$

$$\mathbf{g} \perp \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{307}$$



Ciśnienie



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x = 0 \quad (308)$$

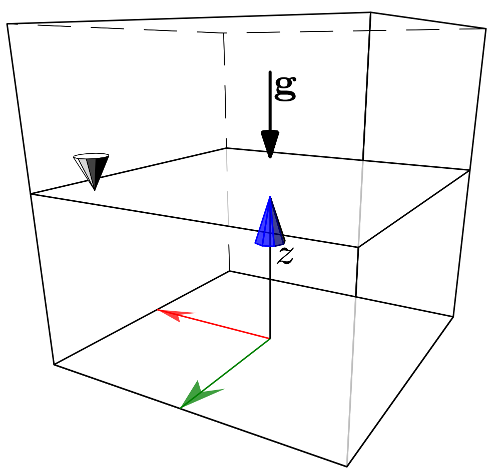
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y = 0 \quad (309)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z = \rho g \quad (310)$$

$$p(z) = \rho g z + c \quad (311)$$

$$p(0) = p_0 \implies c = p_0 \quad (312)$$

$$p(z) = p_0 + \rho g z \quad (313)$$



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x = 0 \tag{314}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y = 0 \tag{315}$$

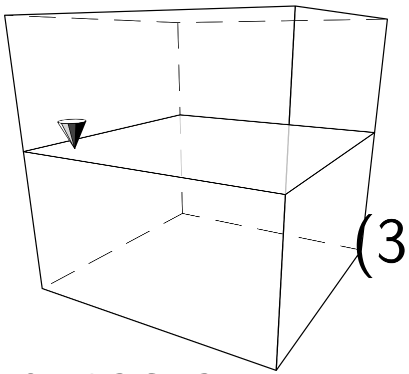
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z = -\rho g \tag{316}$$

$$p(z) = -\rho g z + c \tag{317}$$

$$p(h) = p_0 \implies c = p_0 + \rho g h \tag{318}$$

$$p(z) = p_0 + \rho g (h - z) \tag{319}$$

Prawo Pascala



Równanie równowagi

$$\rho\,\mathbf{g} = \nabla p \tag{320}$$

Jeżeli pominiemy $\mathbf{g}$, to $\nabla p = \mathbf{0}$, co oznacza

$$p = \mathrm{const} \tag{321}$$

Do podobnych wniosków można dojść, rozważając wzór na ciśnienie

$$p(z) = p_0 + \rho g z \tag{322}$$

Jeżeli $p_0 \gg \rho g z$, to $p \approx p_0$ (prawo Pascala).

Napór i moment naporu

Napór hydrostatyczny

$$\mathbf{N} = -\iint_S p\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{323}$$

gdzie wersor $\hat{\boldsymbol{n}}$ jest wersorem normalnym do powierzchni i skierowany jest on w kierunku cieczy. Moment naporu

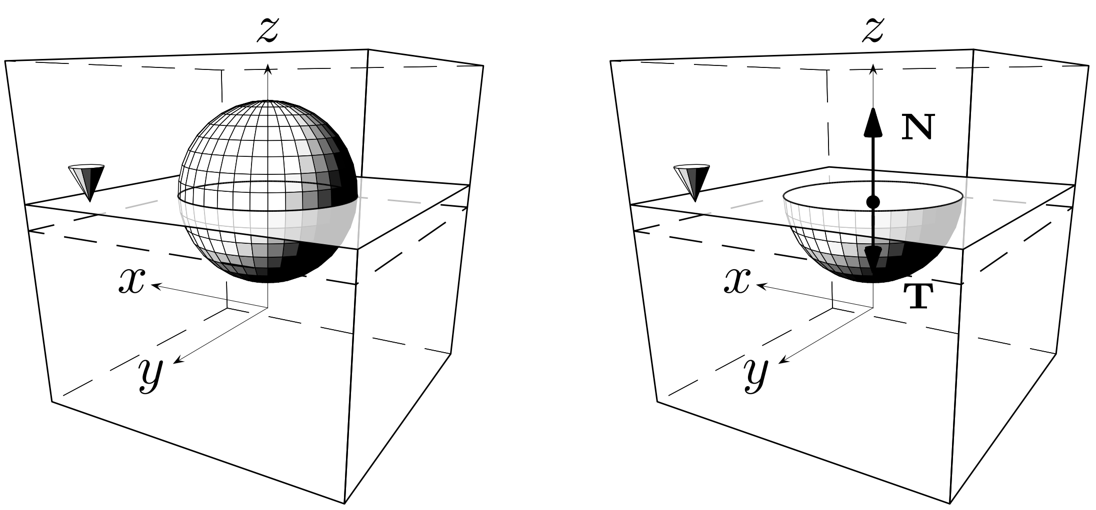
$$\mathbf{M} = -\iint_S \mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{n}}p\,\mathrm{d}S \tag{324}$$

