Mechanika Płynów (30 h)

Krzysztof Tesch

WIMiO
Politechnika Gdańska

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

Operatory różniczkowe

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Operator nabla i gradient

Wektor, np. wektor prędkości

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + u_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + u_z \hat{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Wektorowy operator różniczkowy ∇ (nabla)

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\imath}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Gradient funkcji skalarnej f

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{\imath}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dywergencja i rotacja

Dywergencja wektora $\mathbf{u}$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(u_x \quad u_y \quad u_z\right) = \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{4}$$

Rotacja wektora $\mathbf{u}$

$$\nabla\times\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}+ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{5}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Operatory podwójne

	∇f	$\nabla \cdot \mathbf{u}$	$\nabla \times \mathbf{u}$
∇	tensor	wektor	tensor
$\nabla \cdot$	skalar	—	skalar
$\nabla \times$	wektor	—	wektor

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Operatory podwójne

	∇f	$\nabla \cdot \mathbf{u}$	$\nabla \times \mathbf{u}$
∇	$\nabla\nabla f$	$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$	$\nabla(\nabla \times \mathbf{u})$
$\nabla\cdot$	$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$	—	$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$
$\nabla\times$	$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$	—	$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Operatory podwójne

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\hat{\boldsymbol{k}} =$$

$$0\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 0\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0} \quad (6)$$

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura

$$
\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} =
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) +
$$

$$
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) =
$$

$$
\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} = 0 \tag{7}
$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Operatory podwójne

Hesjan

$$\nabla\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Laplasjan

$$\nabla \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f \tag{10}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Pochodna substancjalna

$$\mathrm{d}f(t,x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \quad (11)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial z} \quad (12)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_x\frac{\partial f}{\partial x} + u_y\frac{\partial f}{\partial y} + u_z\frac{\partial f}{\partial z} \quad (13)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla f \quad (14)$$

Przyspieszenie

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} \quad (15)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Wstęp

- Co to jest płyn?
- Czym się zajmuje mechanika płynów?
- Obszary zastosowań →
- Mechanika a mechanika płynów →

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Obszary zastosowań

- Turbiny wodne i pompy
- Turbiny parowe, gazowe, wiatrowe
- Sprężarki, wentylatory, dmuchawy
- Rurociągi i aparatura chemiczna
- Pojazdy, samoloty, statki
- Budowle hydrotechniczne i naziemne
- Wymiana ciepła, klimatyzacja, wentylacja
- Biomechanika/bioreologia i aparatura medyczna
- Meteorologia
- Grafika komputerowa/efekty specjalne
- Gry komputerowe...

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Mechanika a mechanika płynów

Mechanika ($\mu\eta\chi\alpha\nu\iota\kappa\eta$):

- Mechanika kwantowa
- Mechanika klasyczna
  - Mechanika ogólna
  - Mechanika kontinuum
    - Mechanika ciała stałego
      - Sprężystość
      - Plastyczność
    - Mechanika płynów
      - Hydrodynamika
      - Aerodynamika
      - (Bio)reologia
      - **Teoretyczna mechanika płynów**
      - **Eksperymentalna mechanika płynów**
      - *Numeryczna mechanika płynów*

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy
  - pędu
  - momentu pędu
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
  - ...
  - ...

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Kontinuum

- Postulat kontinuum
- Ciągłość

$$\mathrm{Kn} = \frac{l_0}{l} \ll 1 \tag{16}$$

- Płynność

$$\frac{t_0}{t} \ll 1 \tag{17}$$

- Element płynu – najmniejsza część ośrodka, która spełnia warunek płynności
- Gęstość

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \tag{18}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Kinematyka

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Kinematyczny podział przepływów

Przepływy:

- 1D
- 2D
- 3D

Ponadto

- stacjonarne ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- niestacjonarne ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$)

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Linie i powierzchnie prądu

Linie, do których styczne są wektory prędkości $\mathbf{u}$.
Wektor styczny do linii prądu $\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix}$.
Zatem $\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, czyli

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} =$$

$$(u_z\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (u_x\,\mathrm{d}z - u_z\,\mathrm{d}x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (u_y\,\mathrm{d}x - u_x\,\mathrm{d}y)\,\hat{\boldsymbol{k}} = 0\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 0\hat{\boldsymbol{k}} \quad (19)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z} \quad (20)$$

Jeżeli przez dowolną krzywą, która nie jest linią prądu, poprowadzimy linie prądu, to otrzymamy powierzchnię prądu.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Linie i powierzchnie wirowe

Jeżeli wektor prędkości zastąpimy wektorem wirowości

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{21}$$

to analogicznie mamy rzuty linii wirowych

$$\frac{\mathrm{d}x}{\Omega_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\Omega_y} = \frac{\mathrm{d}z}{\Omega_z} \tag{22}$$

Analogicznie – jeżeli przez dowolną krzywą, która nie jest linią wirową, poprowadzimy linie wirowe, to otrzymamy powierzchnię wirową.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Tory

Wektorowe równanie trajektorii (torów) ma następującą postać

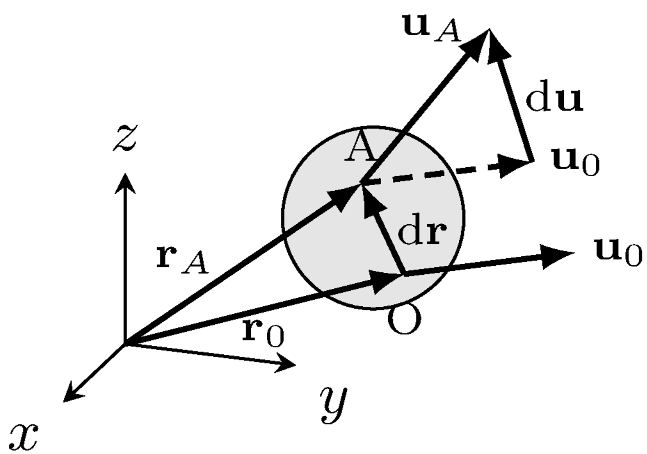
$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \tag{23}$$

W ogólnym przypadku linie prądu i trajektorie nie są tym samym. Jedne są tożsame z drugimi tylko dla przypadku stacjonarnego i niestacjonarnego jednowymiarowego.

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{24}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opis ruchu elementu płynu



$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_0 + \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{25}$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \mathrm{d}\mathbf{u} \tag{26}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{27}$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{28}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \nabla \mathbf{u}\right)}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \mathbf{u}\right)}_{\mathbf{A}} \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}\right)^{\mathrm{T}} = \nabla \mathbf{u} \tag{30}$$

Opis ruchu elementu płynu

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \nabla \mathbf{u}\right) \tag{33}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \mathbf{u}\right) \tag{34}$$

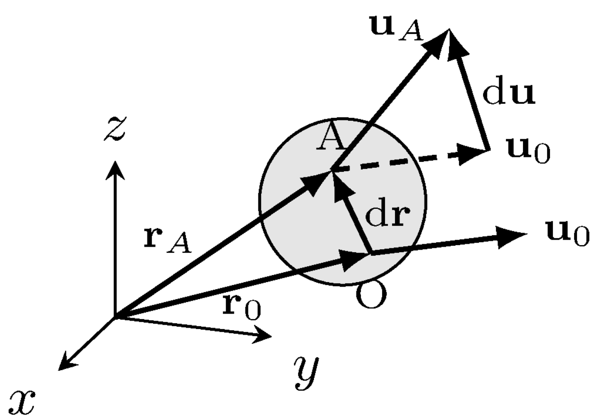
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opis ruchu elementu płynu



$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{37}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{D} + \mathbf{A} \tag{38}$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \mathbf{A}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \mathbf{D}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{39}$$

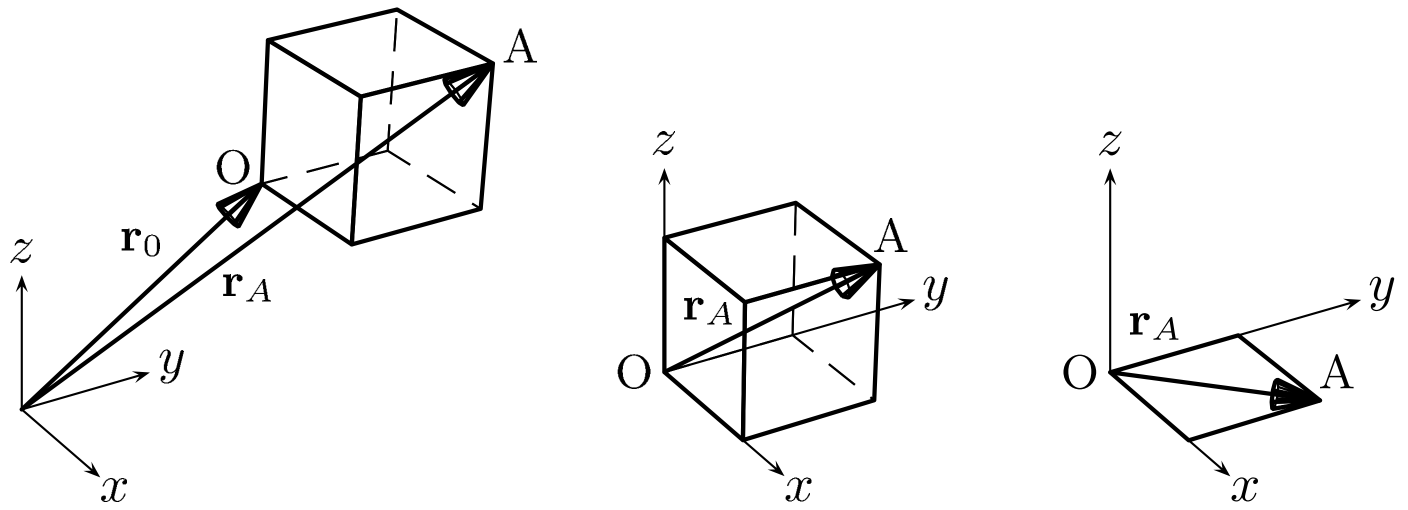
$$\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{40}$$

Ostatecznie

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathrm{d}\mathbf{r} + \mathbf{D}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{41}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

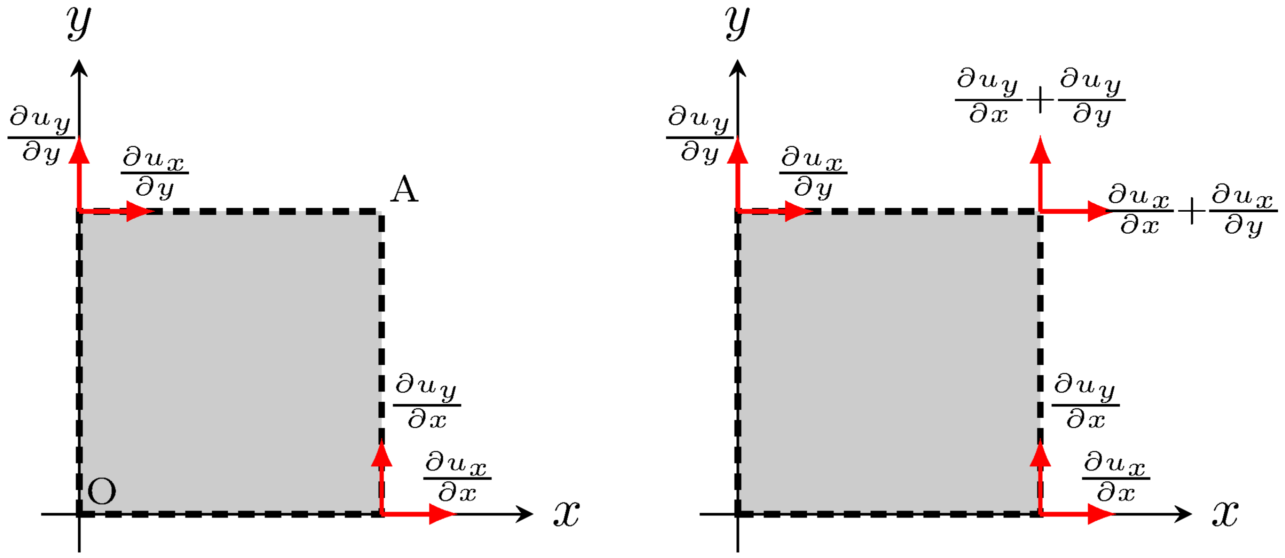
Interpretacja fizyczna składowych tensorów



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (42)$$

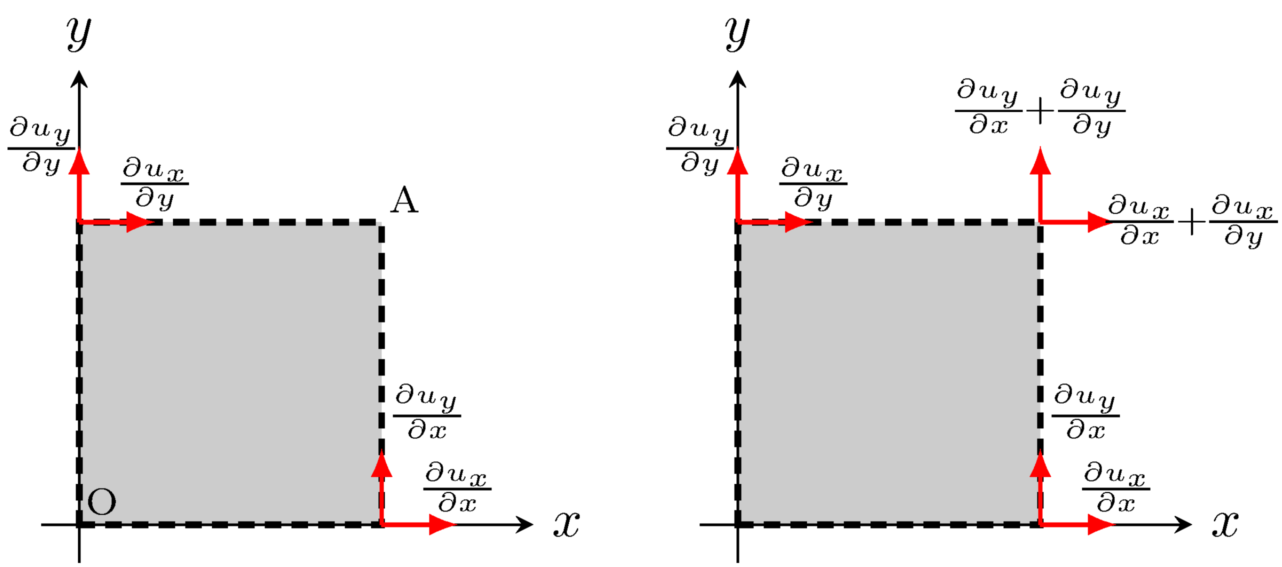


Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$



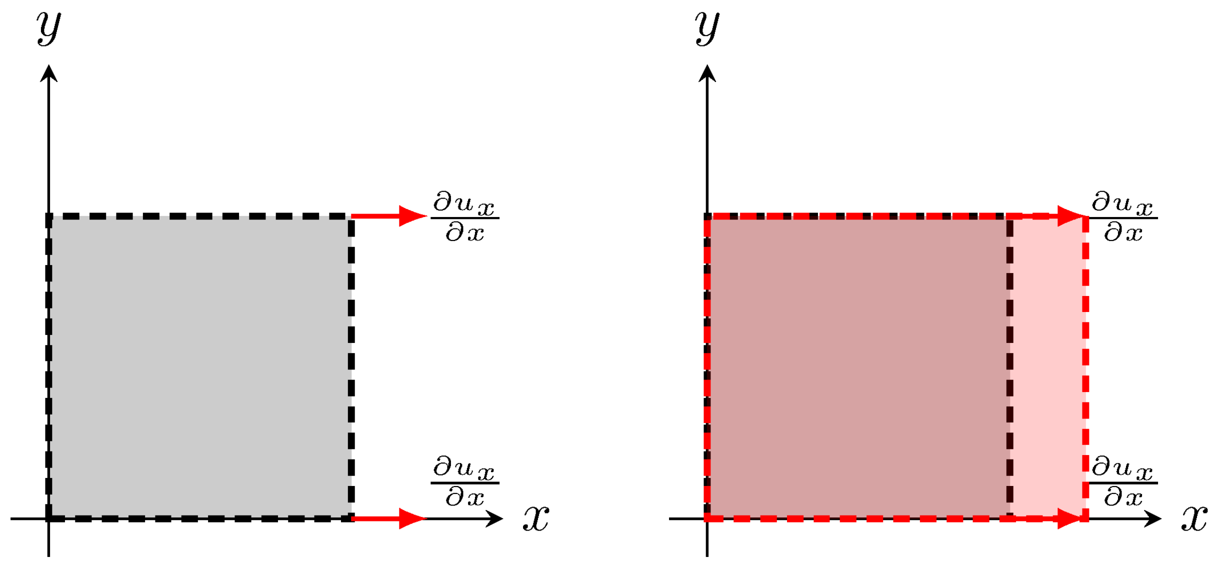
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$\frac{\partial u_x}{\partial x} > 0$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$



Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

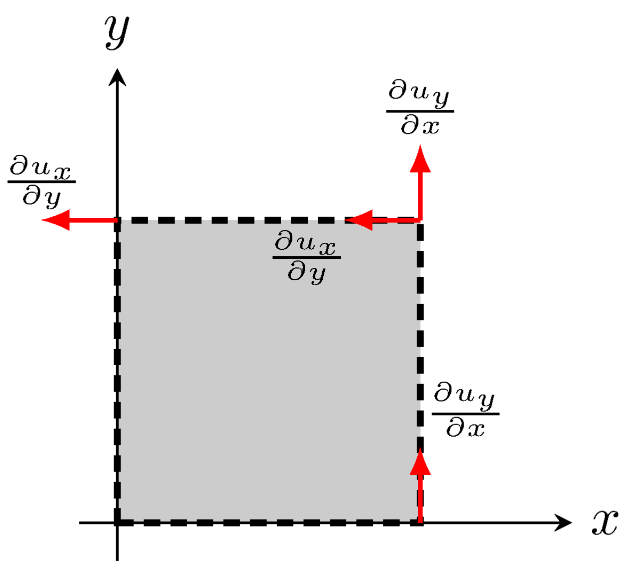
Literatura

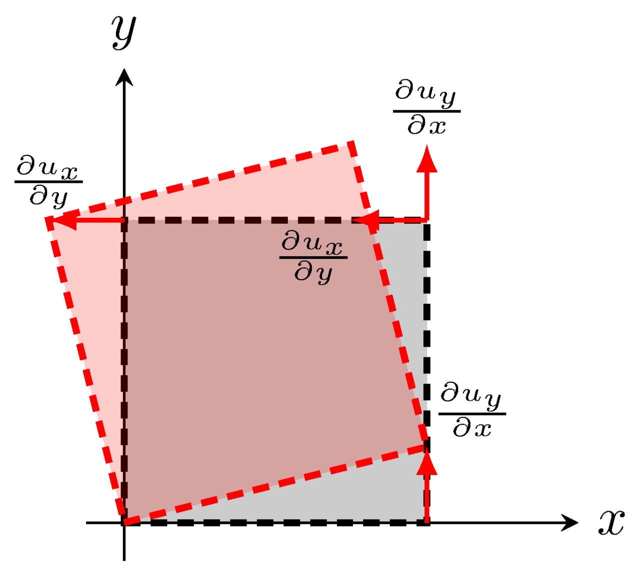
Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$$-\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$





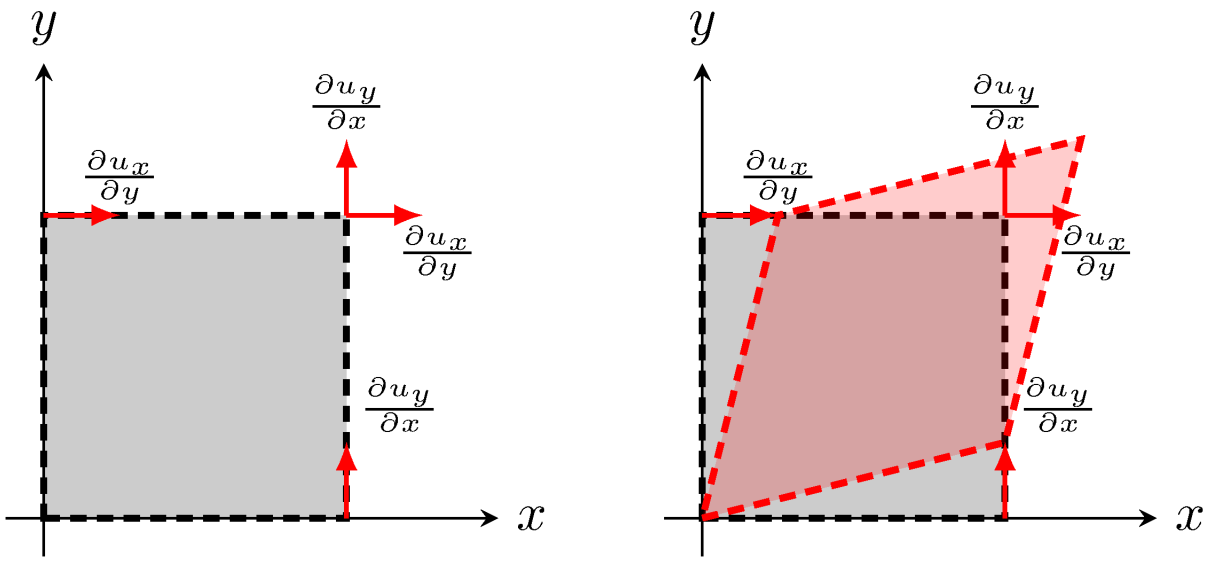
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Interpretacja fizyczna składowych tensorów

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} > 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Interpretacja fizyczna składowych tensorów

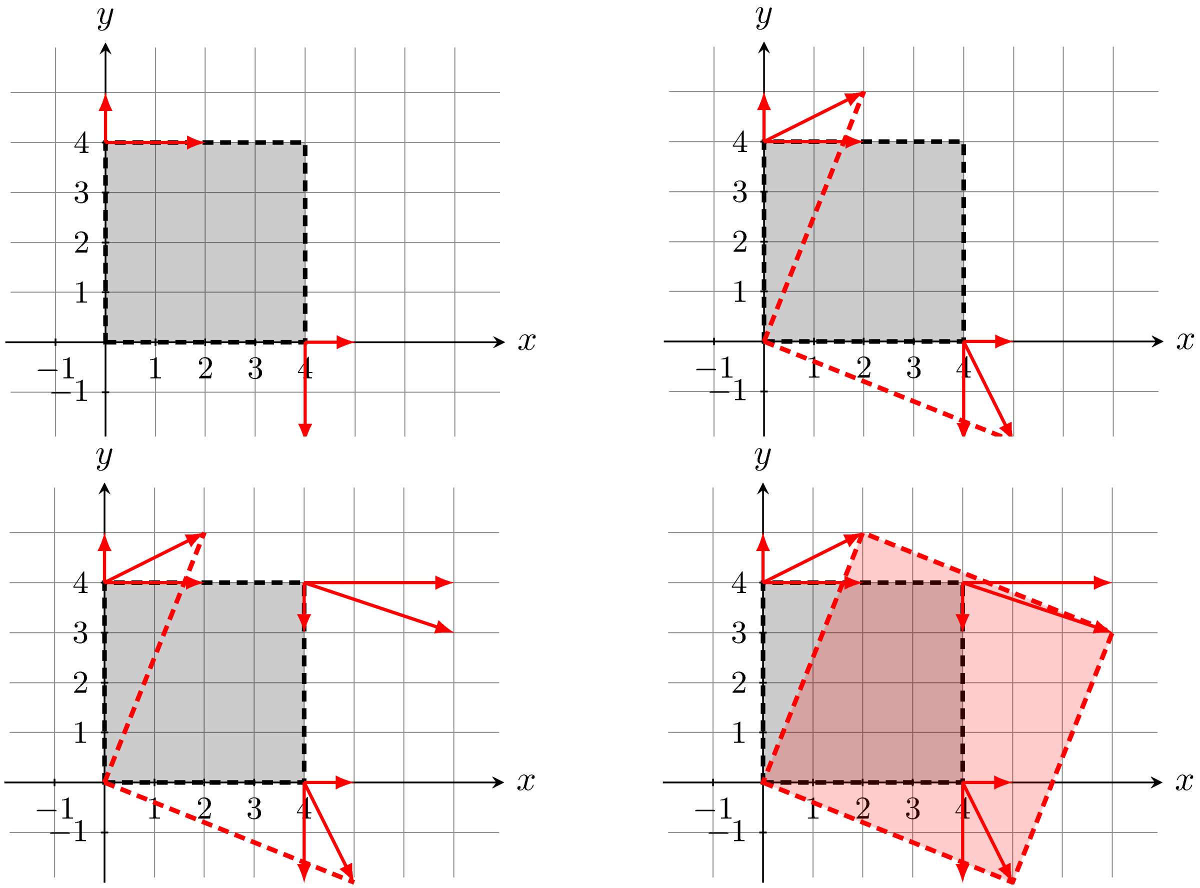
Prędkości:

- deformacji objętościowych $\frac{\partial u_x}{\partial x}, \ldots$
- deformacji postaciowych $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \ldots$
- obrotowe $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \ldots$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