gdzie $\mathbf{r}$ oznacza wektor wodzący, którego początek znajduje się w punkcie, względem którego liczony jest moment siły naporu.

Wypór hydrostatyczny

$$\mathbf{N} = -\oiint_S p\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{325}$$

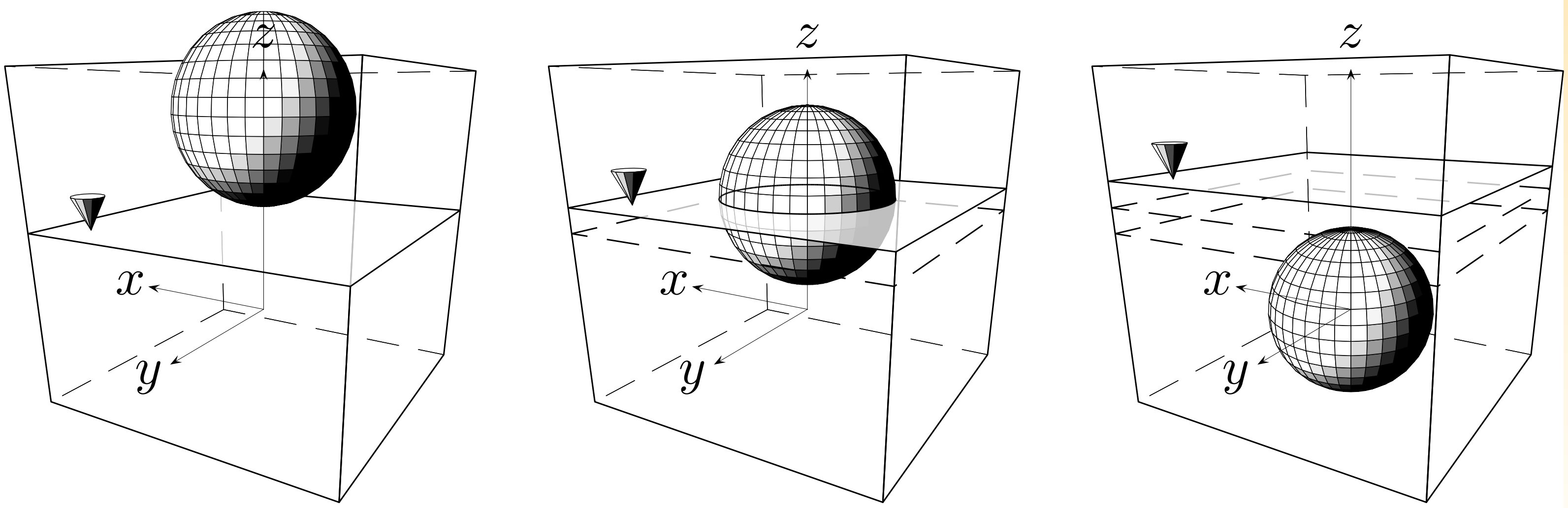
gdzie S jest zamkniętą powierzchnią zanurzoną.



Prawo Archimedesa

$$\mathbf{N} = -\rho V \mathbf{g} \tag{326}$$

gdzie gęstość cieczy ρ, a V jest objętością wypartej cieczy – równej objętości zanurzonego ciała.