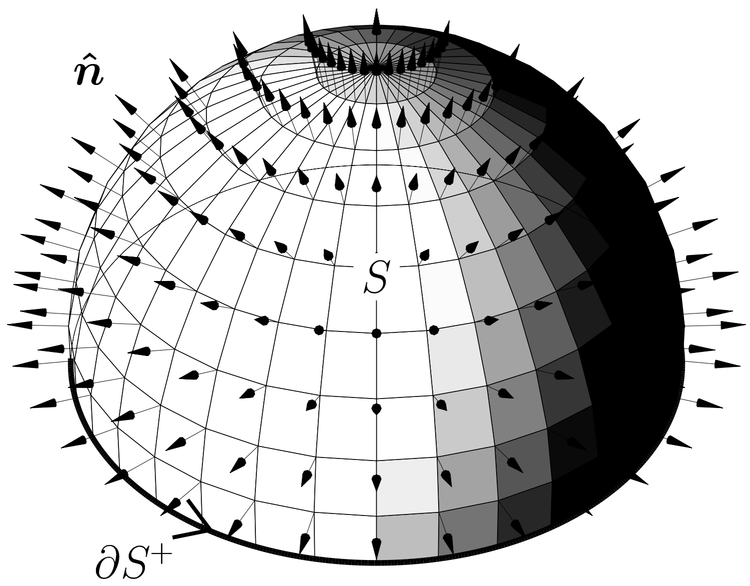


Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Wzór Stokesa

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})\, \mathrm{d}S \tag{53}$$

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{54}$$

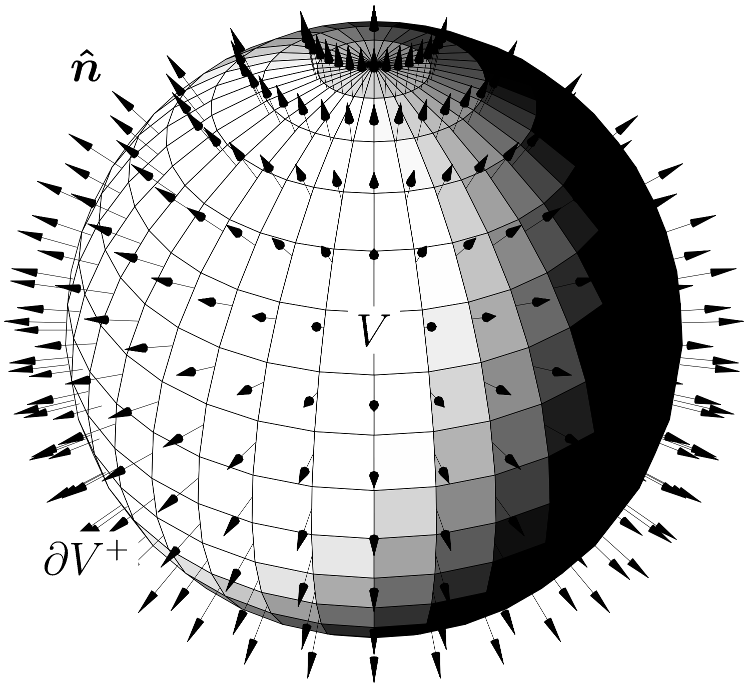


Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Wzór Gaussa

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S = \iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \tag{55}$$

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \mathbf{u} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \tag{56}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Hydrodynamiczna interpretacja wzorów

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Twierdzenie Newtona-Leibniza

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \tag{57}$$

Twierdzenie Stokesa

$$\underbrace{\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}_{\text{cyrkulacja}} = \underbrace{\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{u})}_{\text{wirowość}}\,\mathrm{d}S}_{\text{strumień}} \tag{58}$$

Twierdzenie Gaussa

$$\underbrace{\oiint_{\partial V^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\text{strumień}} = \iiint_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u}}_{\text{źródłowość}}\,\mathrm{d}V \tag{59}$$

I tw. Helmholtza o wirowości

Wzór Stokesa

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \, \mathrm{d}S \tag{60}$$

Cyrkulacja

$$\Gamma = \oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{61}$$

Wirowość

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{62}$$

Wzór Stokesa

$$\Gamma = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, \mathrm{d}S = \iint_S \Omega_n \, \mathrm{d}S = \bar{\Omega}_n |S| \tag{63}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Tożsamość (7)

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0 \tag{64}$$

przy użyciu wektora wirowości (21)

$$\nabla \cdot \mathbf{\Omega} = 0 \tag{65}$$

Całkując obustronnie

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{\Omega} \,\mathrm{d}V = 0 \tag{66}$$

i wykorzystując twierdzenie Gaussa

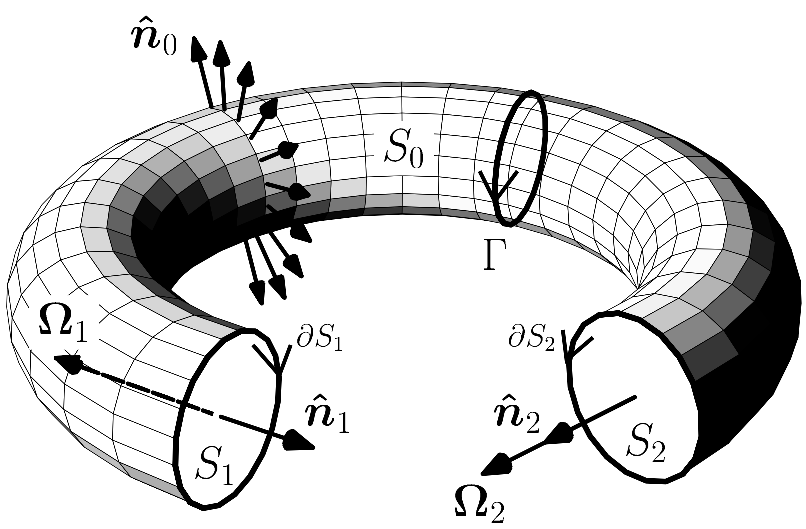
$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{\Omega} \,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{\Omega} \,\mathrm{d}S = 0 \tag{67}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

I tw. Helmholtza o wirowości

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{68}$$

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, \mathrm{d}S =$$
$$\underbrace{\iint\limits_{S_0} \hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}_0 \, \mathrm{d}S}_{=0, \quad \hat{\boldsymbol{n}}_0 \perp \boldsymbol{\Omega}_0} + \iint\limits_{S_1} \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_1 \, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \hat{\boldsymbol{n}}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_2 \, \mathrm{d}S = 0 \tag{69}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

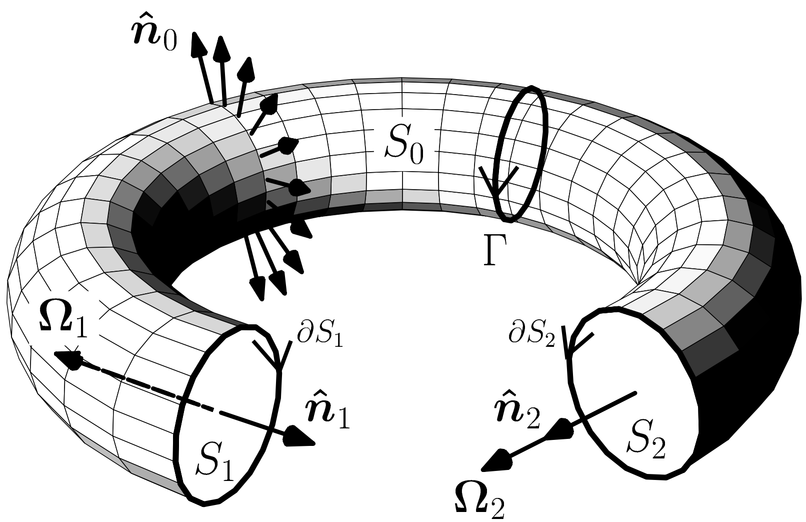
I tw. Helmholtza o wirowości

$$\iint\limits_{S_1} \underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_1}_{<0} \, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_2}_{>0} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{70}$$

$$-\iint\limits_{S_1} \Omega_{1n} \, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \Omega_{2n} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{71}$$

$$\bar{\Omega}_{1n}|S_1| = \bar{\Omega}_{2n}|S_2| = \mathrm{const} \tag{72}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \mathrm{const} \tag{73}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Twierdzenie Reynoldsa o transporcie

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho f \,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V f\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\mathrm{d}V \quad (74)$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho f \,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \frac{\partial(\rho f)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot(\rho f\mathbf{u})\,\mathrm{d}V \quad (75)$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho f \,\mathrm{d}V = \underbrace{\iiint\limits_V \frac{\partial(\rho f)}{\partial t}\,\mathrm{d}V}_{\text{zamiany wew. } V} + \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+} \rho f\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S}_{\text{strumień przez } \partial V} \quad (76)$$

Równanie zachowania masy

$$m = \iiint\limits_V \rho \, \mathrm{d}V \tag{77}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint\limits_V \rho \, \mathrm{d}V = 0 \tag{78}$$

Za pomocą twierdzenia (74) dla $f = 1$ mamy

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathrm{d}V = 0 \tag{79}$$

czyli pierwsza postać

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{80}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}V = 0 \qquad (81)$$

Za pomocą twierdzenia (75) dla $f = 1$ mamy

$$\iiint\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\,\mathrm{d}V = 0 \qquad (82)$$

czyli druga postać

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0 \qquad (83)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równnie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho \,\mathrm{d}V = 0 \tag{84}$$

Za pomocą twierdzenia (76) dla $f = 1$ mamy trzecią (całkową) postać

$$\underbrace{\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V}_{\text{zamiany wew. } V} + \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+} \rho \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}S}_{\text{strumień przez } \partial V} = 0 \tag{85}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Różniczkowe postaci równania zachowania masy:

- pierwsza

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

- druga

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$$

Druga postać

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \qquad (86)$$

Niewiadome ρ, u_x, u_y, u_z

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy – uproszczenia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad (87)$$

- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad (88)$$

  Niewiadome ρ, u_x, u_y, u_z

- $\rho = \mathrm{const}$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad (89)$$

  Niewiadome u_x, u_y, u_z

- $\rho = \mathrm{const}$ i potencjalność

  $\mathbf{u} = \nabla \varphi \iff \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \qquad (90)$$

  Niewiadoma φ

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

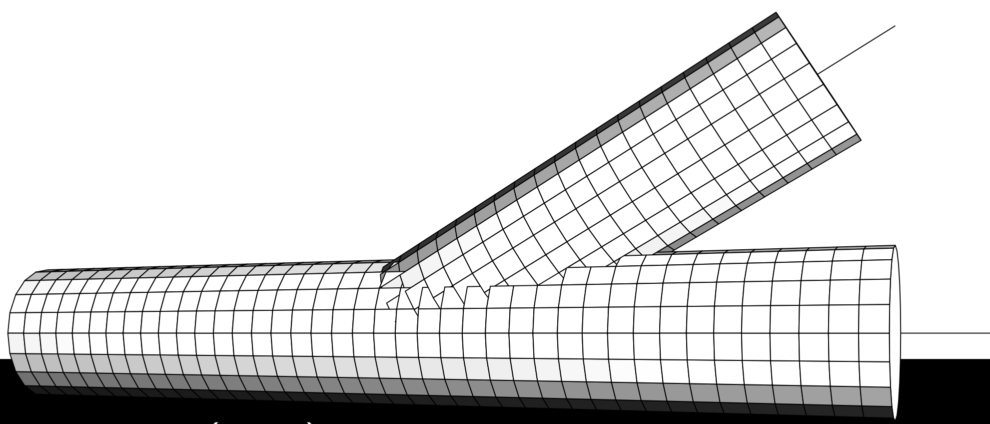
Równanie zachowania masy – interpretacja

Całkowa postać równania zachowania masy (85)

$$\underbrace{\iiint\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \,\mathrm{d}V}_{\text{zamiany wew. } V} + \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+} \rho \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}S}_{\text{strumień przez } \partial V} = 0 \qquad (91)$$

przy założeniu stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \rho \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u} \,\mathrm{d}S = 0 \qquad (92)$$



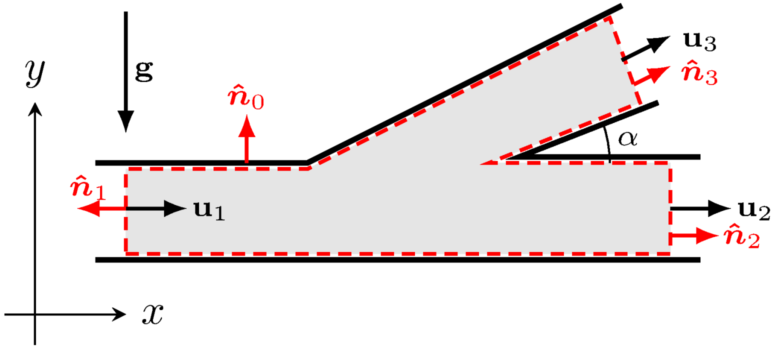
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy – interpretacja

$$\oiint_{\partial V^+} \rho \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S = 0 \qquad (93)$$

$$\underbrace{\iint_{S_0} \rho_0 \hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \, \mathrm{d}S}_{=0, \quad \hat{\boldsymbol{n}}_0 \perp \mathbf{u}_0} + \iint_{S_1} \underbrace{\rho_1 \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \mathbf{u}_1}_{<0} \, \mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_2} \underbrace{\rho_2 \hat{\boldsymbol{n}}_2 \cdot \mathbf{u}_2}_{>0} \, \mathrm{d}S + \iint_{S_3} \underbrace{\rho_3 \hat{\boldsymbol{n}}_3 \cdot \mathbf{u}_3}_{>0} \, \mathrm{d}S = 0 \qquad (94)$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy – interpretacja

$$-\iint\limits_{S_1} \rho_1 u_{1n} \, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \rho_2 u_{2n} \, \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_3} \rho_3 u_{3n} \, \mathrm{d}S = 0 \tag{95}$$

Średnia prędkość

$$\bar{u}_n = \frac{\iint\limits_S u_n \, \mathrm{d}S}{\iint\limits_S \mathrm{d}S} = \frac{\iint\limits_S u_n \, \mathrm{d}S}{|S|} \tag{96}$$

Średnia gęstość

$$\bar{\rho} = \frac{\iint\limits_S \rho u_n \, \mathrm{d}S}{\iint\limits_S u_n \, \mathrm{d}S} = \frac{\iint\limits_S \rho u_n \, \mathrm{d}S}{\bar{u}_n |S|} \tag{97}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy – interpretacja

$$-\bar{\rho}_1 \bar{u}_{1n} |S_1| + \bar{\rho}_2 \bar{u}_{2n} |S_2| + \bar{\rho}_3 \bar{u}_{3n} |S_3| = 0 \tag{98}$$

Jednostka

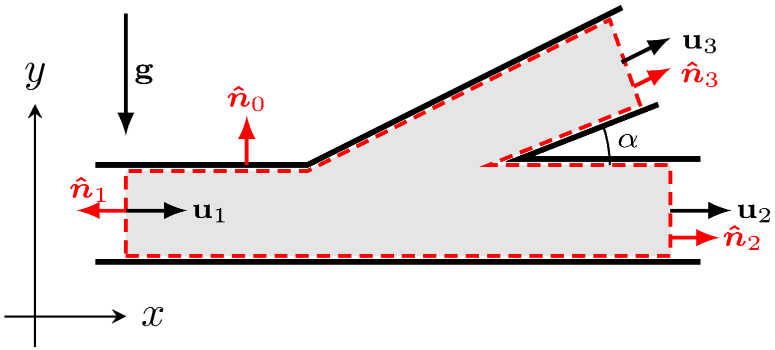
$$[\bar{\rho} \bar{u}_n |S|] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \tag{99}$$

Masowe natężenia przepływu

$$\dot{m} = \bar{\rho} \bar{u}_n |S| \tag{100}$$

Ostatecznie

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \tag{101}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy – interpretacja

Jeżeli gęstość jest stała

$$-\bar{u}_{1n}|S_1| + \bar{u}_{2n}|S_2| + \bar{u}_{3n}|S_3| = 0 \tag{102}$$

Jednostka

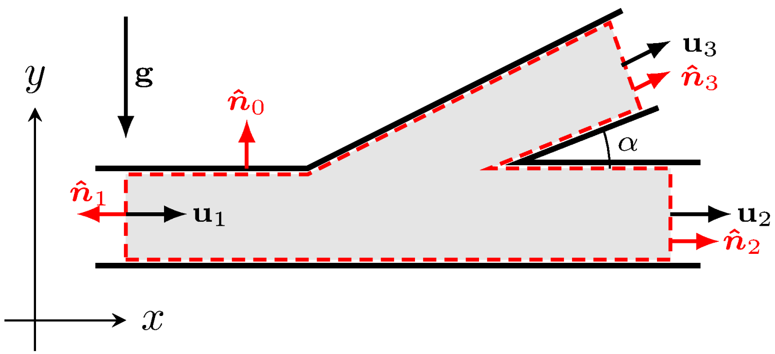
$$[\bar{u}_n|S|] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \tag{103}$$

Objętościowe natężenia przepływu

$$\dot{V} = \bar{u}_n|S| \tag{104}$$

Ostatecznie

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \tag{105}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu
  - momentu pędu
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
  - ...
  - ...

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

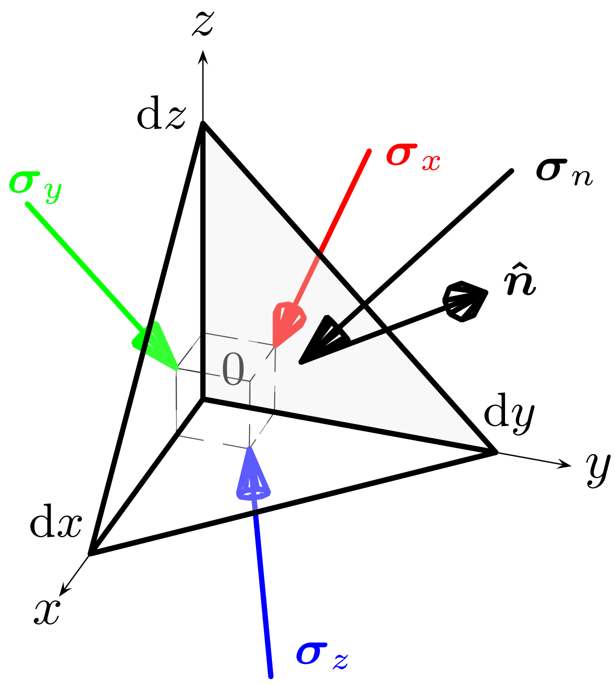
Dynamika

Dwa rodzaje sił:

- masowe

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_V}{\mathrm{d}V} \tag{106}$$

- powierzchniowe



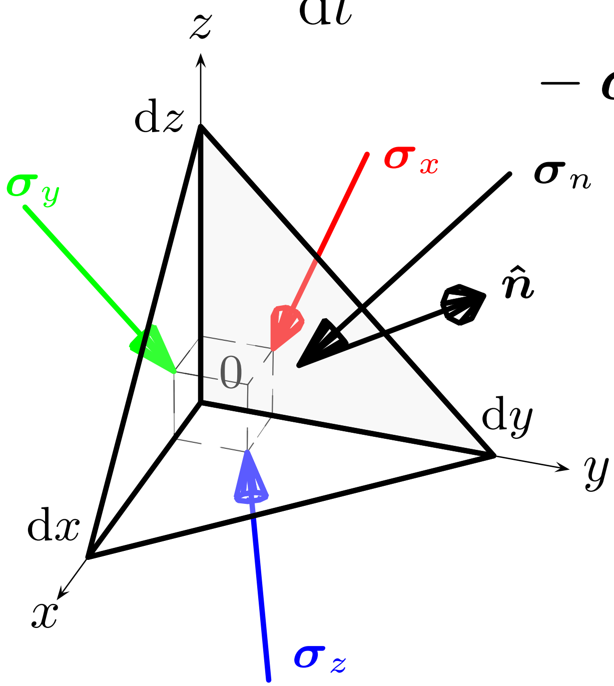
$$\boldsymbol{\sigma}_n = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_S}{\mathrm{d}S} \tag{107}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Siły i stan naprężenia

Siły działające na elementarny czworościan

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V = \rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S$$
$$- \boldsymbol{\sigma}_x\,\mathrm{d}D_{yz} - \boldsymbol{\sigma}_y\,\mathrm{d}D_{xz} - \boldsymbol{\sigma}_z\,\mathrm{d}D_{xy} \quad (108)$$



$$\mathrm{d}V \sim \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad (109)$$

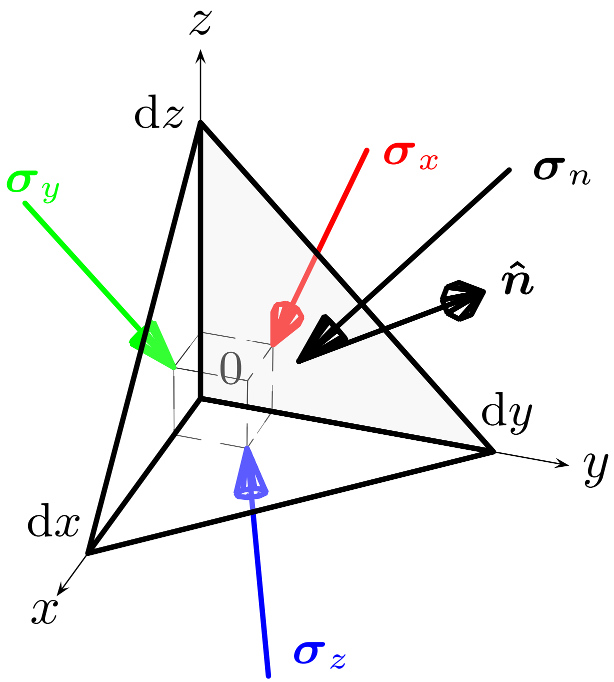
$$\mathrm{d}D_{xy} \sim \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (110)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{\sigma}_x\,\mathrm{d}D_{yz} + \boldsymbol{\sigma}_y\,\mathrm{d}D_{xz} + \boldsymbol{\sigma}_z\,\mathrm{d}D_{xy} \quad (111)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$\boldsymbol{\sigma}_n \,\mathrm{d}S = \boldsymbol{\sigma}_x \,\mathrm{d}D_{yz} + \boldsymbol{\sigma}_y \,\mathrm{d}D_{xz} + \boldsymbol{\sigma}_z \,\mathrm{d}D_{xy} \tag{112}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}z & \mathrm{d}x \,\mathrm{d}z & \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \end{pmatrix} \tag{113}$$



$$\hat{\boldsymbol{n}} = n_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + n_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + n_z \hat{\boldsymbol{k}} \tag{114}$$

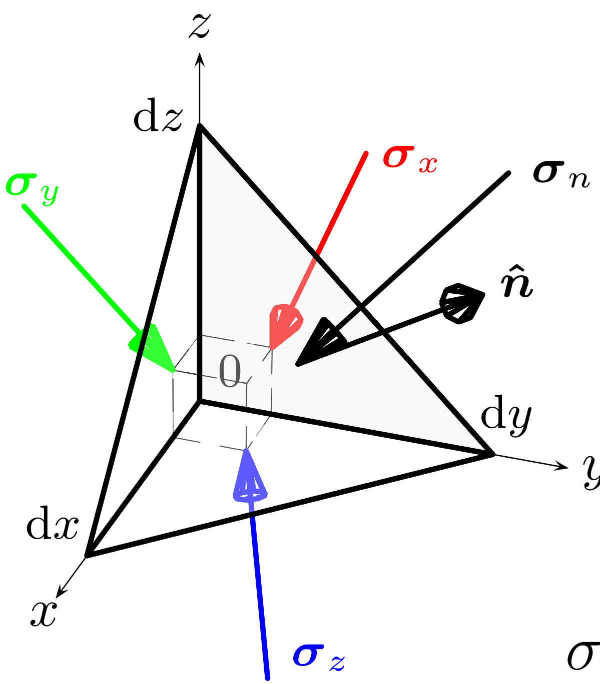
$$\mathrm{d}D_{xy} = n_z \,\mathrm{d}S \tag{115}$$

$$\mathrm{d}D_{xz} = n_y \,\mathrm{d}S \tag{116}$$

$$\mathrm{d}D_{yz} = n_x \,\mathrm{d}S \tag{117}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = n_x \boldsymbol{\sigma}_x + n_y \boldsymbol{\sigma}_y + n_z \boldsymbol{\sigma}_z \tag{118}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura



$$\boldsymbol{\sigma}_n = n_x\boldsymbol{\sigma}_x + n_y\boldsymbol{\sigma}_y + n_z\boldsymbol{\sigma}_z \tag{119}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{nx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sigma_{ny}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \sigma_{nz}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{120}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \sigma_{xx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sigma_{xy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \sigma_{xz}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{121}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \sigma_{yx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sigma_{yy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \sigma_{yz}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{122}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \sigma_{zx}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sigma_{zy}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \sigma_{zz}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{123}$$

$$\sigma_{nx} = n_x\sigma_{xx} + n_y\sigma_{yx} + n_z\sigma_{zx} \tag{124}$$

$$\sigma_{ny} = n_x\sigma_{xy} + n_y\sigma_{yy} + n_z\sigma_{zy} \tag{125}$$

$$\sigma_{nz} = n_x\sigma_{xz} + n_y\sigma_{yz} + n_z\sigma_{zz} \tag{126}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

To samo w zapisie macierzowym

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \sigma_{ny} & \sigma_{nx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{127}$$

Wzór Cauchy'ego

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{128}$$

Tensor naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{129}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu

Siły

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_V = \rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}V, \quad \mathrm{d}\mathbf{F}_S = \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \tag{130}$$

Sformułowanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \tag{131}$$

Wzór Cauchy'ego

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{132}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S \tag{133}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V}_{\text{tw. Reynoldsa (74)}} = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S}_{\text{tw. Gaussa}} \quad (134)$$

$$\iiint\limits_V \rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \mathbf{u}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u}\right)}_{\text{r.z.m.}=0}\mathrm{d}V =$$

$$\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V \quad (135)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu

Pierwsza postać całkowa

$$\iiint\limits_V \rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V \tag{136}$$

Postać różniczkowa

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{137}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{138}$$

Jedno równanie wektorowe (trzy równania skalarne). Dodatkowe niewiadome σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yx}, σ_{yy}, σ_{yz}, σ_{zx}, σ_{zy}, σ_{zz} oprócz dotychczasowych ρ, u_x, u_y, u_z

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V}_{\text{tw. Reynoldsa (76)}} = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S \quad (139)$$

Druga postać całkowa

$$\iiint\limits_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \rho\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S \quad (140)$$