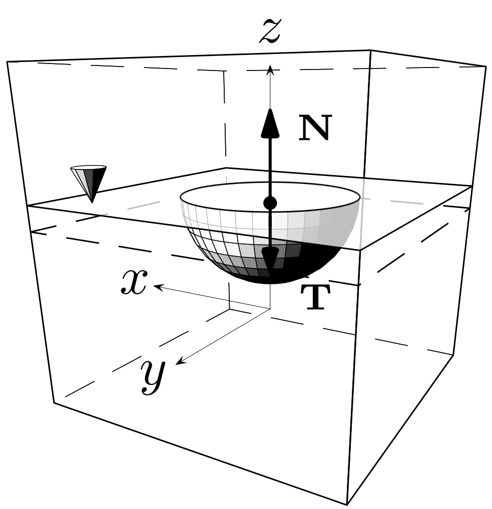
Warunek pływania

Ciało pływa, jeżeli wypór $\mathbf{N}$ równoważony jest ciężarem ciała $\mathbf{T}$

$$\mathbf{N} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{327}$$

Ciężar ciała w najprostszym przypadku wyznacza się ze wzoru

$$\mathbf{T} = \rho_c V_c \mathbf{g} \tag{328}$$



Warunek pływania

$$\mathbf{N} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{329}$$

W przypadku, gdy zanurzone całkowicie ciało zostanie pozostawione na pewnej głębokości, to możliwe są trzy warianty:

- $|\mathbf{N}| > |\mathbf{T}|$ – ciało zacznie się wynurzać częściowo, aż do momentu $|\mathbf{N}| = |\mathbf{T}|$ i ciało zacznie pływać;
- $|\mathbf{N}| = |\mathbf{T}|$ – ciało pozostanie zanurzone na głębokości, na której zostało umieszczone;
- $|\mathbf{N}| < |\mathbf{T}|$ – ciało zacznie tonąć.

Analiza wymiarowa

Analiza wymiarowa

Tabela 1: Wybrane jednostki podstawowe

Wielkość	Jednostka
kilogram	kg
metr	m
sekunda	s
kelwin	K

Tabela 2: Wybrane jednostki pochodne o nazwach własnych

Wielkość	Symbol	Jednostka
siła	N	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
energia	J	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$
moc	W	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$
ciśnienie	Pa	$\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$
częstotliwość	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$

Tabela 3: Wybrane jednostki pochodne bez nazw własnych

Wielkość	Jednostka
powierzchnia	m^2
objętość	m^3
gęstość	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
prędkość	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
przyspieszenie	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
lepkość dynamiczna	$\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$

Ogólnie

$$\mathrm{kg}^{a_1}\mathrm{m}^{a_2}\mathrm{s}^{a_3}\mathrm{K}^{a_4} \tag{330}$$

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) = 0 \qquad (331)$$

n zmiennych wymiarowych a_i, w tym k zmiennych podstawowych. To samo w innym układzie jednostek

$$F(a'_1, a'_2, \ldots, a'_k, a'_{k+1}, a'_{k+2}, \ldots, a'_n) = 0 \qquad (332)$$

Zależności między jednostkami podstawowymi

$$\begin{aligned} a'_1 &= \alpha_1 a_1 \\ a'_2 &= \alpha_2 a_2 \\ &\vdots \\ a'_k &= \alpha_k a_k \end{aligned}$$

Zależności między jednostkami podstawowymi

$$a_1' = \alpha_1 a_1$$
$$a_2' = \alpha_2 a_2$$
$$\vdots$$
$$a_k' = \alpha_k a_k$$

Zależności między jednostkami pochodnymi

$$a_{k+1}' = \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}$$
$$a_{k+2}' = \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \ldots \alpha_k^{q_k} a_{k+2}$$
$$\vdots$$
$$a_n' = \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_k^{r_k} a_n$$

Z równania

$$F(a_1', a_2', \ldots, a_k', a_{k+1}', a_{k+2}', \ldots, a_n') = 0 \qquad (336)$$

i zależności między jednostkami mamy

$$\begin{aligned} &F(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \ldots, \alpha_k a_k, \\ &\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \ldots, \alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\ldots\alpha_k^{r_k} a_n) = 0 \end{aligned} \qquad (337)$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{1}{a_1}$, $\alpha_2 = \frac{1}{a_2}$, ..., $\alpha_k = \frac{1}{a_k}$. Zatem

$$\begin{aligned} &F\Bigg(1, 1, \ldots, 1, \\ &\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}}, \frac{a_{k+2}}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_k^{q_k}}, \ldots, \frac{a_n}{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}}\Bigg) = 0 \end{aligned} \qquad (338)$$

Zatem równanie wymiarowe

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) = 0 \tag{339}$$

o n zmiennych wymiarowych a_i, w tym k zmiennych podstawowych, można sprowadzić do postaci

$$F\left(\underbrace{\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}}}_{\Pi_{k+1}}, \underbrace{\frac{a_{k+2}}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_k^{q_k}}}_{\Pi_{k+2}}, \ldots, \underbrace{\frac{a_n}{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}}}_{\Pi_n}\right) = 0 \tag{340}$$

o $n - k$ zmiennych bezwymiarowych (twierdzenie Buckinghama)

$$F(\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \ldots, \Pi_n) = 0 \tag{341}$$

Analiza wymiarowa

$$\Delta p = f(L, D, k, \rho, \mu, \bar{u}) \tag{342a}$$

$$F(\Delta p, L, D, k, \rho, \mu, \bar{u}) = 0 \tag{342b}$$

$$[\Delta p] = \mathrm{Pa} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}} \tag{343a}$$

$$[L] = [D] = [k] = \mathrm{m} \tag{343b}$$

$$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}} \tag{343c}$$

$$[\mu] = \mathrm{Pa\,s} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}} \tag{343d}$$

$$[\bar{u}] = \mathrm{m\,s^{-1}} \tag{343e}$$

$$n = 7,\ k = 3 \tag{344}$$

$$D, \rho, \bar{u} \tag{345}$$

$$[\Delta p] = [D]^{a_1}[\rho]^{a_2}[\bar{u}]^{a_3} \tag{346}$$

$$\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-2}} = \mathrm{m}^{a_1}(\mathrm{kg\,m^{-3}})^{a_2}(\mathrm{m\,s^{-1}})^{a_3} \tag{347}$$

$$1 = a_2 \tag{348a}$$

$$-1 = a_1 - 3a_2 + a_3 \tag{348b}$$

$$-2 = -a_3 \tag{348c}$$

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2$

$$[\Delta p] = [D]^0[\rho]^1[\bar{u}]^2 \tag{349}$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} \tag{350}$$

$$[L] = [D]^{a_1}[\rho]^{a_2}[\bar{u}]^{a_3} \tag{351}$$

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}^{a_1}(\mathrm{kg\,m^{-3}})^{a_2}(\mathrm{m\,s^{-1}})^{a_3} \tag{352}$$

$$0 = a_2 \tag{353a}$$

$$1 = a_1 - 3a_2 + a_3 \tag{353b}$$

$$0 = -a_3 \tag{353c}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$

$$[L] = [D]^1[\rho]^0[\bar{u}]^0 \tag{354}$$

$$\Pi_2 = \frac{L}{D}, \quad \Pi_3 = \frac{k}{D} \tag{355}$$

$$[\mu] = [D]^{a_1}[\rho]^{a_2}[\bar{u}]^{a_3} \tag{356}$$

$$\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}} = \mathrm{m}^{a_1}(\mathrm{kg\,m^{-3}})^{a_2}(\mathrm{m\,s^{-1}})^{a_3} \tag{357}$$

$$1 = a_2 \tag{358a}$$

$$-1 = a_1 - 3a_2 + a_3 \tag{358b}$$

$$-1 = -a_3 \tag{358c}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1$

$$[\mu] = [D]^1[\rho]^1[\bar{u}]^1 \tag{359}$$

$$\Pi_4 = \frac{\mu}{D\rho\,\bar{u}}; \quad \Pi_4 = \frac{1}{\mathrm{Re}} \tag{360}$$

Z twierdzenia Buckinghama wynika, że

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0 \qquad (361)$$

Zatem

$$F\left(\frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2}, \frac{L}{D}, \frac{k}{D}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) = 0 \qquad (362)$$

lub w postaci jawnej (o ile istnieje)