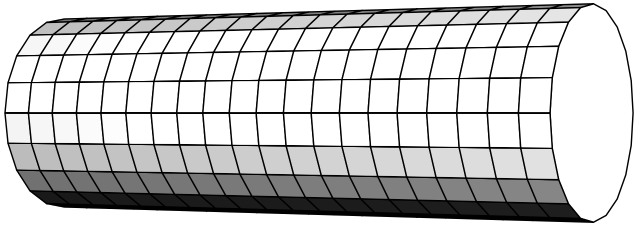
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint_{\partial V^+} \rho\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint_{\partial V^+} \underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}}_{\text{Cauchy}}\,\mathrm{d}S \quad (141)$$

Założenie stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

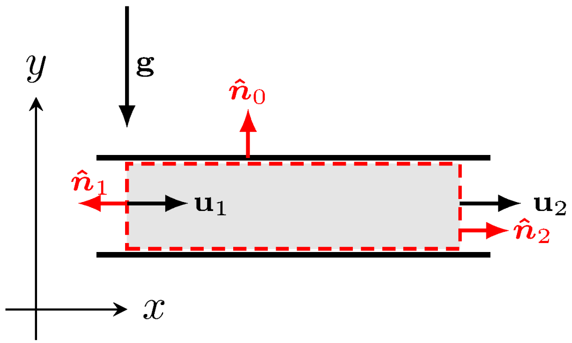
$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V^+} \rho\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \quad (142)$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$\underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S}_{?} = \iiint\limits_{V} \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \qquad (143)$$



$$\oiint\limits_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_0} \underbrace{\rho_0\mathbf{u}_0\mathbf{u}_0\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_0}_{=\mathbf{0},\quad \hat{\boldsymbol{n}}_0\perp\mathbf{u}_0}\,\mathrm{d}S +$$

$$\iint\limits_{S_1} \rho_1\mathbf{u}_1\underbrace{\mathbf{u}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1}_{<0}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \rho_2\mathbf{u}_2\underbrace{\mathbf{u}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2}_{>0}\,\mathrm{d}S =$$

$$-\iint\limits_{S_1} \rho_1\mathbf{u}_1 u_{1n}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \rho_2\mathbf{u}_2 u_{2n}\,\mathrm{d}S \qquad (144)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$\oiint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = - \iint_{S_1} \rho_1 \mathbf{u}_1 u_{1n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho_2 \mathbf{u}_2 u_{2n}\,\mathrm{d}S \quad (145)$$

Średni wektor prędkości

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\iint_S \rho \mathbf{u} u_n\,\mathrm{d}S}{\iint_S \rho u_n\,\mathrm{d}S} = \frac{\iint_S \rho \mathbf{u} u_n\,\mathrm{d}S}{\dot{m}} \quad (146)$$

pozwala zapisać

$$\oiint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = -\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2 \quad (147)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$-\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2 = \underbrace{\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V}_{?} + \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \qquad (148)$$

Gęstość rozkładu sił masowych $\mathbf{f}$ sprowadza się do wektora grawitacji $\mathbf{g}$

$$\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{g}\,\mathrm{d}V = \mathbf{g}\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}V = \mathbf{g}M \qquad (149)$$

co pozwala zapisać

$$-\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g}M + \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \qquad (150)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$-\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g}M + \underbrace{\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \,\mathrm{d}S}_{?} \qquad (151)$$

Dekompozycja wektora naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_{nn} + \boldsymbol{\sigma}_{nt} \qquad (152)$$

daje

$$\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \,\mathrm{d}S = \underbrace{\iint_{S_0} \left(\boldsymbol{\sigma}_{nn0} + \boldsymbol{\sigma}_{nt0}\right) \mathrm{d}S}_{=\mathbf{R}_0} +$$

$$\iint_{S_1} \Big(\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nn1}}_{=-\sigma_{nn1}\hat{\boldsymbol{n}}_1} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nt1}}_{\approx\mathbf{0}} \Big) \mathrm{d}S + \iint_{S_2} \Big(\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nn2}}_{=-\sigma_{nn2}\hat{\boldsymbol{n}}_2} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nt2}}_{\approx\mathbf{0}} \Big) \mathrm{d}S =$$

$$\mathbf{R}_0 - \hat{\boldsymbol{n}}_1 \iint_{S_1} p_1 \,\mathrm{d}S - \hat{\boldsymbol{n}}_2 \iint_{S_2} p_2 \,\mathrm{d}S \qquad (153)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \,\mathrm{d}S = \mathbf{R}_0 - \hat{\boldsymbol{n}}_1 \iint\limits_{S_1} p_1 \,\mathrm{d}S - \hat{\boldsymbol{n}}_2 \iint\limits_{S_2} p_2 \,\mathrm{d}S \quad (154)$$

Średnie ciśnienie

$$\bar{p} = \frac{\iint\limits_{S} p \,\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S} \mathrm{d}S} = \frac{\iint\limits_{S} p \,\mathrm{d}S}{|S|} \quad (155)$$

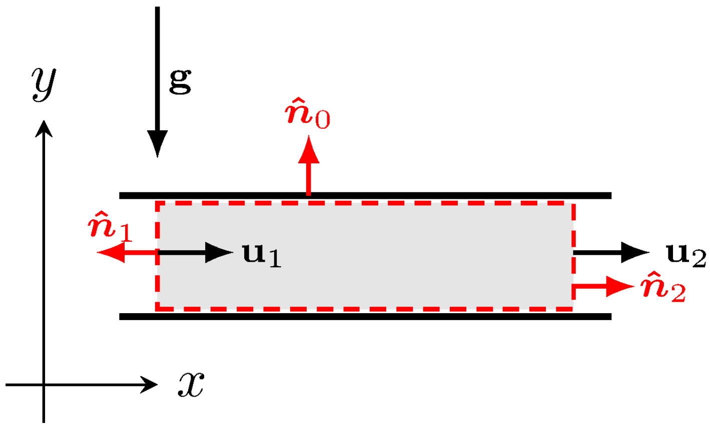
prowadzi do

$$-\dot{m}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2 \bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g} M + \mathbf{R}_0 - \bar{p}_1 |S_1| \hat{\boldsymbol{n}}_1 - \bar{p}_2 |S_2| \hat{\boldsymbol{n}}_2 \quad (156)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$-\dot{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g}M + \mathbf{R}_0 - \bar{p}_1|S_1|\hat{\boldsymbol{n}}_1 - \bar{p}_2|S_2|\hat{\boldsymbol{n}}_2 \tag{157}$$



$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{u}_1\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{158}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{u}_2\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{159}$$

$$\mathbf{g} = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{160}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_1 = -\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{161}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_2 = \hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{162}$$

$$\begin{aligned}-\dot{m}_1\bar{u}_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dot{m}_2\bar{u}_2\hat{\boldsymbol{\imath}} = -gM\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \\ R_{0x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + R_{0y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \bar{p}_1|S_1|\hat{\boldsymbol{\imath}} - \bar{p}_2|S_2|\hat{\boldsymbol{\imath}}\end{aligned} \tag{163}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu – interpretacja

$$-\dot{m}_1\bar{u}_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dot{m}_2\bar{u}_2\hat{\boldsymbol{\imath}} = -gM\hat{\boldsymbol{\jmath}} + R_{0x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + R_{0y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \bar{p}_1|S_1|\hat{\boldsymbol{\imath}} - \bar{p}_2|S_2|\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{164}$$

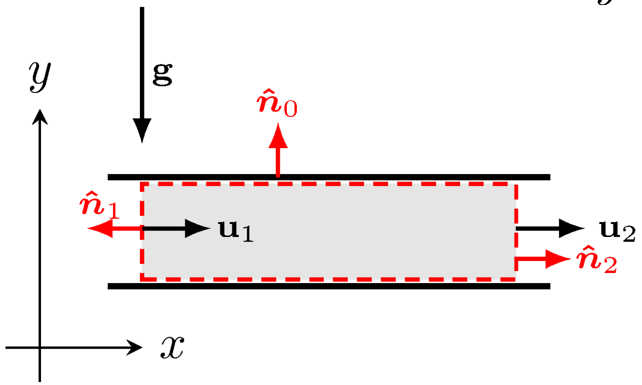
$$-\dot{m}_1\bar{u}_1 + \dot{m}_2\bar{u}_2 = R_{0x} + \bar{p}_1|S_1| - \bar{p}_2|S_2| \tag{165}$$

$$0 = -gM + R_{0y} \tag{166}$$

Jeżeli $|S_1| = |S_2| = |S|$, to $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ i $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$

$$R_x = -R_{0x} = (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\,|S| \tag{167}$$

$$R_y = -R_{0y} = -gM \tag{168}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
  - ...
  - ...

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania momentu pędu

Z równanie tego wynika, że

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{169}$$

Pozwala to zredukować liczbą niewiadomych o trzy ρ, u_x, u_y, u_z, σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yy}, σ_{yz}, σ_{zz}

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu (wniosek) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
  - ...
  - ...

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Hipoteza Newtona

Dekompozycja na część odwracalną $-p_t \boldsymbol{\delta}$ i nieodwracalną (lepką) $\boldsymbol{\tau}$ w postaci

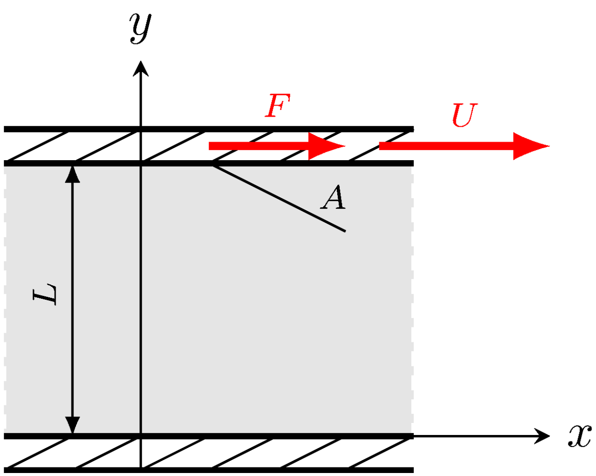
$$\boldsymbol{\sigma} = -p_t \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{170}$$

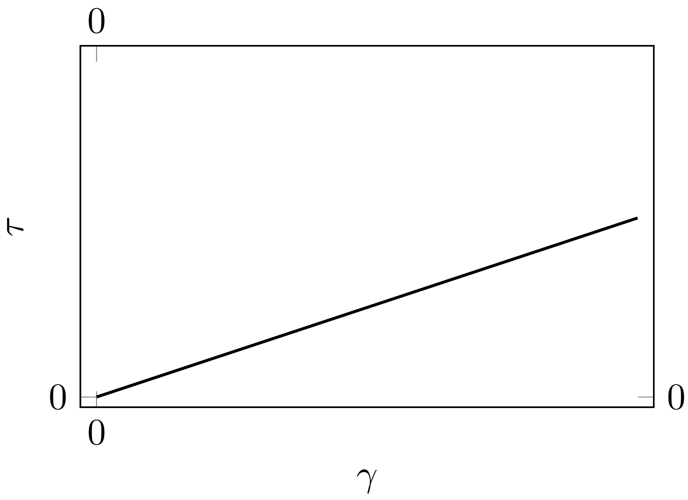
Poszukiwana jest zależność na tensor $\boldsymbol{\tau}$.
Hipoteza Newtona jest tzw. mechanicznym lub reologicznym równaniem konstytutywnym.
Ponieważ $\boldsymbol{\sigma}$ jest symetryczny, więc $\boldsymbol{\tau}$ jest również symetryczny

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \tag{171}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Hipoteza Newtona





$$\frac{F}{A} \sim \frac{U}{L} \tag{172}$$

$$\tau_{xy} \sim \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{173}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{174}$$

$$\tau = \mu \gamma \tag{175}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Hipoteza Newtona

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_t \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{176}$$

Najogólniej można zapisać, że lepka (nieodwracalna) część tensora naprężenia ma postać (dlaczego?)

$$\boldsymbol{\tau} = f(\nabla \mathbf{u}), \tag{177}$$

ale $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$, więc

$$\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{D}) \tag{178}$$

Najogólniejsza postać $\boldsymbol{\tau}$ wynika z twierdzenia Cayleya-Hamiltona

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 \tag{179}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{D}$ ma postać

$$w(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{\delta} - \mathbf{D}| \tag{180}$$

czyli

$$w(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ & \lambda & 0 \\ & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ & D_{yy} & D_{yz} \\ & & D_{zz} \end{pmatrix} \right| \tag{181}$$

lub

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - D_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ & \lambda - D_{yy} & -D_{yz} \\ & & \lambda - D_{zz} \end{vmatrix} \tag{182}$$

lub ostatecznie

$$w(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{183}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Wielomian charakterystyczny

$$w(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{184}$$

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona mówi, że $\mathbf{D}$ jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego

$$w(\mathbf{D}) = \mathbf{0} \tag{185}$$

lub

$$\mathbf{D}^3 + b_2\mathbf{D}^2 + b_1\mathbf{D} + b_0\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \tag{186}$$

skąd wynika (dlaczego?) najogólniejsza postać $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = a_0\boldsymbol{\delta} + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 \tag{187}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Najogólniejsza postać $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \boldsymbol{\delta} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 \tag{188}$$

i to samo po rozpisaniu

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + a_2 \mathbf{D}^2 \tag{189}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Hipoteza Newtona

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$a_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + a_2 \mathbf{D}^2$$

Dla pierwszego wiersza i drugiej kolumny mamy

$$\tau_{xy} = a_0\, 0 + a_1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial u_y}{\partial x}}\right) + \left(a_2 \mathbf{D}^2\right)_{xy} \tag{190}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{191}$$

skąd wynika, że $a_1 = 2\mu$, $a_2 = 0$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Hipoteza Newtona

Najogólniejsza postać $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = a_0\boldsymbol{\delta} + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 \tag{192}$$

ale $a_1 = 2\mu$, $a_2 = 0$, więc

$$\boldsymbol{\tau} = a_0\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{193}$$

Skoro całkowity tensor naprężenia na postać

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_t\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{194}$$

zatem

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(-p_t + a_0\right)\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{195}$$

Nie znamy jednak a_0...

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Hipoteza Newtona

Najogólniejsza postać tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p_t + a_0)\,\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{196}$$

Skoro obie strony (tensory) są sobie równe, więc równe muszą być ich niezmienniki

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = (-p_t + a_0)\operatorname{tr}\boldsymbol{\delta} + 2\mu\operatorname{tr}\mathbf{D} \tag{197}$$

Poszczególne niezmienniki mają postać $p = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{\delta} = 3, \quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = \nabla\cdot\mathbf{u}$, zatem

$$-3p = (-p_t + a_0)\,3 + 2\mu\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{198}$$

skąd wynika

$$-p_t + a_0 = -p - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{199}$$

Ostateczna postać tensora naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(-p - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{200}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Hipoteza Newtona

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(-p - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}$$

Tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ zapisany inaczej

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\underbrace{\left(\mathbf{D} - \boldsymbol{\delta}\tfrac{1}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)}_{\mathbf{D}^{\mathrm{D}}} \tag{201}$$

Ostatecznie dla płynów newtonowskich mamy

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{202}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{203}$$

lub dla płynów nieściśliwych $\mathbf{D}^{\mathrm{D}} = \mathbf{D}$ (dlaczego?)

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{204}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \tag{205}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Płyn i ciało stałe

Płyn	Ciało stałe
hipoteza Newtona	prawo Hooke'a
$\tau = \mu\gamma$	$\sigma = E\varepsilon$
$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{\left(-\frac{2}{3}\mu \operatorname{tr}\mathbf{D}\right)\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}}_{=2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}}$	$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\,\boldsymbol{\delta} + 2G\boldsymbol{\varepsilon}$
$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$	
	$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(-\frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu (wniosek) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
    - newtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}$
    - nienewtonowskie
  - ...
  - ...

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równania Naviera-Stokesa i Eulera

Równanie zachowania pędu

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{206}$$

Dekompozycja

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_t \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} \tag{207}$$

Równanie zachowania pędu po dekompozycji

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{208}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równania Naviera-Stokesa i Eulera

Równanie zachowania pędu

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{209}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} \tag{210}$$

Hipoteza Newtona

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{211}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{212}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D} \tag{213}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \tag{214}$$

Równanie N.-S. $=$ r.z.p. $+$ h.N.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równania Naviera-Stokesa i Eulera

- $\rho = \mathrm{var},\ \mu = \mathrm{var}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \left(2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}}\right) \tag{215}$$

- $\rho = \mathrm{const},\ \mu = \mathrm{var}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{216}$$

- $\rho = \mathrm{var},\ \mu = \mathrm{const}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \tfrac{1}{3}\mu \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) \tag{217}$$

- $\rho = \mathrm{const},\ \mu = \mathrm{const}$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{218}$$

- $\mu = 0$ równanie Eulera

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p \tag{219}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

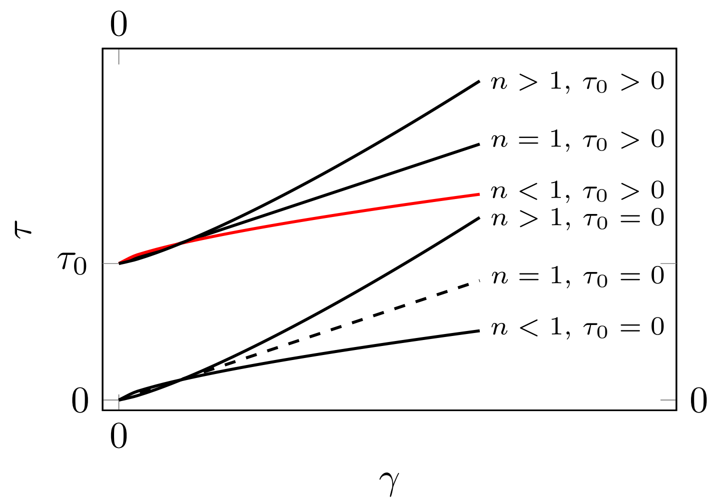
Płyny nienewtonowskie

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D} \tag{220}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu(\gamma)\mathbf{D} \tag{221}$$

Krzywa płynięcia

$$\tau = \mu(\gamma)\gamma \tag{222}$$



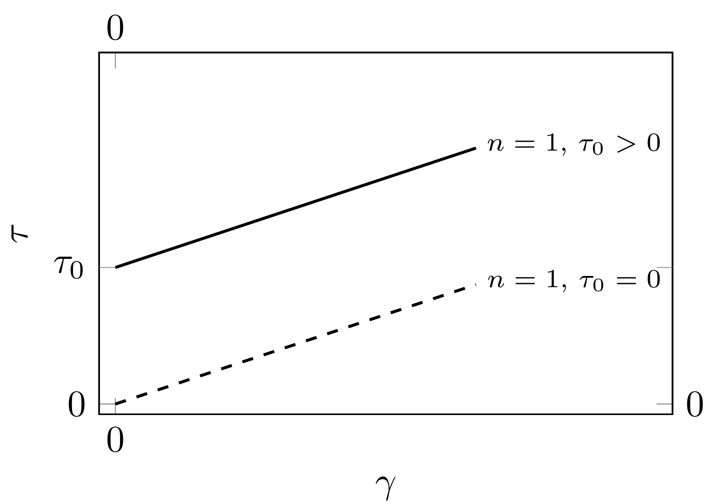
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Model Binghama

$$\tau = \tau_0 + k\gamma \tag{223}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau_0}{|\gamma|} + k \tag{224}$$

k – stała konsystencji
τ_0 – granica płynięcia



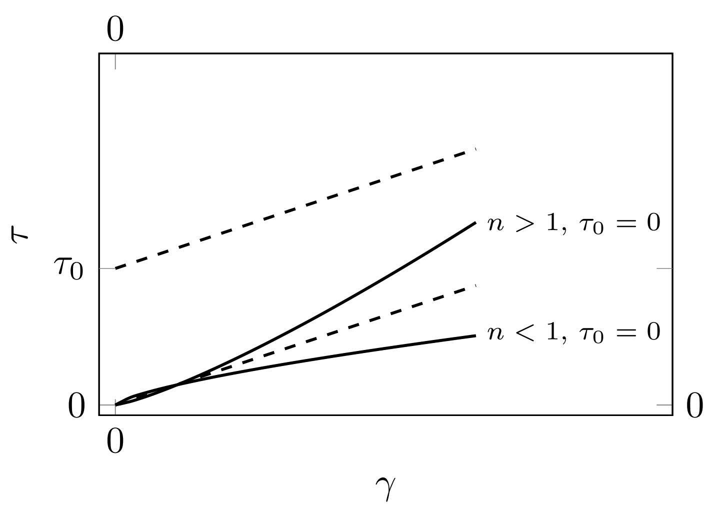
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Model Ostwalda-de Waele

$$\tau = k\gamma^n \tag{225}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = k|\gamma|^{n-1} \tag{226}$$

n – bezwymiarowy parametr reologiczny
k – stała konsystencji



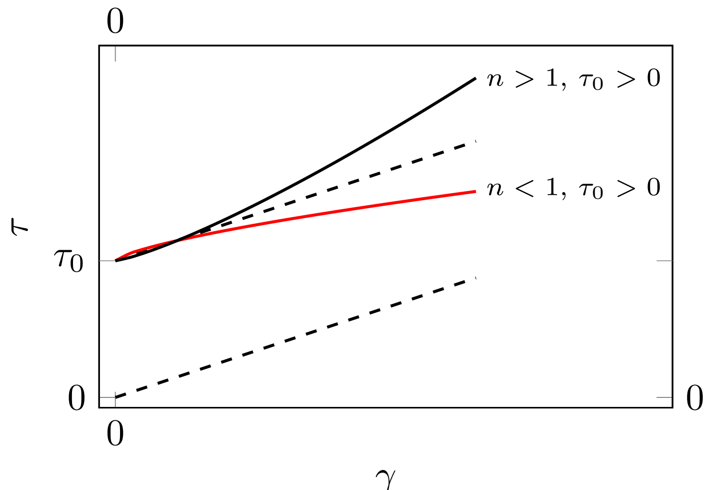
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Model Herschela-Bulkleya

$$\tau = \tau_0 + k\gamma^n \tag{227}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \tau_0|\gamma|^{-1} + k|\gamma|^{n-1} \tag{228}$$

k – stała konsystencji
τ_0 – granica płynięcia
n – bezwymiarowy parametr reologiczny



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu (wniosek) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$
  - energii
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
    - newtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}$
    - nienewtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$
  - ...
  - ...

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Energia i entropia

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = P + Q \tag{229}$$

Sformułowanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint\limits_V \rho \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e\right)}_{=e_k} \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho \, \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{q} \, \mathrm{d}S \tag{230}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}u^2+e\right)}_{=e_k}\mathrm{d}V}_{\text{tw. Reynoldsa (74)}} = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S}_{\text{tw. Gaussa}} - \underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S}_{\text{tw. Gaussa}} \quad (231)$$

$$\iiint\limits_V \rho\frac{\mathrm{d}e_k}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V + \iiint\limits_V e_k\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\mathbf{u}\right)}_{\text{r.z.m.}=0}\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{q})\,\mathrm{d}V \quad (232)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii

Pierwsza postać całkowa

$$\iiint\limits_V \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{q}\right)\mathrm{d}V \quad (233)$$

Postać różniczkowa

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e\right) = \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{q}\right) \quad (234)$$

Jedno równanie skalarne. Dodatkowe niewiadome – trzy składowe wektora $\mathbf{q}$ i e

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho e_k \,\mathrm{d}V}_{\text{tw. Reynoldsa (76)}} = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \quad (235)$$

Druga postać całkowa

$$\iiint\limits_V \frac{\partial\left(\rho e_k\right)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \rho e_k \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \quad (236)$$

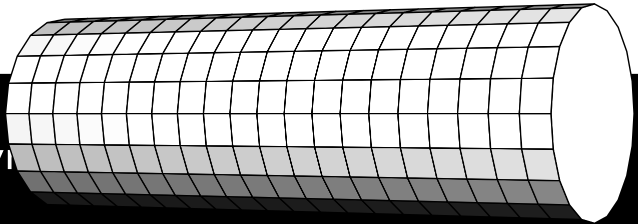
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\iiint\limits_V \frac{\partial(\rho e_k)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \rho e_k \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{237}$$

Założenie stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{f} = -\nabla\Pi \implies \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} = \rho\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t}$

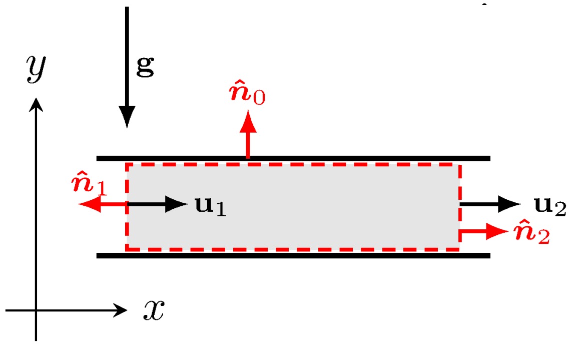
$$\oiint\limits_{\partial V^+} \rho \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e + \Pi\right)}_{=e_m} \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{238}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\underbrace{\oiint_{\partial V^+} \rho\, e_m \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S}_{?} = \oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \oiint_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{239}$$



$$\oiint_{\partial V^+} \rho\, e_m \mathbf{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_0} \underbrace{\rho_0\, e_{m0}\mathbf{u}_0\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_0}_{=0,\quad \hat{\boldsymbol{n}}_0\perp\mathbf{u}_0}\,\mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_1} \rho_1\, e_{m1}\underbrace{\mathbf{u}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1}_{<0}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho_2\, e_{m2}\underbrace{\mathbf{u}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2}_{>0}\,\mathrm{d}S =$$

$$-\iint_{S_1} \rho_1\, e_{m1} u_{1n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho_2\, e_{m2} u_{2n}\,\mathrm{d}S \tag{240}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\oiint_{\partial V^+} \rho\, e_m \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S =$$

$$- \iint_{S_1} \rho_1\, e_{m1} u_{1n}\, \mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho_2\, e_{m2} u_{2n}\, \mathrm{d}S \qquad (241)$$

Średnia energia mechaniczna

$$\bar{e}_m = \frac{\iint_S \rho\, e_m u_n\, \mathrm{d}S}{\iint_S \rho\, u_n\, \mathrm{d}S} = \frac{\iint_S \rho\, e_m u_n\, \mathrm{d}S}{\dot{m}} \qquad (242)$$

$$\oiint_{\partial V^+} \rho\, e_m \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = -\dot{m}_1\, \bar{e}_{m1} + \dot{m}_2\, \bar{e}_{m2} \qquad (243)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$-\dot m_1\,\bar e_{m1} + \dot m_2\,\bar e_{m2} = \underbrace{\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}S}_{?} - \oiint_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{q}\,\mathrm{d}S$$

Rozkład wektora naprężenia (244)

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_{nn} + \boldsymbol{\sigma}_{nt} \qquad (245)$$

pozwala zapisać

$$\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_0} \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}_{nn0} + \boldsymbol{\sigma}_{nt0}) \cdot \mathbf{u}_0}_{=0,\quad \mathbf{u}_0=\mathbf{0}}\,\mathrm{d}S +$$

$$\iint_{S_1} (\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nn1}}_{=-p_1\hat{\boldsymbol{n}}_1} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nt1}}_{=0,\boldsymbol{\sigma}_{nt1}\perp\mathbf{u}_1}) \cdot \mathbf{u}_1\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} (\underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nn2}}_{=-p_2\hat{\boldsymbol{n}}_2} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{nt2}}_{=0}) \cdot \mathbf{u}_2\,\mathrm{d}S =$$

$$\iint_{S_1} p_1 \underbrace{u_{1n}}_{<0}\,\mathrm{d}S - \iint_{S_2} p_2 \underbrace{u_{2n}}_{>0}\,\mathrm{d}S \qquad (246)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} \frac{p_1}{\rho_1}\rho_1 u_{1n}\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_2} \frac{p_2}{\rho_2}\rho_2 u_{2n}\,\mathrm{d}S \tag{247}$$

Średnia energia ciśnienia

$$\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)} = \frac{\iint\limits_{S} \frac{p}{\rho}\rho\, u_n\,\mathrm{d}S}{\iint\limits_{S} \rho\, u_n\,\mathrm{d}S} = \frac{\iint\limits_{S} \frac{p}{\rho}\rho\, u_n\,\mathrm{d}S}{\dot{m}} \tag{248}$$

prowadzi do

$$-\dot{m}_1\,\bar{e}_{m1} + \dot{m}_2\,\bar{e}_{m2} = \dot{m}_1\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_1 - \dot{m}_2\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_2 - \oiint\limits_{\partial V^+} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{q}\,\mathrm{d}S \tag{249}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$-\dot{m}_1\,\bar{e}_{m1}+\dot{m}_2\,\bar{e}_{m2}=\dot{m}_1\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_1-\dot{m}_2\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_2-\underbrace{\oiint\limits_{\partial V^+}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S}_{?} \quad (250)$$

Strumienie ciepła

$$\oiint\limits_{\partial V^+}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_0}\underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_0\cdot\mathbf{q}_0}_{<0}\,\mathrm{d}S+$$
$$\iint\limits_{S_1}\underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_1\cdot\mathbf{q}_1}_{=0,\ \mathbf{q}_1=\mathbf{0}}\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2}\underbrace{\hat{\boldsymbol{n}}_2\cdot\mathbf{q}_2}_{=0,\ \mathbf{q}_2=\mathbf{0}}\,\mathrm{d}S=$$
$$-\iint\limits_{S_0}q_{n0}\,\mathrm{d}S=-Q_0 \quad (251)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$-\dot{m}_1\,\bar{e}_{m1} + \dot{m}_2\,\bar{e}_{m2} = \dot{m}_1\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_1 - \dot{m}_2\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}_2 + Q_0 \quad (252)$$

$$\dot{m}_2\underbrace{\left(\overline{\frac{1}{2}u^2} + \bar{e} + \bar{\Pi} + \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}\right)_2}_{=\bar{e}_{c2}} - \dot{m}_1\underbrace{\left(\overline{\frac{1}{2}u^2} + \bar{e} + \bar{\Pi} + \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}\right)_1}_{=\bar{e}_{c1}} = Q_0 \quad (253)$$

gdzie e_c – energia całkowita

$$\dot{m}_2\,\bar{e}_{c2} - \dot{m}_1\,\bar{e}_{c1} = Q_0 \quad (254)$$

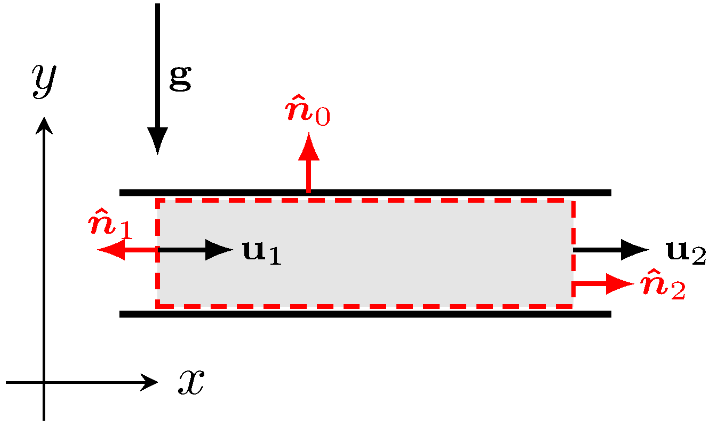
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii – interpretacja

$$\dot{m}_2\,\bar{e}_{c2} - \dot{m}_1\,\bar{e}_{c1} = Q_0 \tag{255}$$

Jeżeli dodatkowo $Q_0 = 0$, to $\bar{e}_{c2} = \bar{e}_{c1}$, bo $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$

$$\left(\overline{\frac{1}{2}u^2} + \bar{e} + \bar{\Pi} + \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}\right)_1 = \left(\overline{\frac{1}{2}u^2} + \bar{e} + \bar{\Pi} + \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)}\right)_2 \tag{256}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania energii

Postać różniczkowa

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}u^2 + e\right) = \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{q}) \qquad (257)$$

Kaloryczne równanie stanu

$$\mathrm{d}e = c_v\,\mathrm{d}T \qquad (258)$$

Prawo Fouriera

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T \qquad (259)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Zasady termodynamiki

- Druga zasada termodynamiki

$$\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \geqslant -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \tag{260}$$

- Bilans entropii

$$\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\phi}{T} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \tag{261}$$

- Pierwsza zasada termodynamiki

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \tag{262}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Pierwsza zasada termodynamiki

Pierwszą zasadę otrzymujemy, mnożąc skalarnie przez $\mathbf{u}$ równanie (206) i odejmując od równania (234)

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \underbrace{\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}}_{=-p\nabla\cdot\mathbf{u}} - \nabla \cdot \mathbf{q} \tag{263}$$

Potrzebne są aż trzy równania konstytutywne

$$\underbrace{c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}}_{\mathrm{d}e = c_v\,\mathrm{d}T} = \underbrace{\phi_\mu}_{=\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{u}} + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot \underbrace{(\lambda \nabla T)}_{=-\mathbf{q}} \tag{264}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Pierwsza zasada termodynamiki

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \tag{265}$$

Funkcja dyssypacji ϕ składa się z części mechanicznej (lepkościowej) ϕ_μ i termicznej ϕ_λ

$$\phi = \phi_\mu + \phi_\lambda \tag{266}$$

Część mechaniczna funkcji dyssypacji

$$\phi_\mu = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} = 2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}2} \geqslant 0 \tag{267}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Pierwsza zasada termodynamiki

Równanie

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \qquad (268)$$

nazywane jest:

- pierwszą zasadą termodynamiki dla ośrodków ciągłych
- równaniem energii wewnętrznej
- równaniem Fouriera-Kirchhoffa

Dla $\rho = \mathrm{const}$ i $\lambda = \mathrm{const}$, otrzymujemy

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T \qquad (269)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie energii – podsumowanie

- Równanie zachowania energii

$$\rho \frac{\mathrm{d}e_k}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) \tag{270}$$

- Równanie energii mechanicznej (bez e)

$$\rho \frac{\mathrm{d}e_m}{\mathrm{d}t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) \tag{271}$$

- Równanie energii całkowitej

$$\rho \frac{\mathrm{d}e_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \tag{272}$$

- Równanie energii wewnętrznej

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \tag{273}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dwie grupy równań

- Równania zachowania
  - masy $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
  - pędu $\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$
  - momentu pędu (wniosek) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$
  - energii
    $\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}u^2 + e\right) = \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$
- Równania konstytutywne
  - reologiczne
    - newtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}$
    - nienewtonowskie $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$
  - stanu $p = \rho RT$, $\mathrm{d}e = c_v\,\mathrm{d}T$
  - strumienie (prawo Fouriera) $\mathbf{q} = -\lambda\nabla T$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Domknięte układy równań

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ i $\mu = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{274}$$

i równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{275}$$

Daje to cztery równania skalarne i cztery niewiadome p, u_x, u_y, u_z.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ i $\mu = f(T)$ mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{276}$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{277}$$

i równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T \tag{278}$$

Daje to sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych T, p, u_x, u_y, u_z, μ.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dla płynu ściśliwego $\rho = \mathrm{var}$, $\mu = \mathrm{const}$ i $c_v = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{279}$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \tfrac{1}{3} \mu \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u} \right) \tag{280}$$

równanie energii wewnętrznej

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \lambda \nabla^2 T \tag{281}$$

i równanie stanu $p = \rho R T$. Daje to sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych ρ, T, p, u_x, u_y, u_z.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dla płynu ściśliwego $\rho = \mathrm{var}$, $\mu = f_1(T)$ i $c_v = f_2(T)$ mamy równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{282}$$

równanie zachowania pędu (Naviera-Stokesa)

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \left(2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}\right) \tag{283}$$

równanie energii wewnętrznej

$$c_v\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \lambda\nabla^2 T \tag{284}$$

i równanie stanu $p = \rho RT$. Daje to osiem równań skalarnych i niewiadomych ρ, T, p, u_x, u_y, u_z, μ, c_v.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Płyn nienewtonowski.
Równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{285}$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{286}$$

Wzór na lepkość według wybranego modelu

$$\mu = f(\gamma) \tag{287}$$

Daje to pięć równań skalarnych i pięć niewiadomych p, u_x, u_y, u_z, μ.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Statyka

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Płyn w stanie równowagi:

- bezwzględnej – względem układu współrzędnych
- względnej – względem poruszającego się naczynia

Statyka:

- cieczy – hydrostatyka
- gazów – aerostatyka

Wykorzystuje się dotychczasowe równia przy założeniu, że płyn znajduje się w spoczynku

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{288}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{289}$$

przy założeniu $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, redukuje się do postaci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{290}$$

Wnioski:

- gęstość nie może być funkcją czasu
- gęstość może zależeć od położenia

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania pędu

Równanie zachowania pędu

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{291}$$

przy założeniu $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, redukuje się do postaci

$$\mathbf{0} = \rho\,\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{292}$$

a hipoteza Newtona

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}} \tag{293}$$

do

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} \tag{294}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie równowagi

Równanie zachowania pędu z hipotezą Newtona przyjmie postać równania równowagi

$$\rho\,\mathbf{f} = \nabla p \tag{295}$$

To samo w zapisie skalarnym

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \tag{296}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \tag{297}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \tag{298}$$

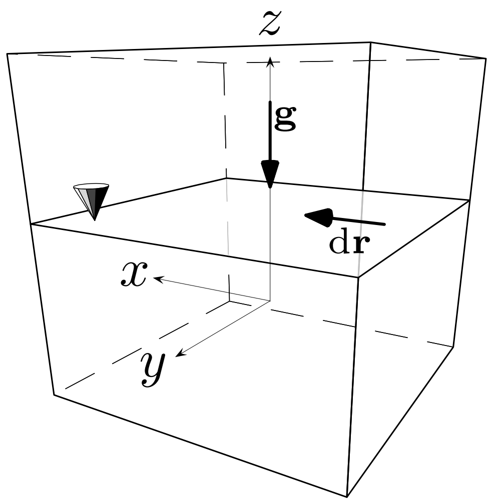
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Powierzchnia rozdziału

Dwa płyny o różnych gęstościach $\rho_1 \neq \rho_2$ mają dwa równania równowagi $\rho_1 \mathbf{g} = \nabla p_1$ i $\rho_2 \mathbf{g} = \nabla p_2$. Po przemożeniu przez niezerowy wektor $\mathrm{d}\mathbf{r}$

$$\rho_1 \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}p_1 \tag{299}$$

$$\rho_2 \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}p_2 \tag{300}$$



$$\nabla p_1 \neq \nabla p_2 \tag{301}$$

$$\mathrm{d}p_1 = \mathrm{d}p_2 \tag{302}$$

$$(\rho_1 - \rho_2)\, \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{303}$$

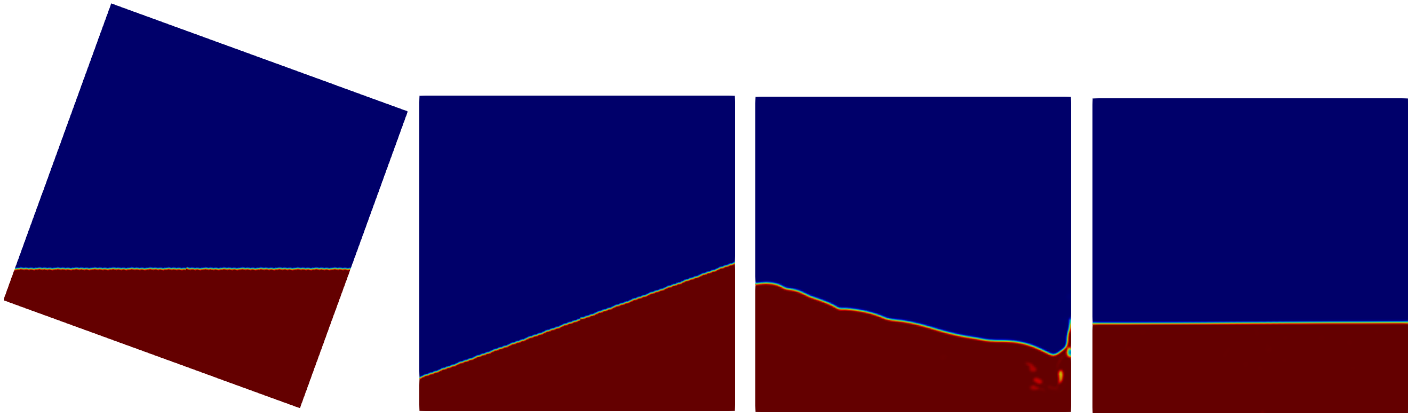
$$\mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g} \perp \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{304}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Powierzchnia rozdziału

Dwa płyny (powietrze i woda) o różnych gęstościach $\rho_1 \neq \rho_2$

$$\mathbf{g} \perp \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{305}$$



Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

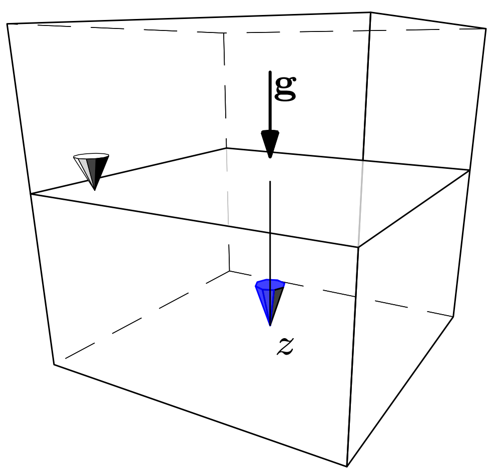
Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x = 0 \tag{306}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y = 0 \tag{307}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z = \rho g \tag{308}$$

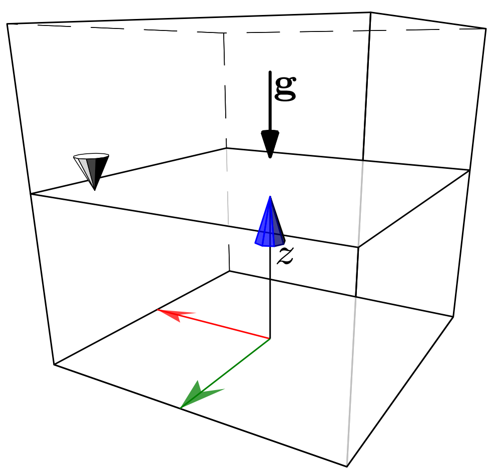
$$p(z) = \rho g z + c \tag{309}$$

$$p(0) = p_0 \implies c = p_0 \tag{310}$$

$$p(z) = p_0 + \rho g z \tag{311}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Ciśnienie



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x = 0 \tag{312}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y = 0 \tag{313}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z = -\rho g \tag{314}$$

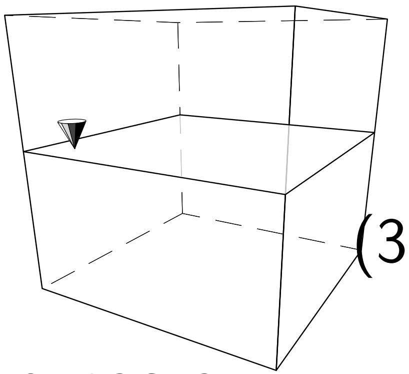
$$p(z) = -\rho g z + c \tag{315}$$

$$p(h) = p_0 \implies c = p_0 + \rho g h \tag{316}$$

$$p(z) = p_0 + \rho g(h - z) \tag{317}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Prawo Pascala



Równanie równowagi

$$\rho\,\mathbf{g} = \nabla p \tag{318}$$

Jeżeli pominiemy $\mathbf{g}$, to $\nabla p = \mathbf{0}$, co oznacza

$$p = \mathrm{const} \tag{319}$$

Do podobnych wniosków można dojść, rozważając wzór na ciśnienie

$$p(z) = p_0 + \rho g z \tag{320}$$

Jeżeli $p_0 \gg \rho g z$, to $p \approx p_0$ (prawo Pascala).

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Napór i moment naporu

Napór hydrostatyczny

$$\mathbf{N} = -\iint\limits_S p\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{321}$$

gdzie wersor $\hat{\boldsymbol{n}}$ jest wersorem normalnym do powierzchni i skierowany jest on w kierunku cieczy.
Moment naporu

$$\mathbf{M} = -\iint\limits_S \mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{n}} p\,\mathrm{d}S \tag{322}$$

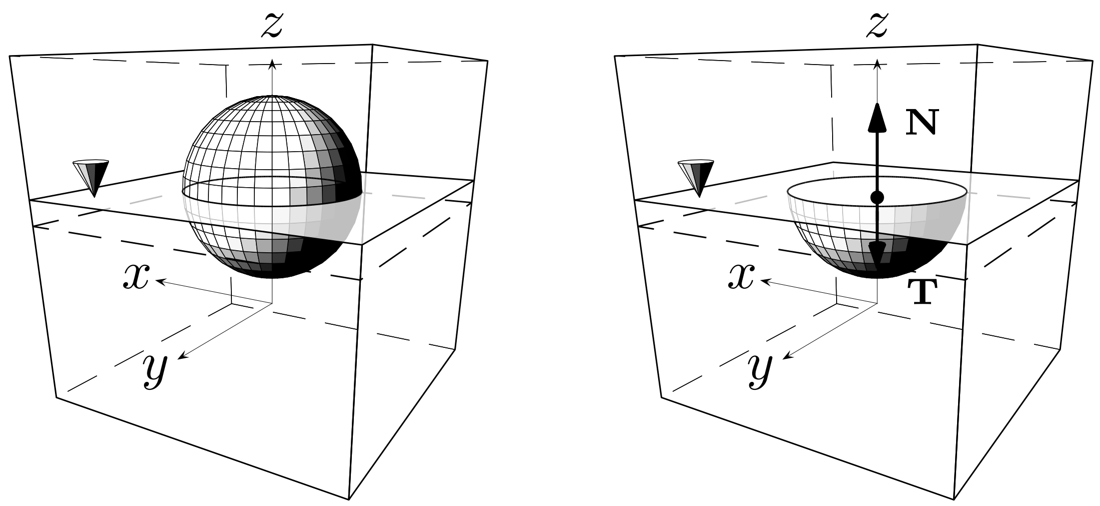
gdzie $\mathbf{r}$ oznacza wektor wodzący, którego początek znajduje się w punkcie, względem którego liczony jest moment siły naporu.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Wypór hydrostatyczny

$$\mathbf{N} = -\oiint_S p\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{323}$$

gdzie S jest zamkniętą powierzchnią zanurzoną.

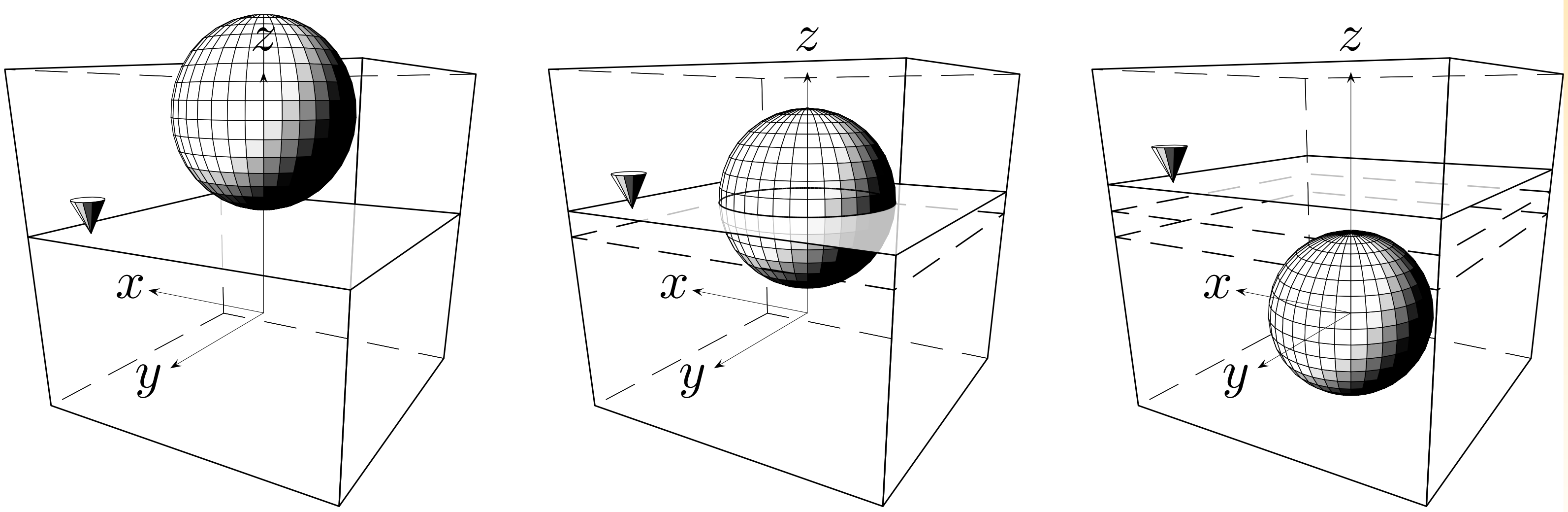


Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Prawo Archimedesa

$$\mathbf{N} = -\rho V \mathbf{g} \tag{324}$$

gdzie gęstość cieczy ρ, a V jest objętością wypartej cieczy – równej objętości zanurzonego ciała.



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

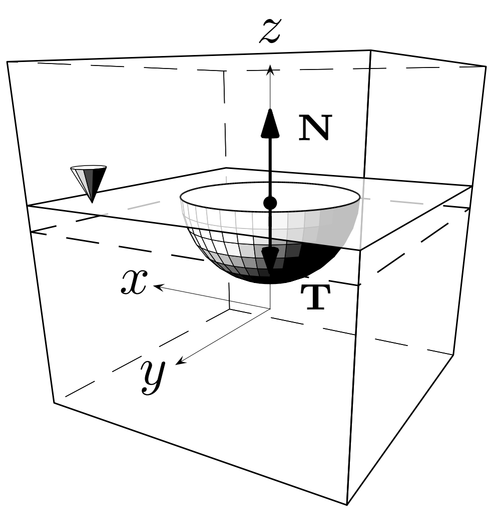
Warunek pływania

Ciało pływa, jeżeli wypór $\mathbf{N}$ równoważony jest ciężarem ciała $\mathbf{T}$

$$\mathbf{N} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{325}$$

Ciężar ciała w najprostszym przypadku wyznacza się ze wzoru

$$\mathbf{T} = \rho_c V_c \mathbf{g} \tag{326}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Warunek pływania

$$\mathbf{N} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \qquad (327)$$

W przypadku, gdy zanurzone całkowicie ciało zostanie pozostawione na pewnej głębokości, to możliwe są trzy warianty:

- $|\mathbf{N}| > |\mathbf{T}|$ – ciało zacznie się wynurzać częściowo, aż do momentu $|\mathbf{N}| = |\mathbf{T}|$ i ciało zacznie pływać
- $|\mathbf{N}| = |\mathbf{T}|$ – ciało pozostanie zanurzone na głębokości, na której zostało umieszczone
- $|\mathbf{N}| < |\mathbf{T}|$ – ciało zacznie tonąć

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Płyny nielepkie

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Przepływy płynów nielepkich/idealnych.
Uproszczenia/założenia:

- współczynnik lepkości $\mu = 0$
- współczynnik przewodnictwa $\lambda = 0$

Konsekwencje:

- niższy rząd równań
- inne warunki brzegowe
- paradoksy

To po co się wprowadza takie uproszczenia?