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{k}{D}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \qquad (363)$$

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{k}{D}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \tag{364}$$

Dla przepływu laminarnego

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \tag{365}$$

Równanie Darcy'ego-Weisbacha

$$\Delta p = \frac{64}{\mathrm{Re}} \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \tag{366}$$

Dla przepływu turbulentnego $\lambda = f(1/\mathrm{Re}, k/D)$, np. $\lambda = 0.3164\,\mathrm{Re}^{-0.25}$

Podsumowanie

- Prawa fizyczne nie mogę zależeć od wyboru układu jednostek
- Każda funkcja n zmiennych wymiarowych może być sprowadzona do postaci funkcji $n-k$ zmiennych bezwymiarowych (twierdzenie Buckinghama)
- Twierdzenie Buckinghama nie podaje sposobu wyznaczania postaci tej funkcji!

Wielkości bezwymiarowe oznaczane są górnym indeksem $+$.
Bezwymiarowe współrzędne

$$x^+ = \frac{x}{l_0}, \quad y^+ = \frac{y}{l_0}, \quad z^+ = \frac{x}{l_0} \tag{367}$$

Bezwymiarowe składowe prędkości

$$u_x^+ = \frac{u_x}{u_0}, \quad u_y^+ = \frac{u_y}{u_0}, \quad u_z^+ = \frac{u_z}{u_0} \tag{368}$$

Bezwymiarowego wektor prędkości

$$\mathbf{u} = u_0 \begin{pmatrix} u_x^+ & u_y^+ & u_z^+ \end{pmatrix} = u_0 \mathbf{u}^+ \tag{369}$$

Bezwymiarowe ciśnienia, gęstość, współczynnik lepkości, czas, gęstość rozkładu sił objętościowych

$$t^+ = \frac{t}{t_0}, \quad p^+ = \frac{p}{p_0}, \quad \rho^+ = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{370}$$

$$\mu^+ = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \mathbf{f}^+ = \frac{\mathbf{f}}{f_0} \tag{371}$$

Bezwymiarowe operatory

$$\nabla = \frac{1}{l_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^+} \quad \frac{\partial}{\partial y^+} \quad \frac{\partial}{\partial z^+}\right) = \frac{1}{l_0}\nabla^+ \tag{372}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial(l_0 x^+)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(l_0 y^+)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(l_0 z^+)^2} = \frac{1}{l_0^2}\nabla^{2+} \tag{373}$$

Bezwymiarowe równanie zachowania masy (po uporządkowaniu)

$$\frac{l_0}{u_0 t_0}\frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + \nabla^+ \cdot \left(\rho^+ \mathbf{u}^+\right) = 0 \tag{374}$$

dla liczby Strouhala

$$\mathrm{Sh} = \frac{l_0}{u_0 t_0} = \frac{t_{ch}}{t_0} \tag{375}$$

mamy

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + \nabla^+ \cdot \left(\rho^+ \mathbf{u}^+\right) = 0 \tag{376}$$

Dla przypadku nieściśliwego

$$\nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ = 0 \tag{377}$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\rho^+\left(\frac{l_0}{u_0 t_0}\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+}+\mathbf{u}^+\cdot\nabla^+\mathbf{u}^+\right)=\frac{f_0 l_0}{u_0^2}\rho^+\mathbf{f}^+-\frac{p_0}{\rho_0 u_0^2}\nabla^+p^+$$
$$+\frac{\mu_0}{l_0 u_0 \rho_0}\mu^+\left(\nabla^{2+}\mathbf{u}^+ + \tfrac{1}{3}\nabla^+\left(\nabla^+\cdot\mathbf{u}^+\right)\right) \tag{378}$$

Dla liczby Froude'a

$$\mathrm{Fr}=\frac{u_0^2}{f_0 l_0}=\frac{\rho_0 u_0^2/l_0}{\rho_0 f_0} \tag{379}$$

Reynoldsa

$$\mathrm{Re}=\frac{l_0 u_0 \rho_0}{\mu_0}=\frac{l_0 u_0}{\nu_0}=\frac{\rho_0 u_0^2/l_0}{\mu_0 u_0/l_0^2} \tag{380}$$

Eulera

$$\mathrm{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} = \frac{p_0/l_0}{\rho_0 u_0^2/l_0} \tag{381}$$

równanie Naviera-Stokesa przyjmie postać

$$\rho^+ \left(\mathrm{Sh} \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \mathbf{u}^+ \right) = \frac{\rho^+ \mathbf{f}^+}{\mathrm{Fr}} - \mathrm{Eu} \nabla^+ p^+ + \frac{\mu^+}{\mathrm{Re}} \left(\nabla^{2+} \mathbf{u}^+ + \tfrac{1}{3} \nabla^+ \left(\nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ \right) \right) \tag{382}$$

lub przy założeniu nieściśliwości

$$\mathrm{Sh} \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \mathbf{u}^+ = \frac{\mathbf{f}^+}{\mathrm{Fr}} - \frac{\mathrm{Eu}}{\rho^+} \nabla^+ p^+ + \frac{\nu^+}{\mathrm{Re}} \nabla^{2+} \mathbf{u}^+ \tag{383}$$

Równanie energii wewnętrznej

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right) \quad (384)$$

Funkcja dyssypacji $\phi_\mu = \mu_0 u_0^2 l_0^{-2} \phi_\mu^+$ pozwala zapisać

$$\rho^+ c_v^+ \left(\frac{l_0}{t_0 u_0} \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ T^+ \right) = \frac{u_0^2}{c_{v0} T_0} \frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 l_0} \phi_\mu^+ + \frac{\lambda_0}{c_{v0} \mu_0} \frac{\mu_0}{l_0 u_0 \rho_0} \lambda^+ \nabla^{2+} T^+ + \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \frac{u_0^2}{T_0 c_{v0}} \frac{p^+}{\rho^+} \left(\frac{l_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \rho^+ \right) \quad (385)$$

Liczba Eckerta

$$\mathrm{Ec} = \frac{u_0^2}{c_{v0}\, T_0} \tag{386}$$

liczbę Prandtla

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_{v0}\, \mu_0}{\lambda_0} \tag{387}$$

pozwalają zapisać równanie energii wewnętrznej

$$\rho^+ c_v^+ \left(\mathrm{Sh} \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ T^+ \right) = \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}} \phi_\mu^+ + \frac{\lambda^+}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}} \nabla^{2+} T^+ + \mathrm{Eu}\,\mathrm{Ec} \frac{p^+}{\rho^+} \left(\mathrm{Sh} \frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \rho^+ \right) \tag{388}$$

Układ równań dla przypadku nieściśliwego (bez +)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{389}$$

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{\mathbf{f}}{\mathrm{Fr}} - \frac{\mathrm{Eu}}{\rho}\nabla p + \frac{\nu}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{u} \tag{390}$$

$$\rho c_v \left(\mathrm{Sh}\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T\right) = \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\phi_\mu + \frac{\lambda}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T \tag{391}$$

$$\mathrm{Sh} = \frac{l_0}{u_0 t_0} = \frac{t_{ch}}{t_0} \quad (392)$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{u_0^2}{f_0 l_0} = \frac{\rho_0 u_0^2 / l_0}{\rho_0 f_0} \quad (393)$$

$$\mathrm{Re} = \frac{l_0 u_0 \rho_0}{\mu_0} = \frac{l_0 u_0}{\nu_0} = \frac{\rho_0 u_0^2 / l_0}{\mu_0 u_0 / l_0^2} \quad (394)$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} = \frac{p_0 / l_0}{\rho_0 u_0^2 / l_0} \quad (395)$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{u_0^2}{c_{v0} T_0} \quad (396)$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_{v0} \mu_0}{\lambda_0} \quad (397)$$

Literatura

Literatura

[1] Tesch K., *Mechanika Płynów*, Wyd. PG, Gdańsk, 2008

[2] Tesch K., *Wybrane zagadnienia modelowania przepływów krwi...*, Wyd. PG, Gdańsk, 2012

[3] Tesch K., *Podstawy podstaw mechaniki płynów*, online, Gdańsk, 2020 **LINK**