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy

Równanie zachowania masy ma charakter kinematyczny i nie zmienia swojej postaci

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{328}$$

lub dla $\rho = \mathrm{const}$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{329}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Eulera

Równanie Eulera otrzymujemy z dowolnej postaci równania Naviera-Stokesa przy założeniu $\mu = 0$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p \tag{330}$$

Równanie Eulera jest równaniem:

- różniczkowym cząstkowym (jak r. N-S)
- nieliniowym (jak r. N-S)
- pierwszego rzędu (r. N-S drugiego)

Tensor naprężenia ma postać

$$\boldsymbol{\sigma} = p\boldsymbol{\delta} \tag{331}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Fouriera-Kirchhoffa

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \tag{332}$$

przy założeniach $\mu = 0$ i $\lambda = 0$ przyjmuje postać

$$c_v \rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \tag{333}$$

gdyż

$$\phi_\mu = 2\mu \mathbf{D}^{\mathrm{D}2} = 0 \tag{334}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{335}$$

i równanie Eulera

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p \tag{336}$$

Daje to cztery równania skalarne i cztery niewiadome p, u_x, u_y, u_z.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu ściśliwego $\rho = \mathrm{var}$ i $c_v = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad (337)$$

równanie Eulera

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p \qquad (338)$$

równanie Fouriera-Kirchhoffa

$$c_v\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \qquad (339)$$

i równanie stanu $p = \rho RT$. Daje to sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych ρ, T, p, u_x, u_y, u_z.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Adiabata Poissona

Równanie Fouriera-Kirchhoffa

$$c_v \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \tag{340}$$

za pomocą równania $p = \rho R T$, $c_p - c_v = R$ i $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, zapisuje się jako

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \frac{\kappa}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{341}$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln p + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln \rho^{-\kappa} = 0 \tag{342}$$

skąd wynika

$$p\rho^{-\kappa} = \mathrm{const} \tag{343}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Bernoulliego

Równanie Bernoulliego wynika z innego zapisu równania Eulera

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\nabla u^2 - \mathbf{u} \times \mathbf{\Omega}}_{=\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} = \underbrace{-\nabla\Pi}_{=\mathbf{f}} - \tfrac{1}{\rho}\nabla p \qquad (344)$$

Przy założeniu barotropowości wprowadza się funkcję ciśnienia

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} \qquad (345)$$

mamy $\nabla P = \frac{1}{\rho}\nabla p$ oraz dla $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\nabla\left(\tfrac{1}{2}u^2 + P + \Pi\right) = \mathbf{u} \times \mathbf{\Omega} \qquad (346)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Bernoulliego

Mnożąc obustronnie przez $\mathrm{d}\mathbf{r}$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}u^2 + P + \Pi\right) = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{\Omega}) \tag{347}$$

W następujących przypadkach:

- $\mathrm{d}\mathbf{r} \parallel \mathbf{u}$
- $\mathrm{d}\mathbf{r} \parallel \mathbf{\Omega}$
- $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$

zachodzi $\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{\Omega}) = 0$ i otrzymujemy równanie Bernoulliego

$$\underbrace{\frac{1}{2}u^2 + P + \Pi}_{\text{trójmian Bernoulliego}} = \mathrm{const} \tag{348}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Bernoulliego

$$\tfrac{1}{2}u^2 + P + \Pi = \mathrm{const} \tag{349}$$

dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$

$$P(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} = \frac{p - p_0}{\rho} \tag{350}$$

i potencjału $\Pi = gh$, przyjmuje najpopularniejszą postać

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = \mathrm{const} \tag{351}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Bernoulliego – podsumowanie

Równanie Bernoulliego

$$\frac{1}{2}u^2 + P + \Pi = \mathrm{const} \qquad (352)$$

słuszne jest:

- na liniach prądu
- na liniach wirowych
- w całym obszarze dla przepływów bezwirowych

przy założeniu:

- nielepkości
- stacjonarności
- potencjalności sił masowych
- barotropowości

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Potencjał prędkości

Pole prędkości $\mathbf{u}$ dane jest gradientem potencjału φ

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi \tag{353}$$

Pole prędkości jest potencjalne wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwirowe, czyli

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{354}$$

Wynika to z tożsamości

$$\nabla \times \nabla\varphi = \mathbf{0} \tag{355}$$

Przepływy, gdzie pole prędkości dane jest jako $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, nazywa się przepływami potencjalnymi.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Całka Lagrange'a

Całkę Lagrange'a otrzymujemy z równania Eulera w postaci

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} = -\nabla \Pi - \tfrac{1}{\rho}\nabla p \qquad (356)$$

przy założeniu bezwirowości $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, potencjalności $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ i barotropowości $\nabla P = \frac{1}{\rho}\nabla p$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \varphi + \tfrac{1}{2}\nabla u^2 + \nabla \Pi + \nabla P = 0 \qquad (357)$$

skąd

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left(\nabla \varphi\right)^2 + P + \Pi = f(t) \qquad (358)$$

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura

Całka Lagrange'a i równanie Bernoulliego

Całka Lagrange'a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}u^2 + P + \Pi = f(t) \tag{359}$$

Równanie Bernoulliego

$$\tfrac{1}{2}u^2 + P + \Pi = \mathrm{const} \tag{360}$$

Wspólne założenia:

- nielepkości
- potencjalności sił masowych
- barotropowości

Różnice:

- stacjonarność dla r.B. i niestacjonarność dla c.L.
- bezwirowość dla c.L. i (bez)wirowość dla r.B.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ mamy równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = 0 \tag{361}$$

i całkę Lagrange'a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2 + \frac{p - p_0}{\rho} + \Pi = f(t) \tag{362}$$

Daje to dwa równania i dwie niewiadome p, φ.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu ściśliwego $\rho = \mathrm{var}$ mamy równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi) = 0 \qquad (363)$$

całkę Lagrange'a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \int\limits_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + \Pi = f(t) \qquad (364)$$

i warunek barotropowości

$$\rho = f(p) \qquad (365)$$

Daje to trzy równania i trzy niewiadome ρ, p, φ.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Domknięte układy równań

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ i stacjonarnego mamy równanie zachowania masy

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{366}$$

i całkę Lagrange'a

$$\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho} + \Pi = 0 \tag{367}$$

Daje to dwa równania i dwie niewiadome p, φ. W przypadku płynów nieściśliwych układ równań jest rozprzęgnięty. Co to znaczy?

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Płaskie i stacjonarne przepływy potencjalne

Dla płynu nieściśliwego $\rho = \mathrm{const}$ i stacjonarnego mamy równanie zachowania masy

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{368}$$

i wzór na ciśnienie z całki Lagrange'a

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho \left(\nabla \varphi\right)^2 \tag{369}$$

Daje to dwa równania i dwie niewiadome p, φ. Układ równań jest rozprzęgnięty.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Płaskie i stacjonarne przepływy potencjalne

Wprowadzając funkcję prądu ψ według definicji

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{370}$$

równanie zachowania masy spełnione jest tożsamościowo. Warunek $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ daje równanie

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{371}$$

a z całki Lagrange'a mamy wzór na ciśnienie

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) \tag{372}$$

Daje to dwa równania i dwie niewiadome p, ψ. Układ równań jest rozprzęgnięty.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Ortogonalność potencjału i funkcji prądu

Izolinie potencjału i izolinie funkcji prądu (linie prądu) są ortogonalne, co zapisywane jest jako

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0 \tag{373}$$

gdyż

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -u_x u_y + u_y u_x = 0 \tag{374}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Potencjał zespolony

Prędkości można wyliczyć z funkcji prądu i potencjału

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{375a}$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{375b}$$

Równości powyższe nazywane są warunkami Cauchy'ego-Riemanna. Związane są one z istnieniem potencjału zespolonego $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{376}$$

gdzie $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i

$$z = x + iy \tag{377}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Potencjał zespolony

Pochodną potencjału zespolonego $w(z) = w(x + iy)$ po x i y wyliczamy jako

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \tag{378}$$

Pochodna potencjału zespolonego

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{379}$$

Z jednego i drugiego równania na podstawie warunków Cauchy'ego-Riemanna otrzymujemy prędkość zespoloną (sprzężoną)

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = u_x - iu_y \tag{380}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Potencjał zespolony

We współrzędnych biegunowych r, α potencjał zespolony zapisywany jest jako

$$w(z) = \varphi(r,\alpha) + i\psi(r,\alpha) \tag{381}$$

gdzie $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, a pochodna potencjału jest sprzężoną prędkością zespoloną w układzie biegunowym

$$e^{i\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + i\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - i\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = u_r - iu_\alpha \tag{382}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Przepływ jednorodny

Przepływ jednorodny dany jest potencjałem zespolonym

$$w(z) = (a - ib)z \tag{383}$$

lub

$$w(z) = (ax + by) + i(ay - bx) \tag{384}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(x, y) = ax + by \tag{385a}$$

$$\psi(x, y) = ay - bx \tag{385b}$$

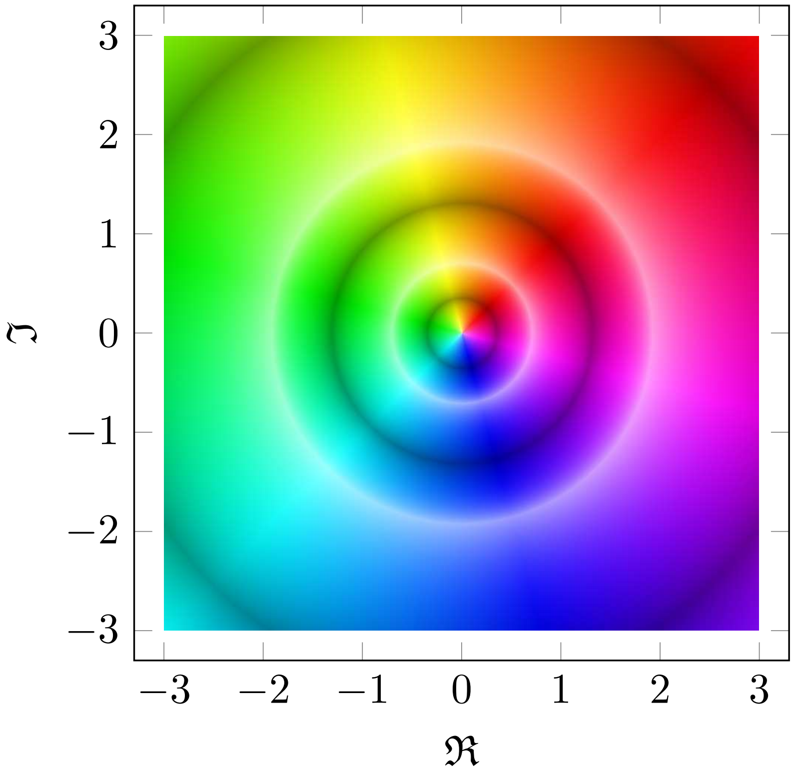
Prędkość sprzężona

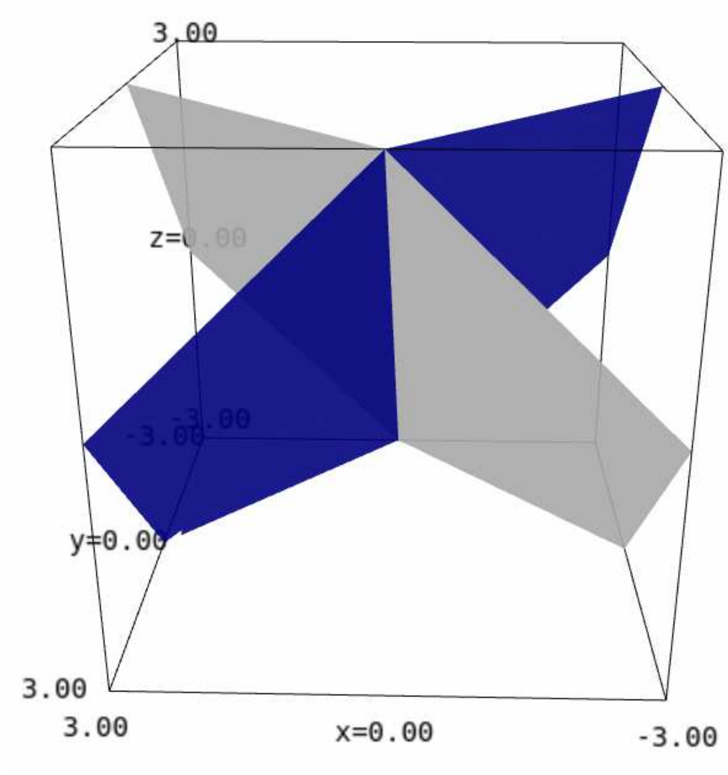
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = a - ib \tag{386}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Przepływ jednorodny

$$w(z) = (a - ib)z \tag{387}$$





Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

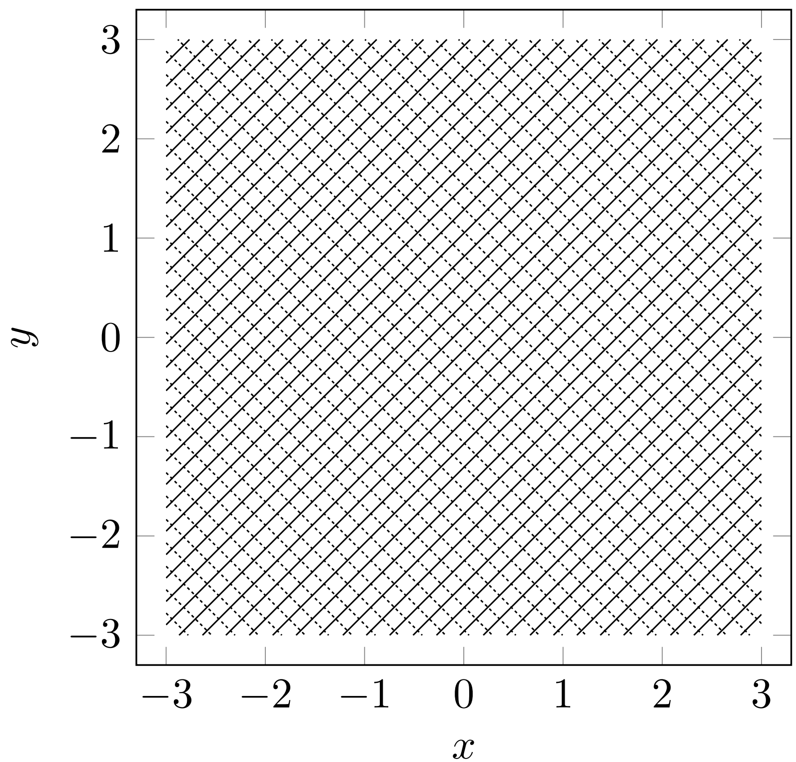
Gazodynamika

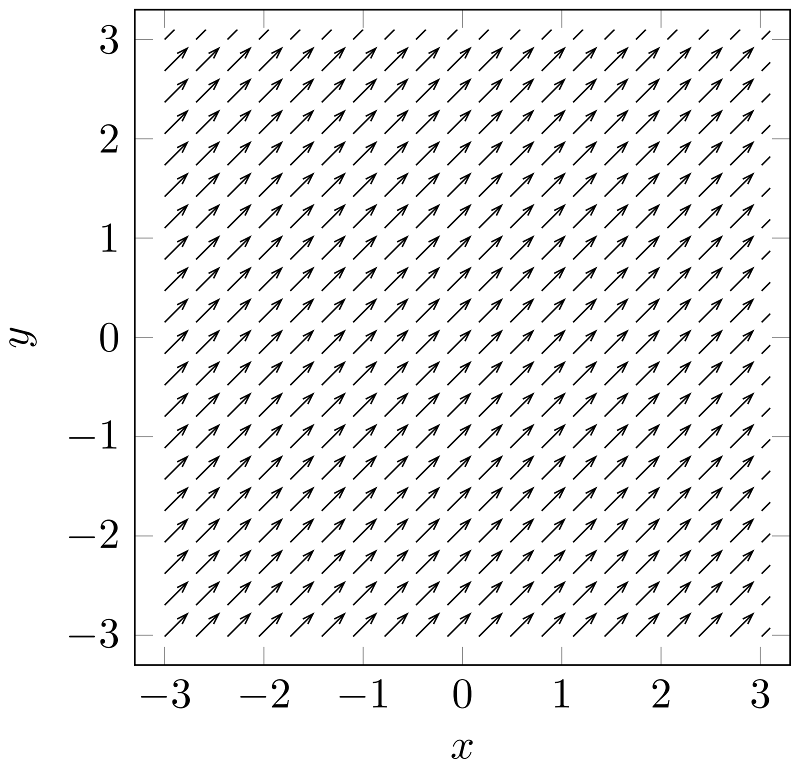
Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura

$$w(z) = (a - ib)z \tag{388}$$





Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opływ naroża o kącie β

Opływ naroża dany jest potencjałem zespolonym

$$w(z) = \frac{\beta}{\pi} z^{\frac{\pi}{\beta}} \tag{389}$$

lub we współrzędnych biegunowych

$$w(z) = \frac{\beta}{\pi} r^{\frac{\pi}{\beta}} e^{i\alpha\frac{\pi}{\beta}} = \frac{\beta}{\pi} r^{\frac{\pi}{\beta}} \left(\cos\frac{\pi\alpha}{\beta} + i\sin\frac{\pi\alpha}{\beta}\right) \tag{390}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(r,\alpha) = \frac{\beta}{\pi} r^{\frac{\pi}{\beta}} \cos\frac{\pi\alpha}{\beta} \tag{391a}$$

$$\psi(r,\alpha) = \frac{\beta}{\pi} r^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\frac{\pi\alpha}{\beta} \tag{391b}$$

Prędkość sprzężona

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = z^{\frac{\pi-\beta}{\beta}} \quad \text{lub} \quad e^{i\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = r^{\frac{\pi-\beta}{\beta}} e^{i\frac{\alpha\pi}{\beta}} \tag{392}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{2}$

Kąt naroża $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$w(z) = \frac{\beta}{\pi} z^{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{1}{2} z^2 \tag{393}$$

lub

$$w(z) = \frac{1}{2}(x + iy)^2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + ixy \tag{394}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \tag{395a}$$

$$\psi(x, y) = xy \tag{395b}$$

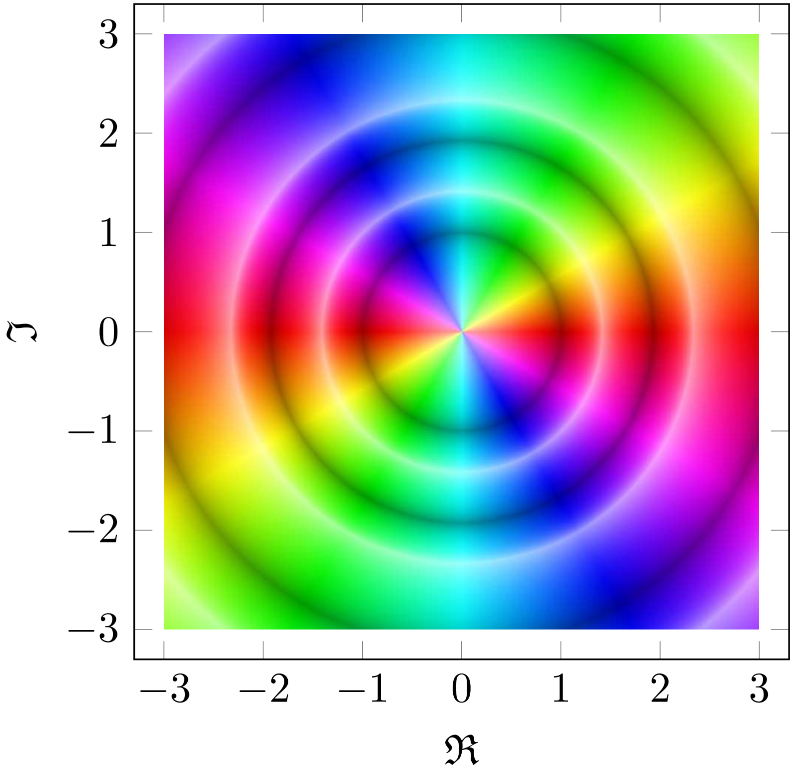
Prędkość sprzężona

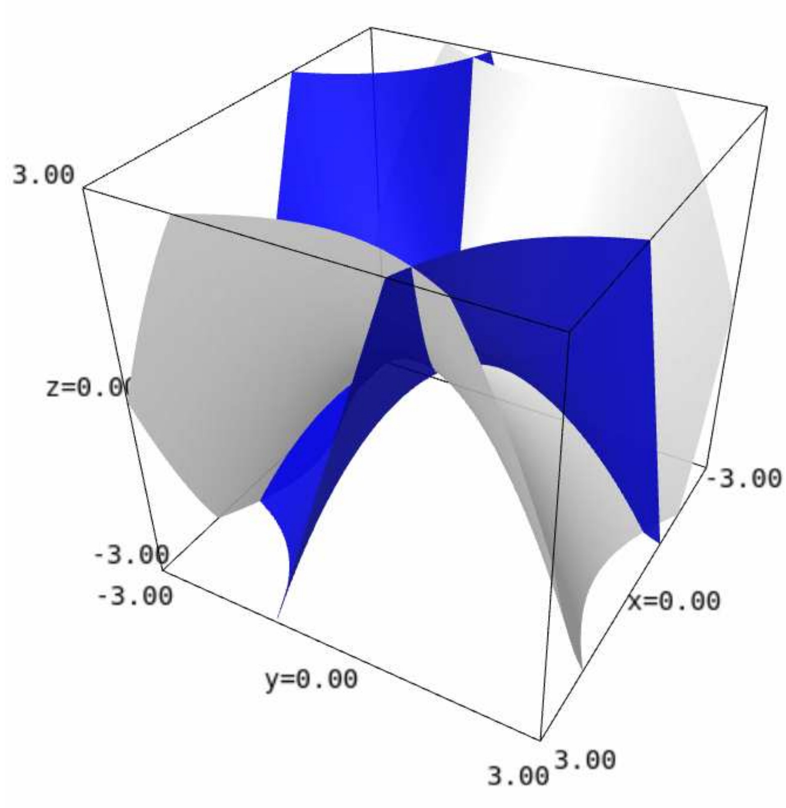
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = z = x + iy = u_x - iu_y \tag{396}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{2}$

$$w(z) = \frac{1}{2}z^2 \tag{397}$$





Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

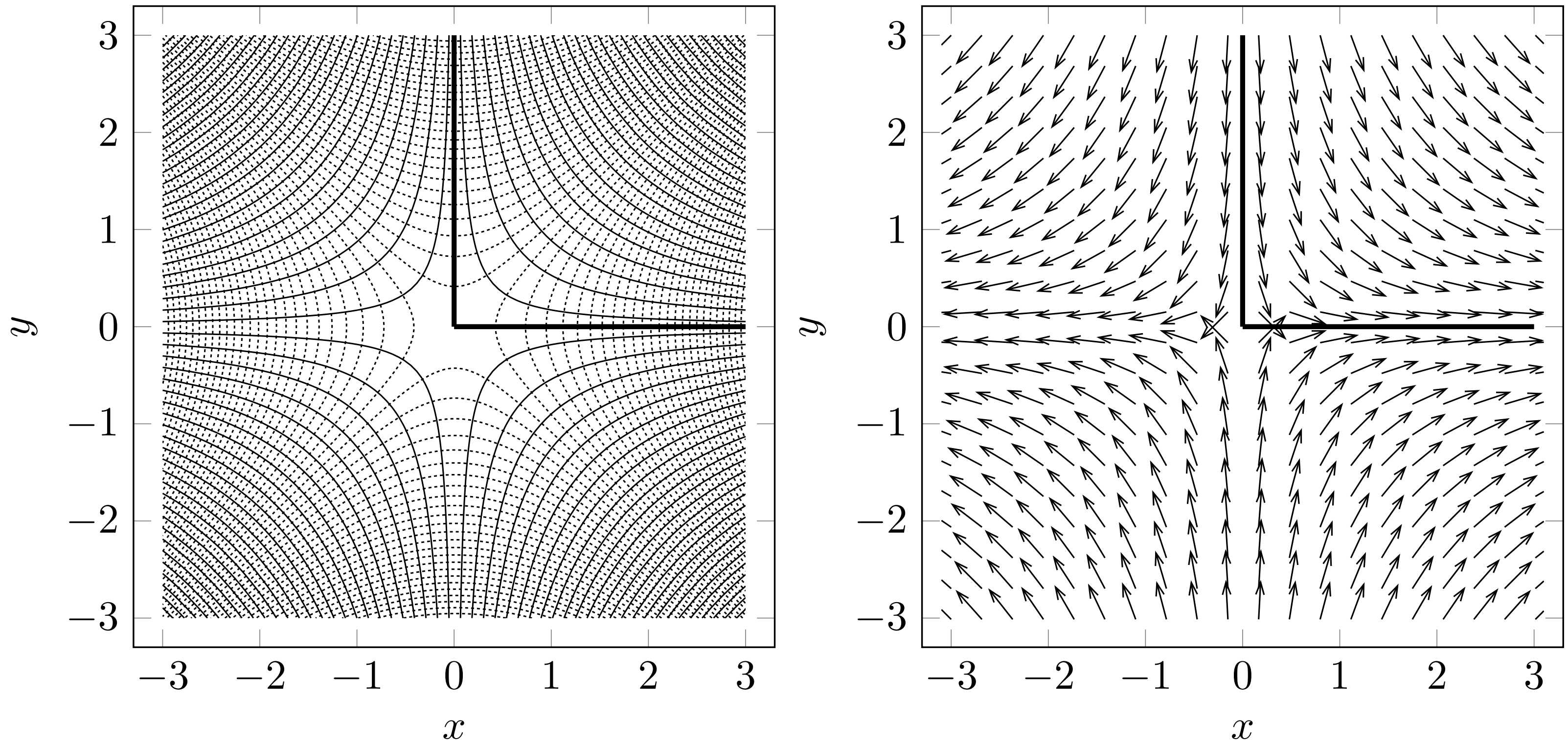
Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura

Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{2}$

$$w(z) = \frac{1}{2} z^2 \qquad (398)$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{3}$

Kąt naroża $\beta = \frac{\pi}{3}$

$$w(z) = \frac{\beta}{\pi} z^{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{1}{3} z^3 \tag{399}$$

lub

$$w(z) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + i\left(x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right) \tag{400}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 \tag{401a}$$

$$\psi(x, y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \tag{401b}$$

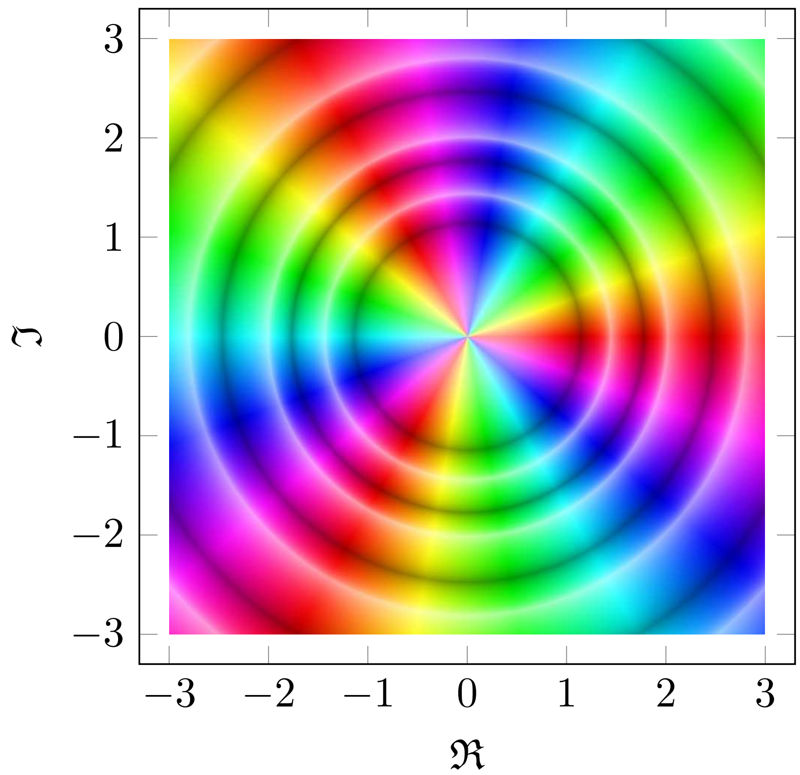
Prędkość sprzężona

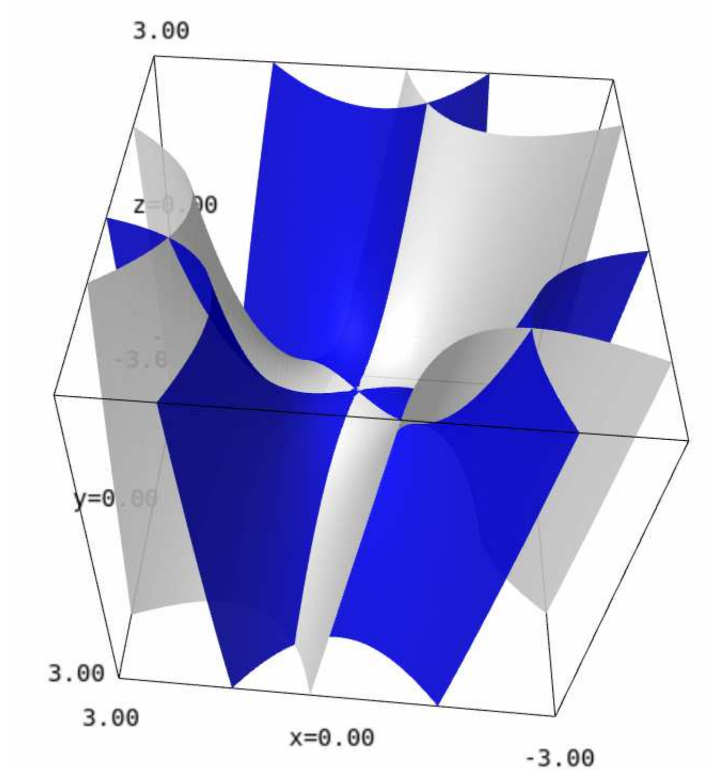
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u_x - iu_y \tag{402}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{3}$

$$w(z) = \frac{1}{3}z^3 \tag{403}$$





Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

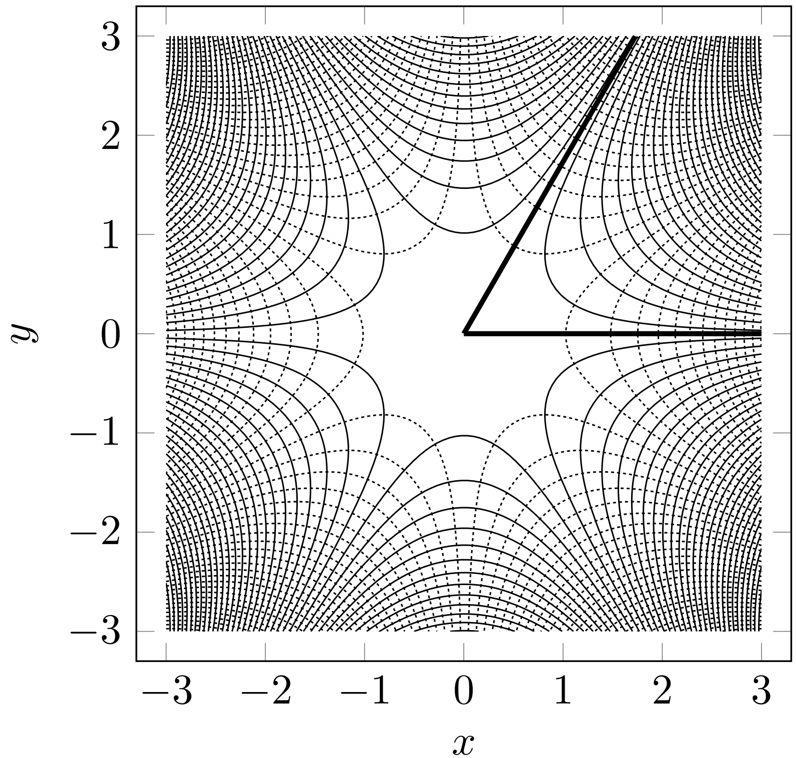
Rurociągi

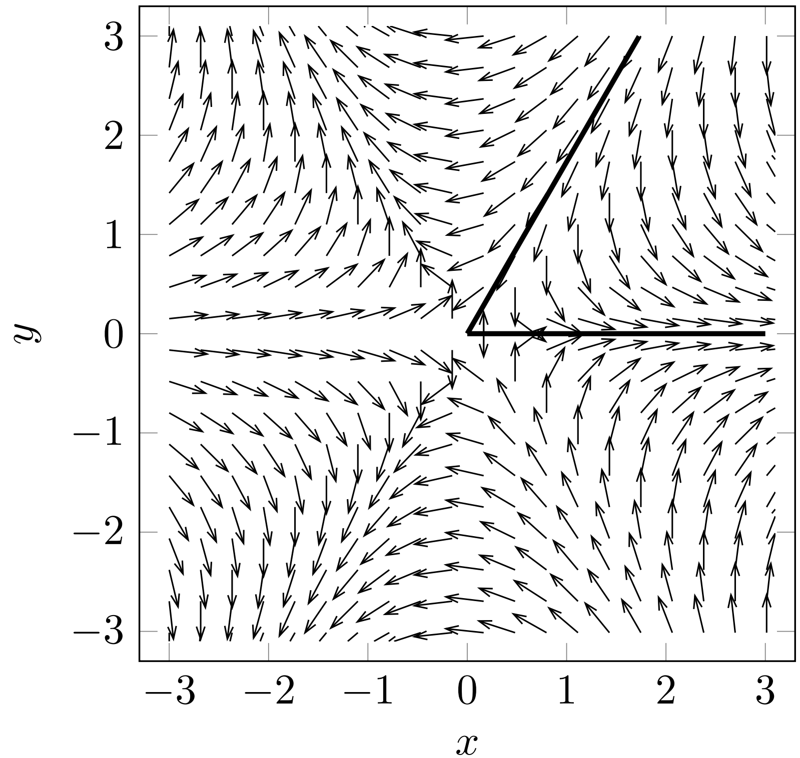
Analiza wymiarowa

Literatura

Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{3}$

$$w(z) = \frac{1}{3} z^3 \tag{404}$$





Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opływ naroża o kącie 2π

Kąt naroża $\beta = 2\pi$

$$w(z) = 2\sqrt{z} \tag{405}$$

lub zgodnie z tożsamością Eulera $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$$w(z) = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{r}\left(\cos\tfrac{\alpha}{2} + i\sin\tfrac{\alpha}{2}\right) \tag{406}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(r,\alpha) = 2\sqrt{r}\cos\tfrac{\alpha}{2} \tag{407a}$$

$$\psi(r,\alpha) = 2\sqrt{r}\sin\tfrac{\alpha}{2} \tag{407b}$$

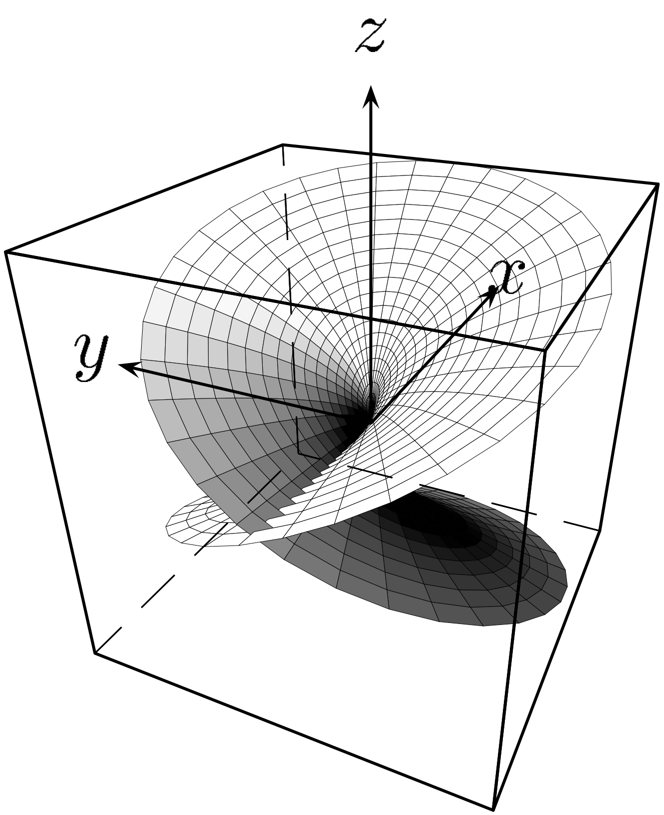
Prędkość sprzężona

$$e^{i\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + i\frac{\partial\psi}{\partial r} = \tfrac{1}{\sqrt{r}}\cos\tfrac{\alpha}{2} + i\tfrac{1}{\sqrt{r}}\sin\tfrac{\alpha}{2} = u_r - iu_\alpha \tag{408}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opływ naroża o kącie 2π

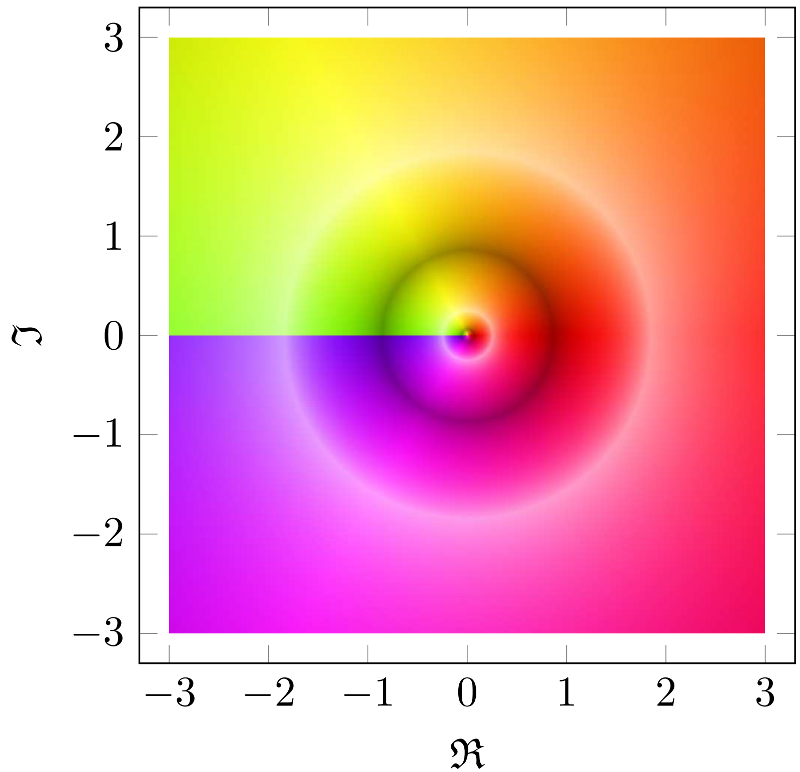
$$w(z) = 2\sqrt{z} \tag{409}$$

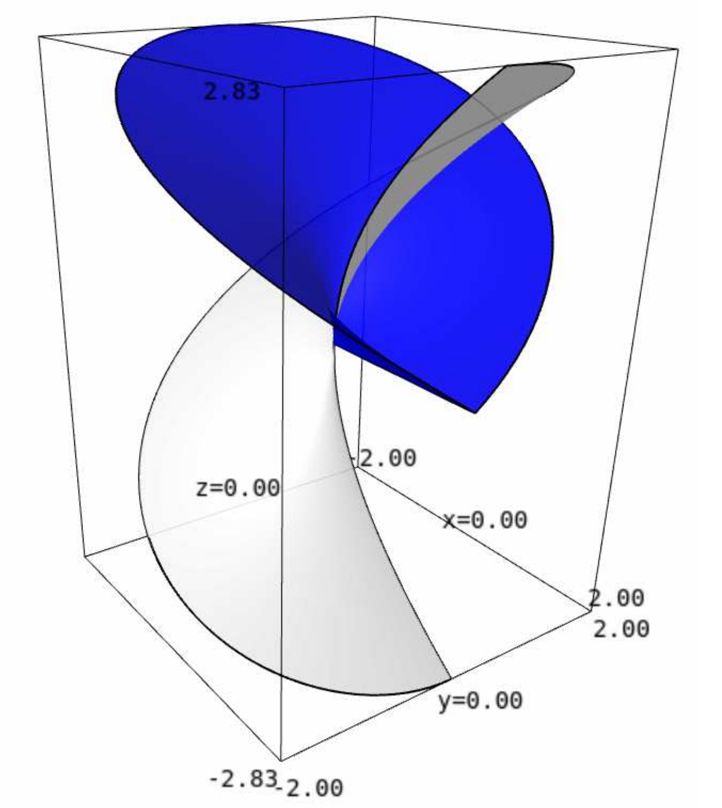


Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Opływ naroża o kącie 2π

$$w(z) = 2\sqrt{z} \tag{410}$$





Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

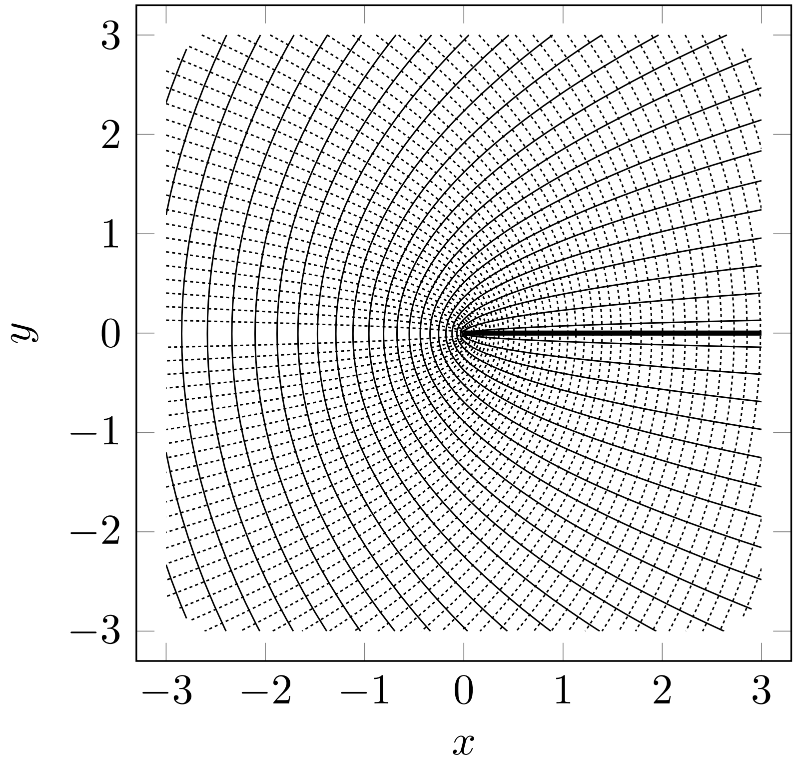
Rurociągi

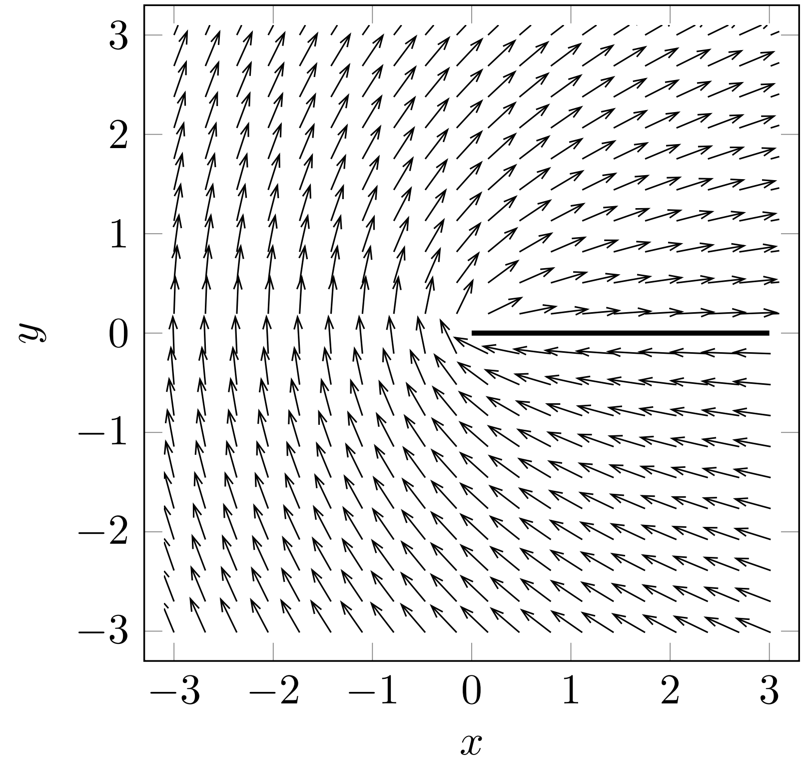
Analiza wymiarowa

Literatura

Opływ naroża o kącie 2π

$$w(z) = 2\sqrt{z} \qquad (411)$$





Źródło i upust dane są potencjałem zespolonym

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} z \tag{412}$$

lub

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln}\left(r\, e^{i(\alpha+2\pi k)}\right) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln r + i \frac{\dot{V}}{2\pi}(\alpha + 2\pi k) \tag{413}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(r, \alpha) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln r \tag{414a}$$

$$\psi(r, \alpha) = \frac{\dot{V}}{2\pi}(\alpha + 2\pi k) \tag{414b}$$

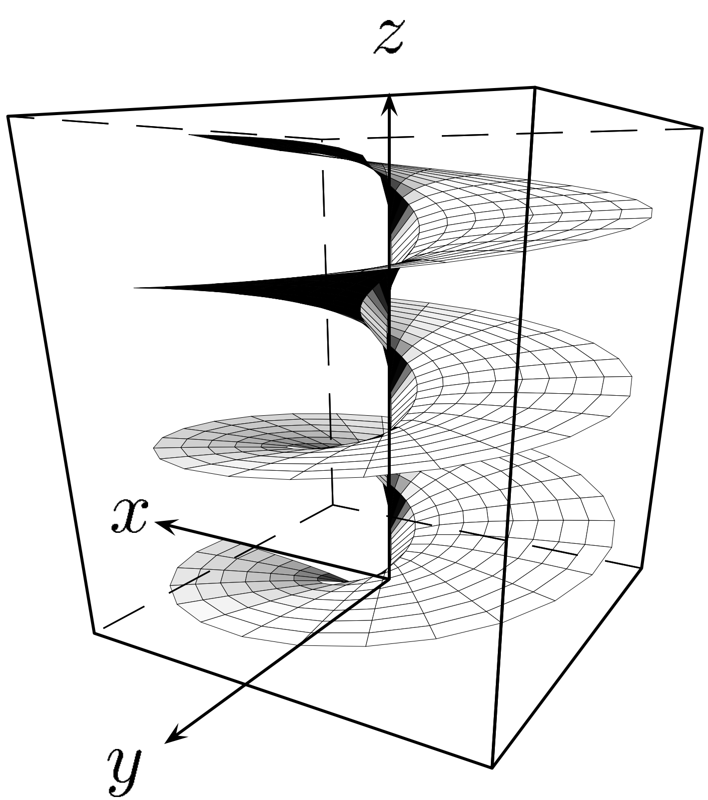
Prędkość sprzężona

$$e^{i\alpha} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\dot{V}}{2\pi r} \tag{415}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

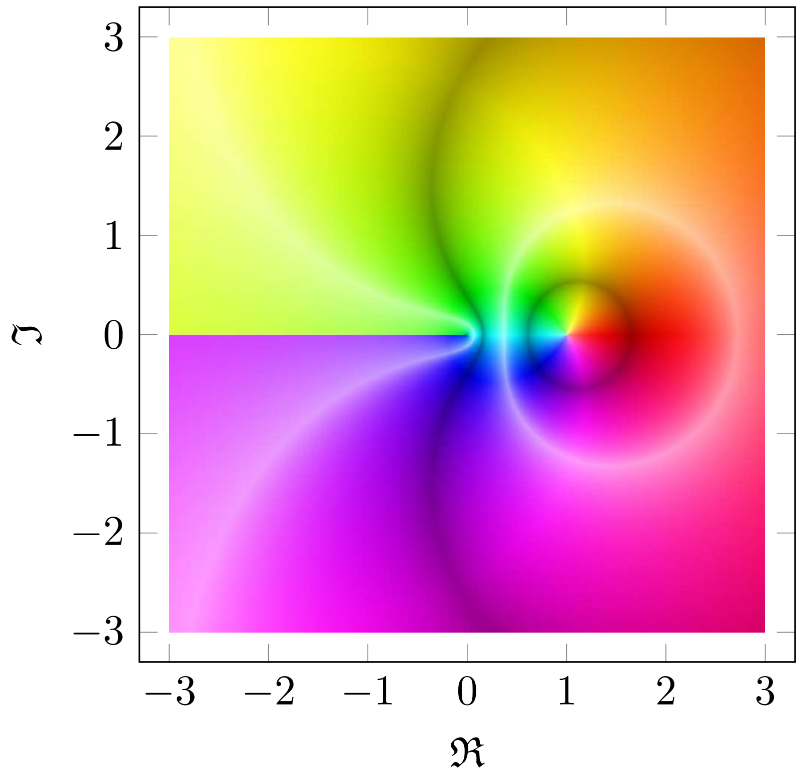
Źródło i upust

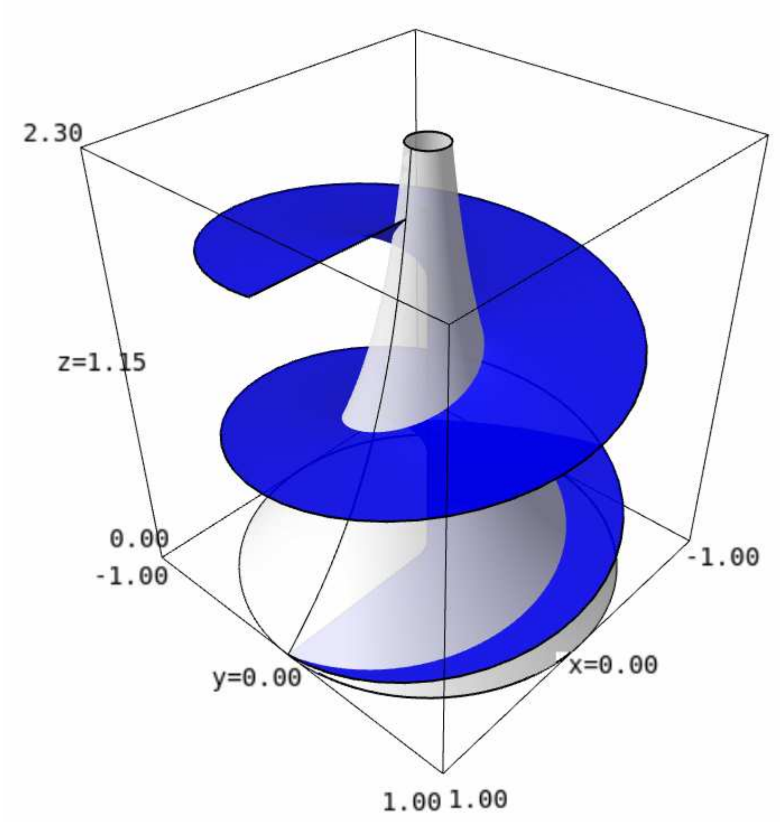
$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} z \qquad (416)$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} z \tag{417}$$





Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

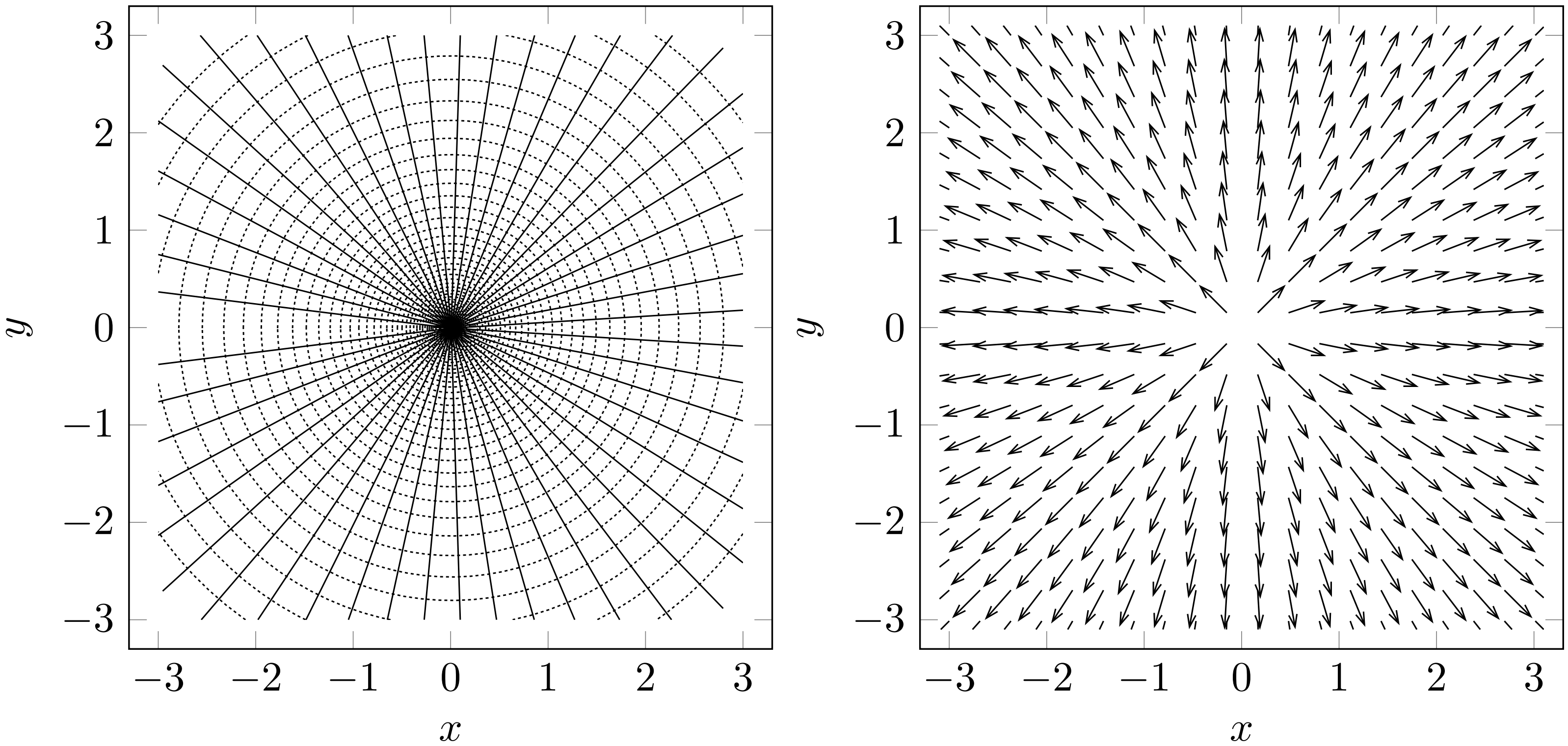
Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura

Źródło i upust

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} z \qquad (418)$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

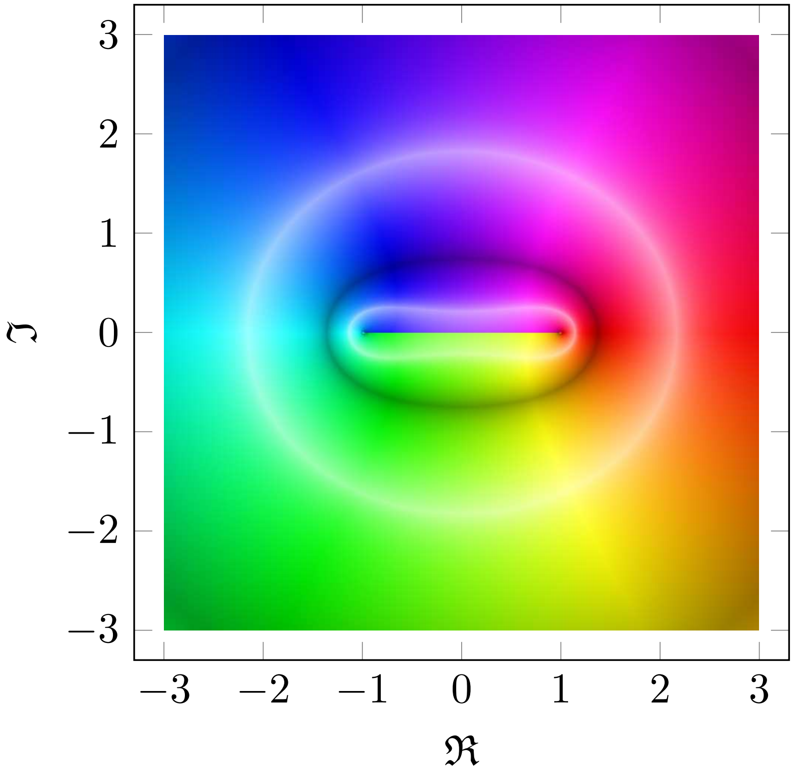
Kombinacja źródła i upustu

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln}\left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln}\left(z - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z + \frac{\varepsilon}{2}}{z - \frac{\varepsilon}{2}} \quad (419)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Kombinacja źródła i upustu

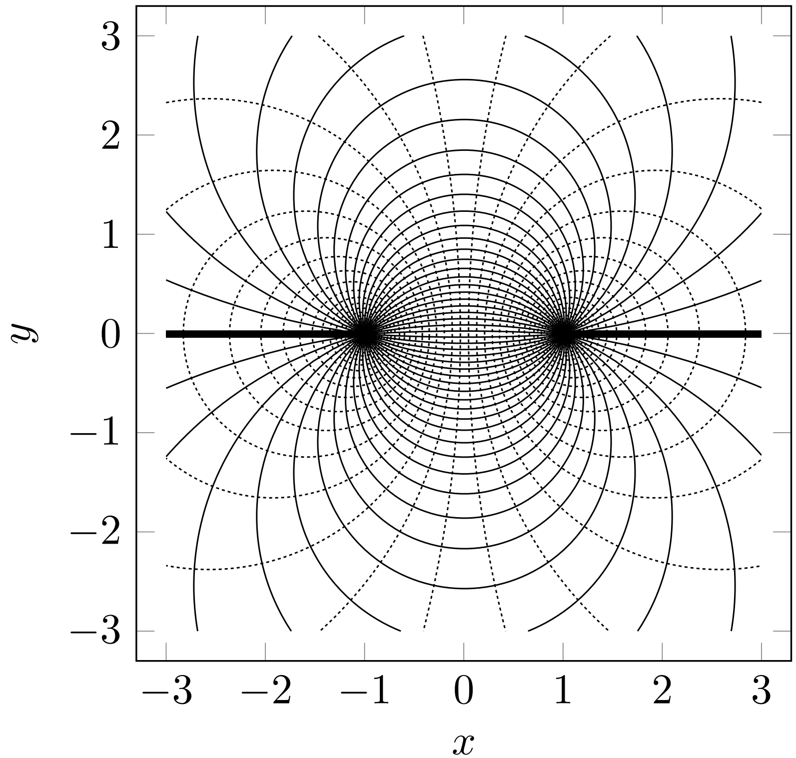
$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z + \frac{\varepsilon}{2}}{z - \frac{\varepsilon}{2}} \tag{420}$$

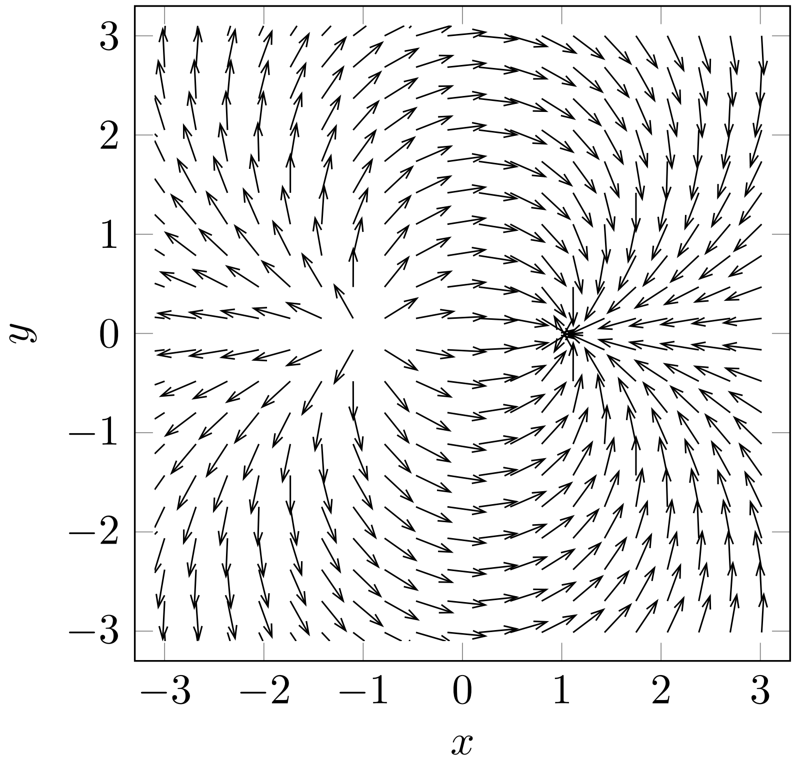


Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Kombinacja źródła i upustu

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z + \frac{\varepsilon}{2}}{z - \frac{\varepsilon}{2}} \tag{421}$$





Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Kombinacja źródła i upustu

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z + \frac{\varepsilon}{2}}{z - \frac{\varepsilon}{2}} \tag{422}$$

Jeżeli odległość dąży do zera, a $\dot{V}$ do nieskończoności, to

$$\lim_{\varepsilon \to 0, \dot{V} \to \infty} \frac{\dot{V}}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z + \frac{\varepsilon}{2}}{z - \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\dot{V}}{2\pi} \frac{\varepsilon}{z} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} \tag{423}$$

gdzie M jest momentem dipola.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dipol dany jest potencjałem zespolonym

$$w(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} \tag{424}$$

lub

$$w(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{M}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}\right) \tag{425}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(x,y) = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \tag{426a}$$

$$\psi(x,y) = \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{426b}$$

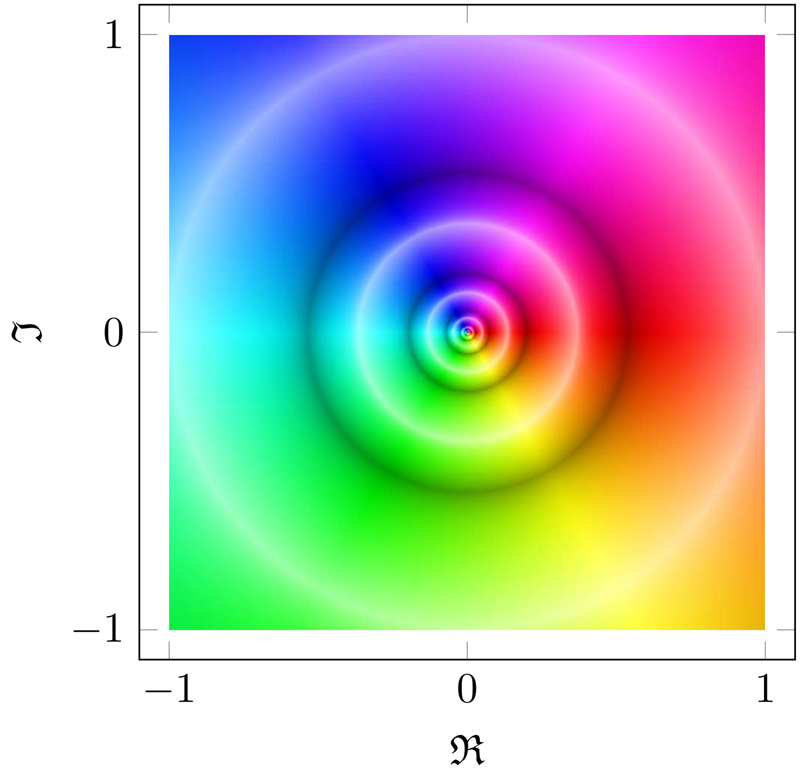
Prędkość sprzężona

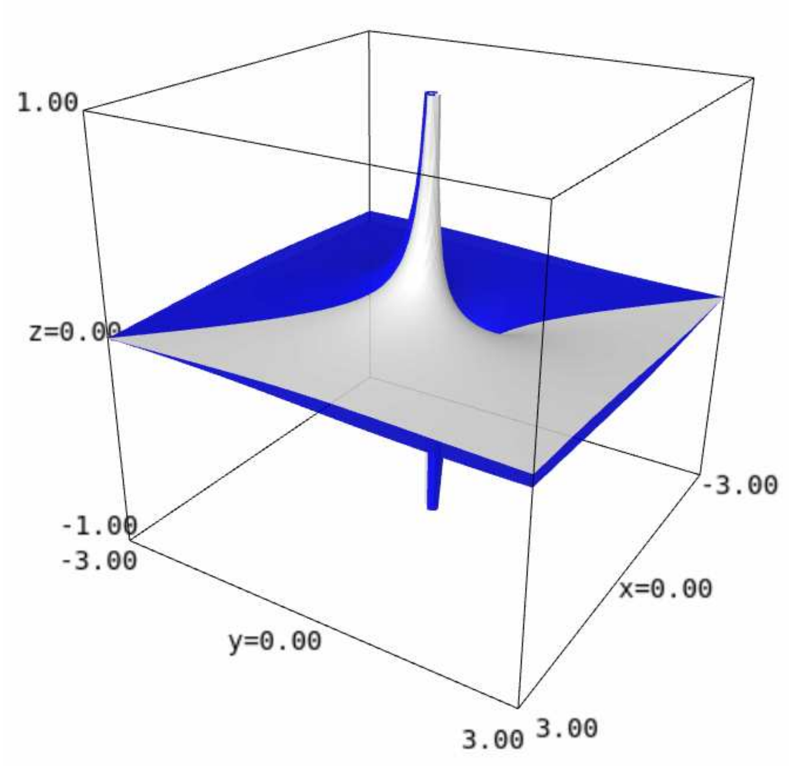
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z^2} = -\frac{M(x^2-y^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2} + i\frac{Mxy}{\pi(x^2+y^2)^2} \tag{427}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dipol

$$w(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} \tag{428}$$

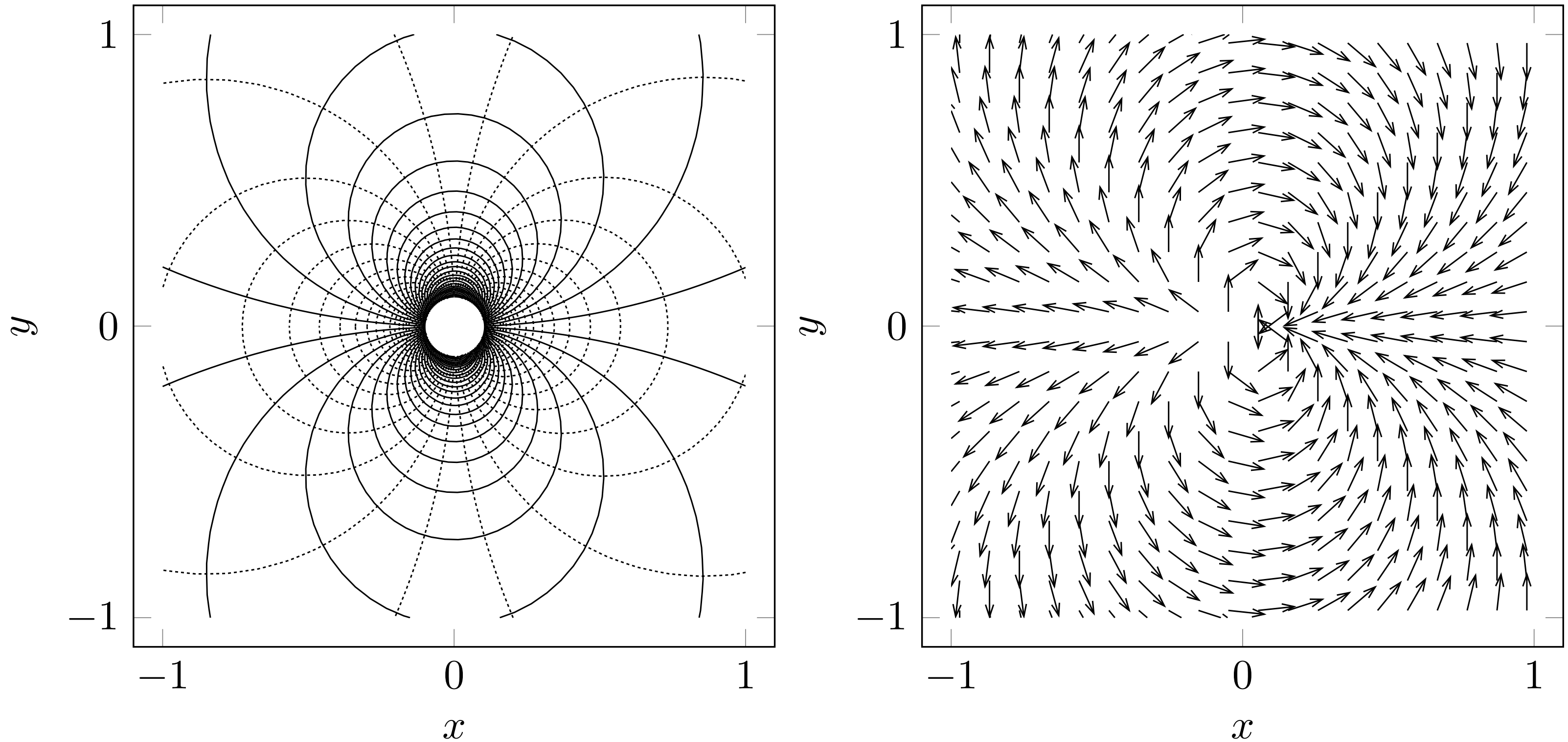




Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dipol

$$w(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} \qquad (429)$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Wir

Wir dany jest potencjałem zespolonym

$$w(z) = i\tfrac{\Gamma}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\,z \tag{430}$$

lub

$$w(z) = i\tfrac{\Gamma}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\left(r\,e^{i(\alpha+2\pi k)}\right) = -\tfrac{\Gamma}{2\pi}(\alpha+2\pi k)+i\tfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{431}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(r,\alpha) = -\tfrac{\Gamma}{2\pi}(\alpha+2\pi k) \tag{432a}$$

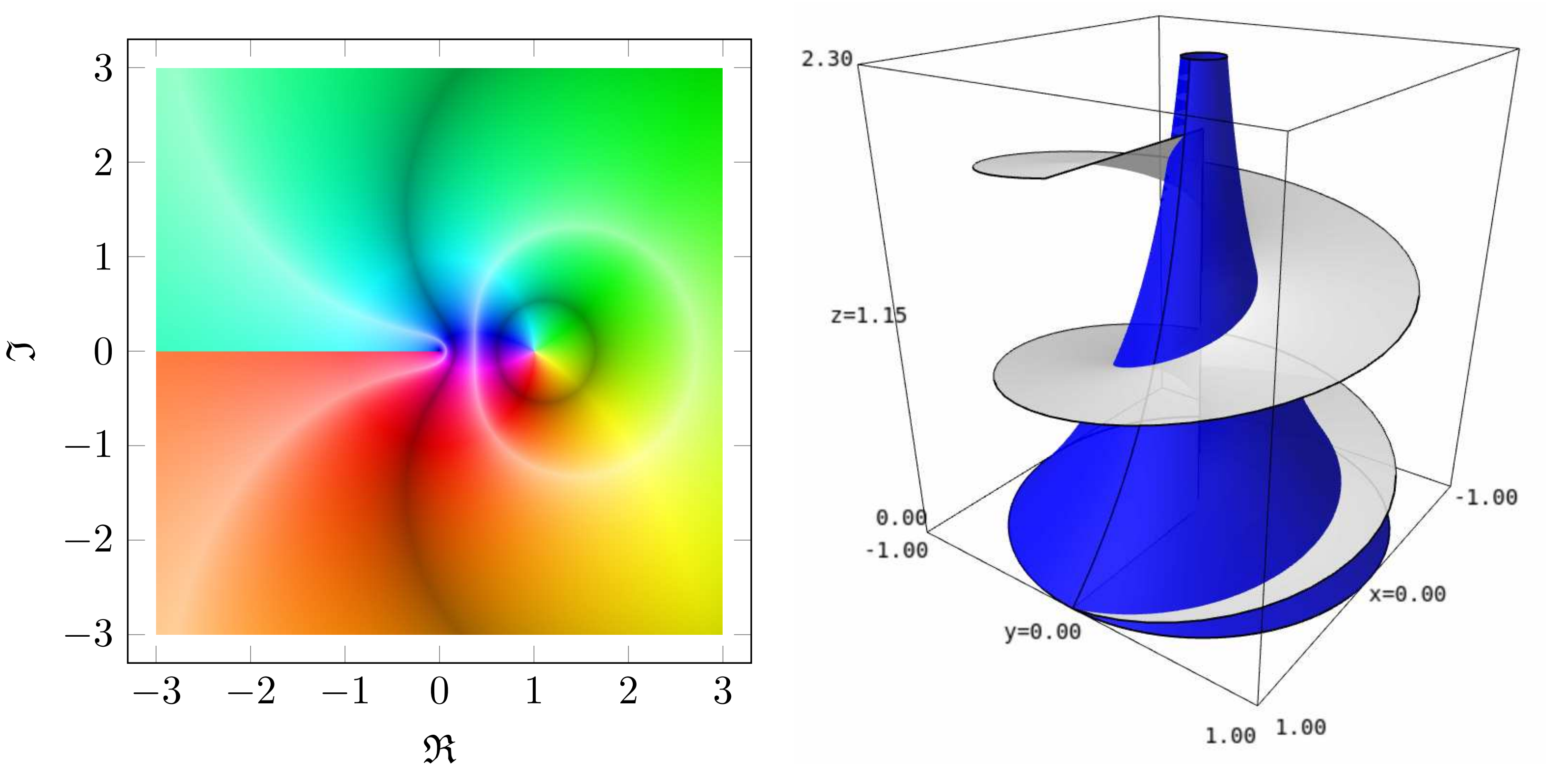
$$\psi(r,\alpha) = \tfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{432b}$$

Prędkość sprzężona

$$e^{i\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = i\frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{433}$$

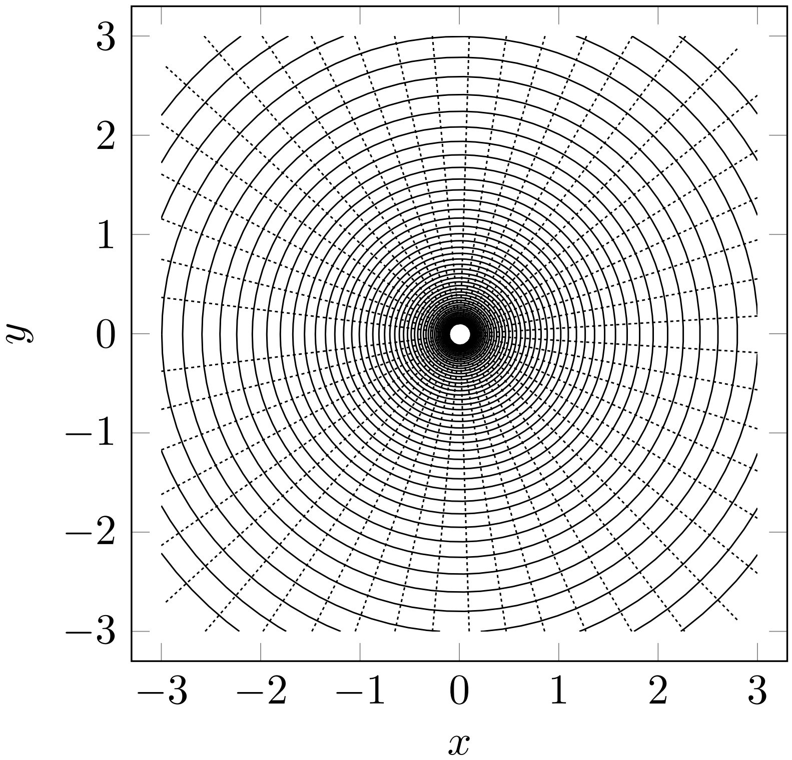
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

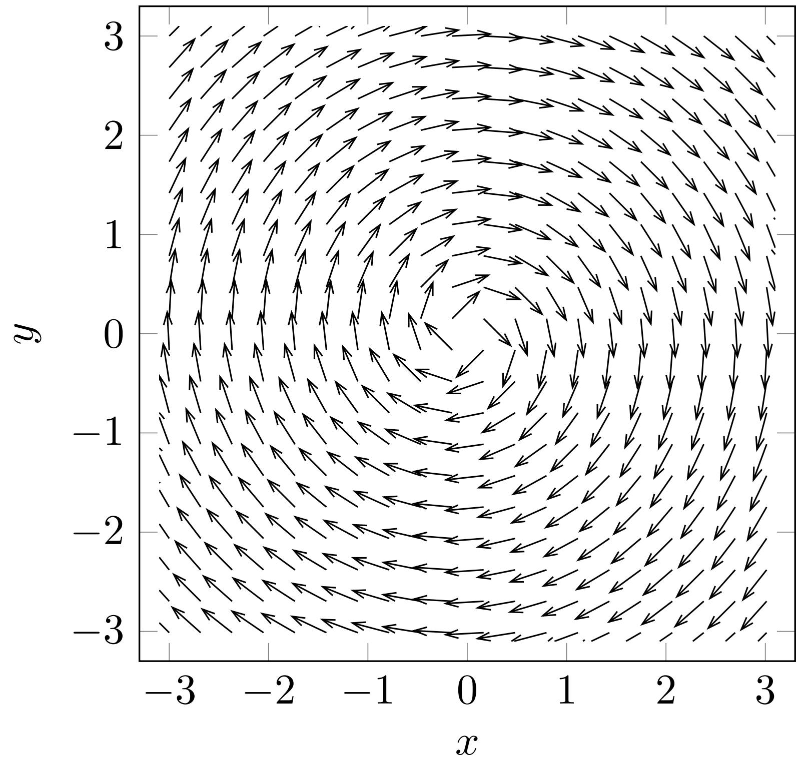
$$w(z) = i\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z \tag{434}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$w(z) = i\frac{\Gamma}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\,z \qquad (435)$$





Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Źródło wirowe dane jest potencjałem zespolonym

$$w(z) = \frac{\dot{V} - i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z \tag{436}$$

lub

$$w(z) = \frac{\dot{V} \ln r + \Gamma(\varphi + 2\pi k)}{2\pi} + i \frac{\dot{V}(\varphi + 2\pi k) + \Gamma \ln r}{2\pi} \tag{437}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(r,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left(\dot{V} \ln r + \Gamma(\alpha + 2\pi k)\right) \tag{438a}$$

$$\psi(r,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left(\dot{V}(\alpha + 2\pi k) - \Gamma \ln r\right) \tag{438b}$$

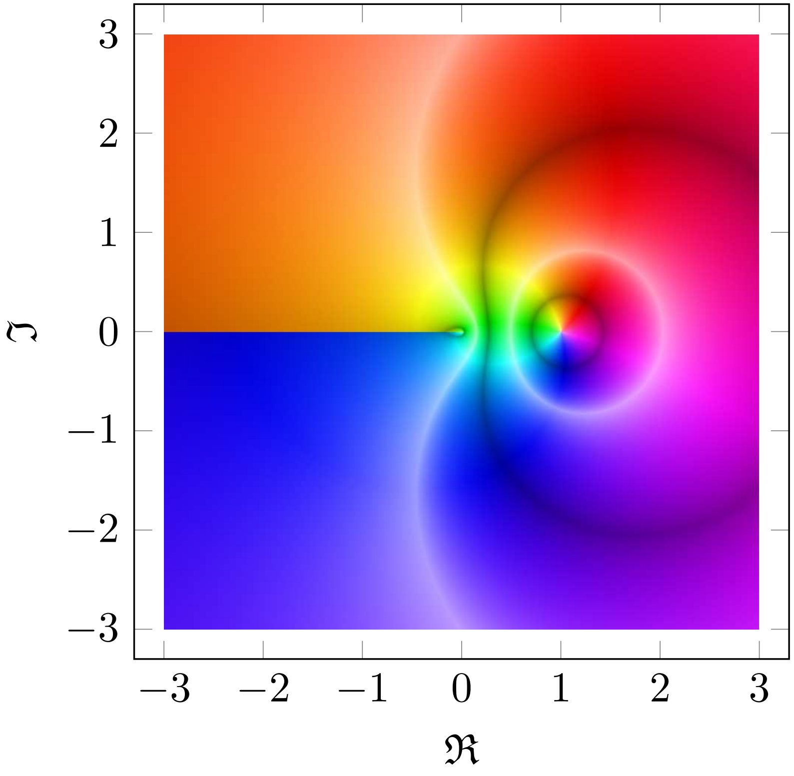
Prędkość sprzężona

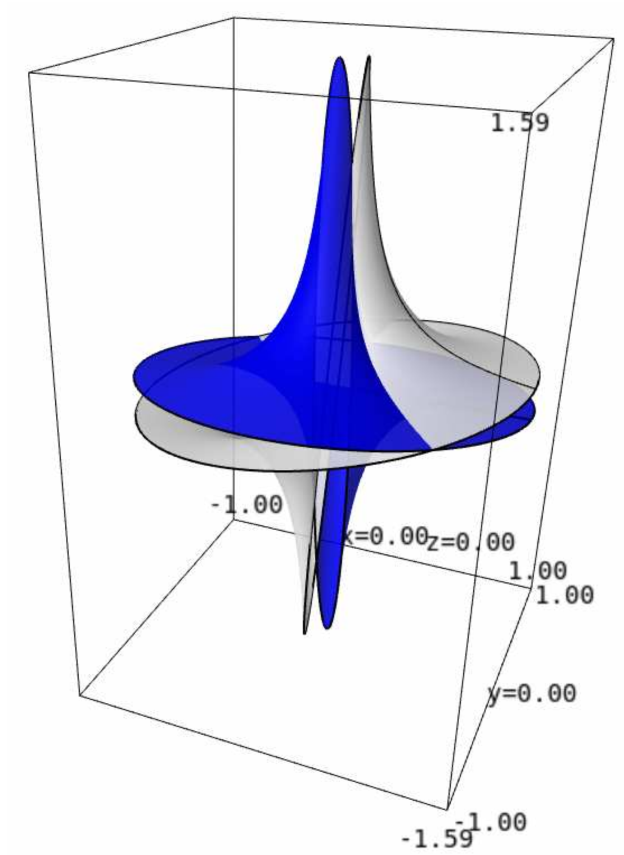
$$e^{i\alpha} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\dot{V} - i\Gamma}{2\pi r} \tag{439}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Źródło wirowe

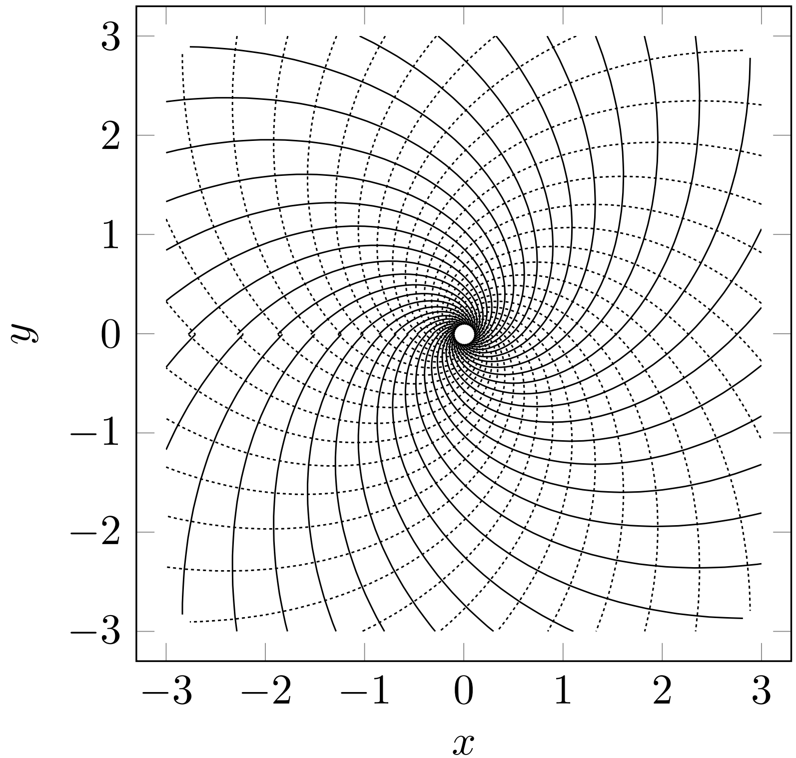
$$w(z) = \frac{\dot{V} - i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z \qquad (440)$$

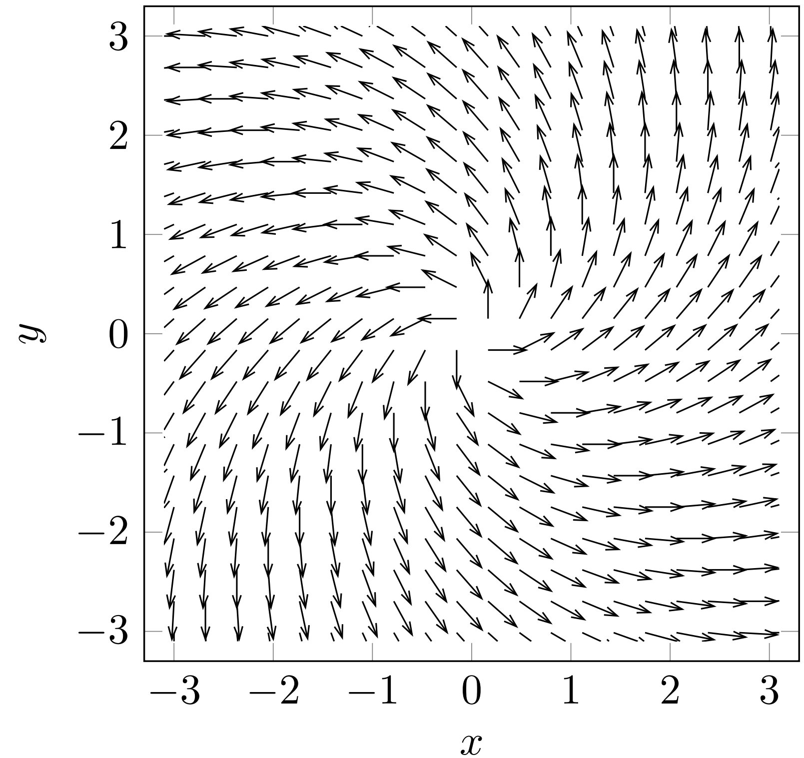




Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$w(z) = i\frac{\dot{V} - i\Gamma}{2\pi}\operatorname{Ln} z \qquad (441)$$





Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Bezcyrkulacyjny opływ koła

Opływ koła jest superpozycją przepływu jednorodnego oraz dipola i dany jest potencjałem zespolonym

$$w(z) = u_\infty z + \tfrac{a}{z} \tag{442}$$

lub

$$w(z) = u_\infty z + \frac{a\bar{z}}{z\bar{z}} = x\left(u_\infty + \frac{a}{x^2+y^2}\right) + iy\left(u_\infty - \frac{a}{x^2+y^2}\right) \tag{443}$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(x,y) = x\left(u_\infty + \frac{a}{x^2+y^2}\right) \tag{444a}$$

$$\psi(x,y) = y\left(u_\infty - \frac{a}{x^2+y^2}\right) \tag{444b}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Bezcyrkulacyjny opływ koła

Zerowa linia prądu $\psi(x,y)=0$

$$y\left(u_\infty - \frac{a}{x^2+y^2}\right)=0 \tag{445}$$

daje $y=0$ lub promień okręgu $R^2=x^2+y^2$

$$u_\infty - aR^{-2}=0 \tag{446}$$

Stąd $u_\infty R^2 = a$. Zatem potencjał zespolony opisujący opływ koła dany jest jako

$$w(z)=u_\infty\left(z+\frac{R^2}{z}\right) \tag{447}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(x,y) = u_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) \tag{448a}$$

$$\psi(x,y) = u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) \tag{448b}$$

lub we współrzędnych biegunowych

$$\varphi(r,\alpha) = u_\infty r \left(1 + R^2 r^{-2}\right) \cos\alpha \tag{449a}$$

$$\psi(r,\alpha) = u_\infty r \left(1 - R^2 r^{-2}\right) \sin\alpha \tag{449b}$$

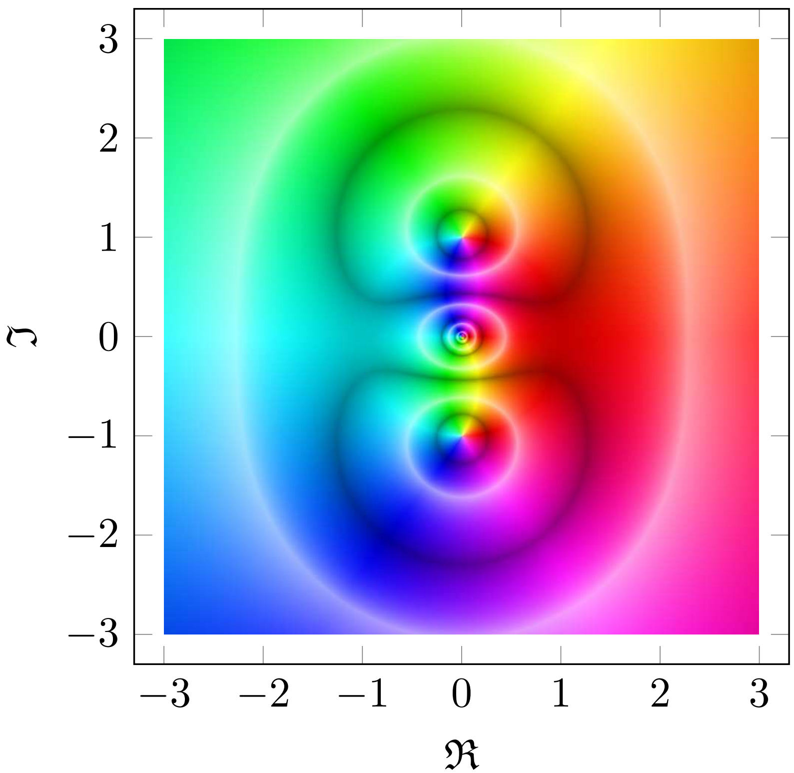
Prędkość sprzężona

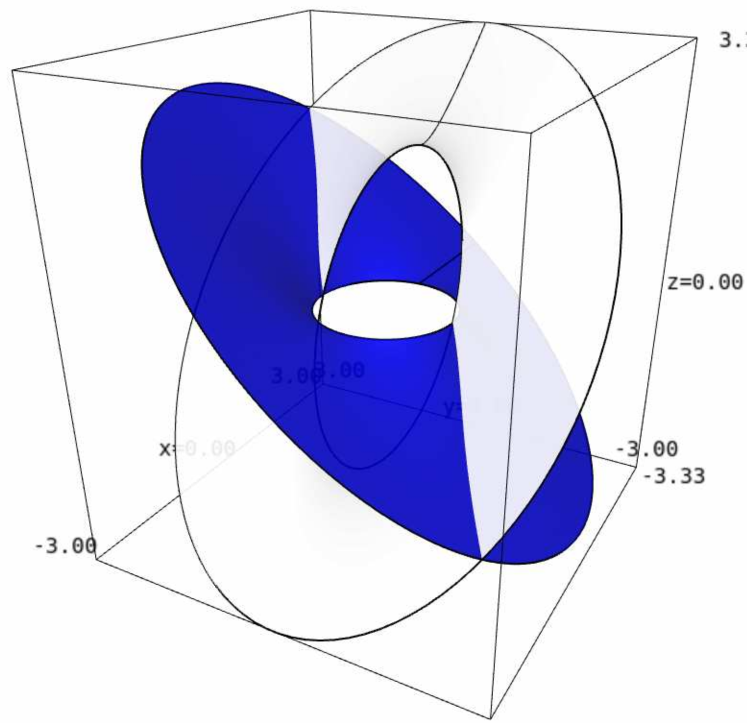
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = u_\infty \left(1 - \tfrac{R^2}{z^2}\right) \quad \text{lub} \quad e^{i\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = u_\infty \left(e^{i\alpha} - \tfrac{R^2}{e^{i\alpha}}\right) \tag{450}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Bezcyrkulacyjny opływ koła

$$w(z) = u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \tag{451}$$

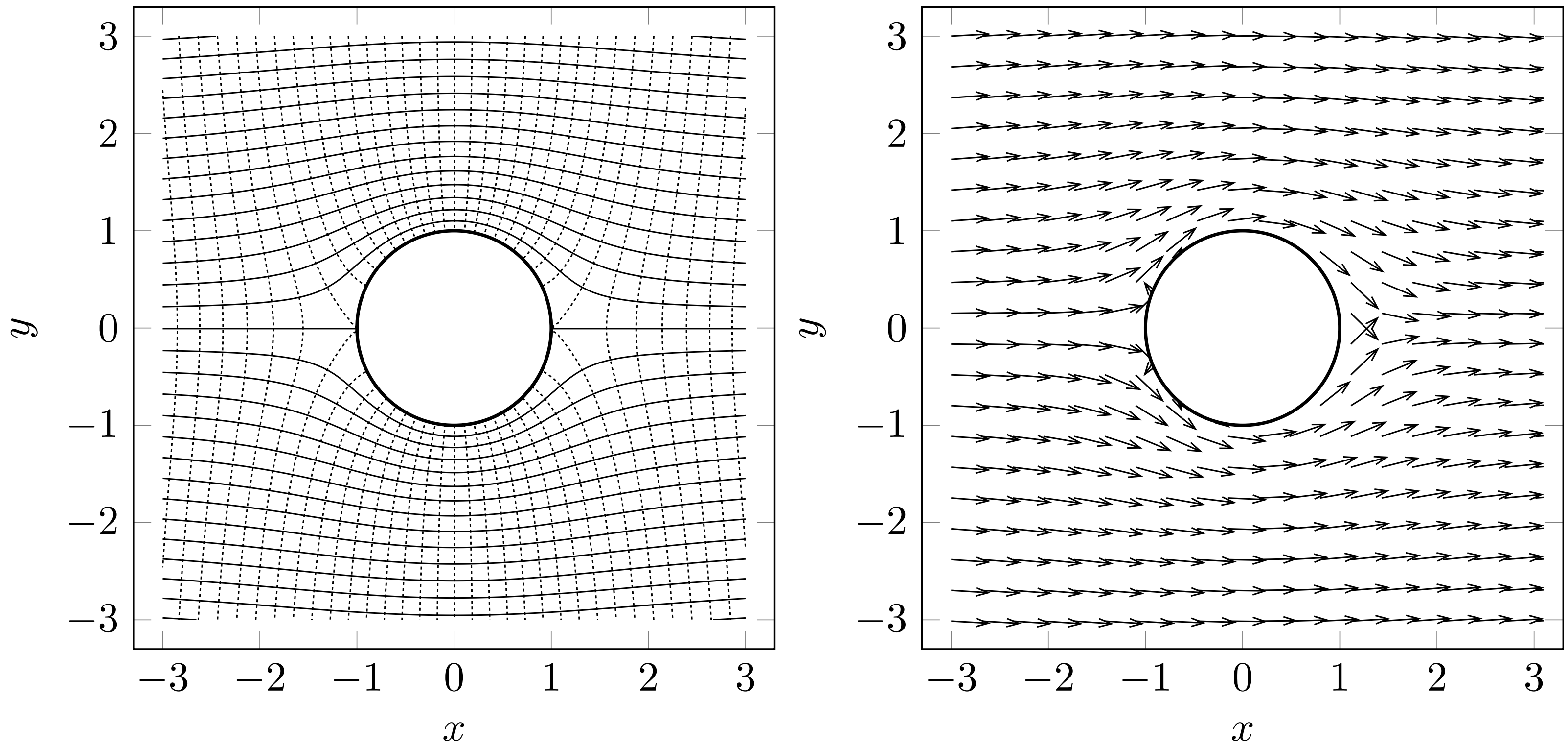




Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Bezcyrkulacyjny opływ koła

$$w(z) = u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \tag{452}$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Bezcyrkulacyjny opływ koła

Prędkość sprzężona

$$e^{i\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = u_\infty\left(e^{i\alpha} - \tfrac{R^2}{e^{i\alpha}}\right) \tag{453}$$

lub

$$e^{i\alpha}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = u_\infty\left(1 - \tfrac{R^2}{r^2}\right)\cos\alpha + iu_\infty\left(1 + \tfrac{R^2}{r^2}\right)\sin\alpha \tag{454}$$

Prędkości na opływanym kole o promieniu R wyniosą

$$u_r(R,\alpha) = 0 \tag{455a}$$

$$u_\alpha(R,\alpha) = -2u_\infty\sin\alpha \tag{455b}$$

Rozkład ciśnień

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho u^2 = p_0 - 2\rho u_\infty^2\sin^2\alpha \tag{456}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Paradox d'Alemberta

Rozkład ciśnień jest symetryczny, co skutkuje brakiem siły wypadkowej

$$\mathbf{F} = \oiint_S \boldsymbol{\sigma}_n \, \mathrm{d}S \tag{457}$$

lub na krzywej L

$$\mathbf{F} = -\oint_L p \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}L \tag{458}$$

którą jest okrąg o promieniu R

$$L = \{(x, y) : x = R\cos\alpha, y = R\sin\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi\} \tag{459}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

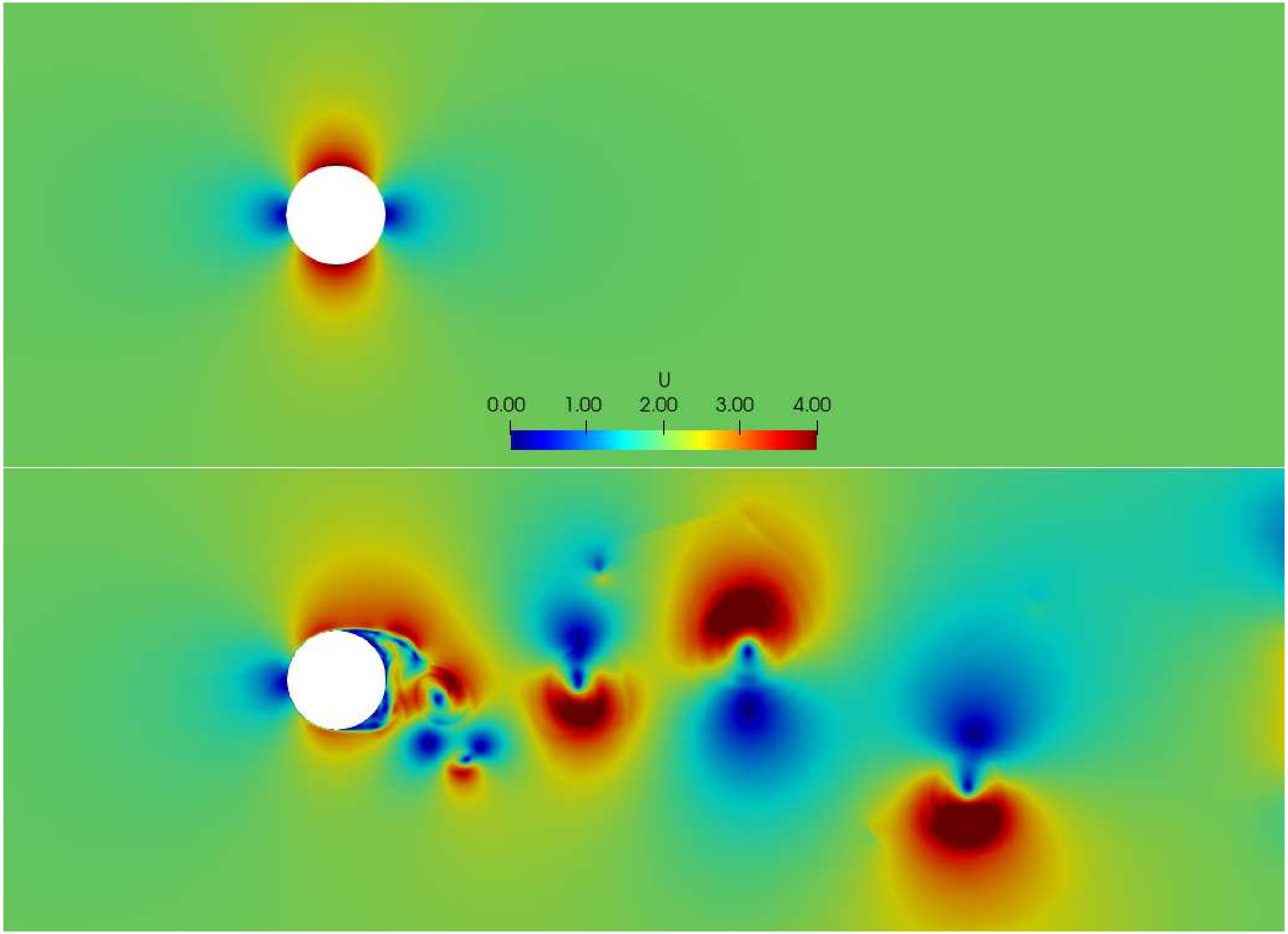
Wersor normalny do okręgu można zapisać

$$\hat{\boldsymbol{n}} = (\cos\alpha, \sin\alpha) \tag{460}$$

Zatem reakcja

$$\mathbf{F} = -\int_0^{2\pi} \left(p_0 - 2\rho u_\infty^2 \sin^2\alpha\right) (\hat{\boldsymbol{\imath}} \cos\alpha + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \sin\alpha) R \,\mathrm{d}\alpha = \mathbf{0} \tag{461}$$

Potencjalny i lepki opływy koła



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Cyrkulacyjny opływ koła

Potencjał zespolony

$$w(z) = u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z \qquad (462)$$

Potencjał i funkcja prądu

$$\varphi(r,\alpha) = u_\infty r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi}(\varphi + 2\pi k) \qquad (463a)$$

$$\psi(r,\alpha) = u_\infty r \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\alpha - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \qquad (463b)$$

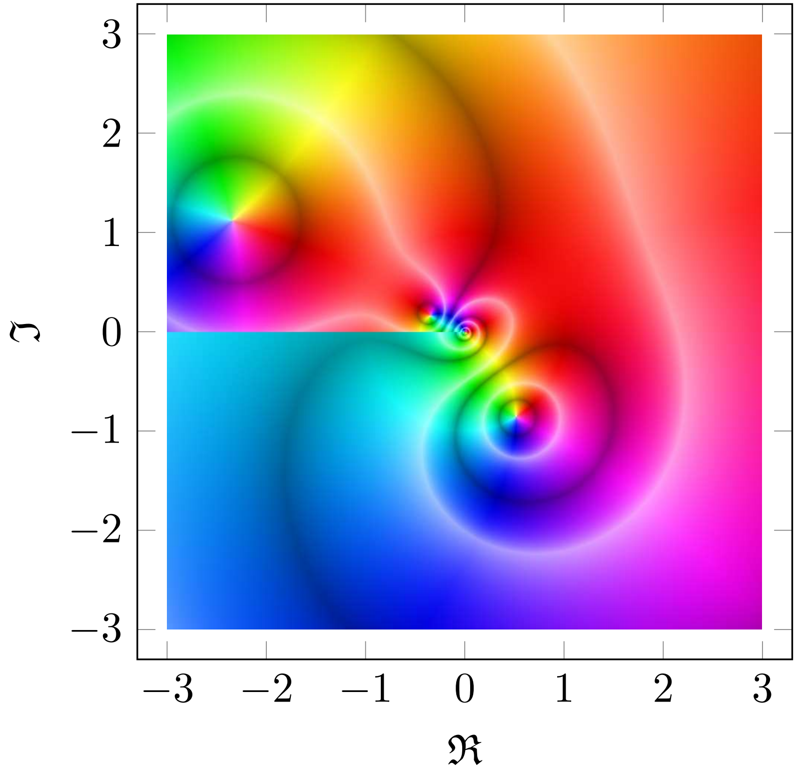
Prędkość sprzężona

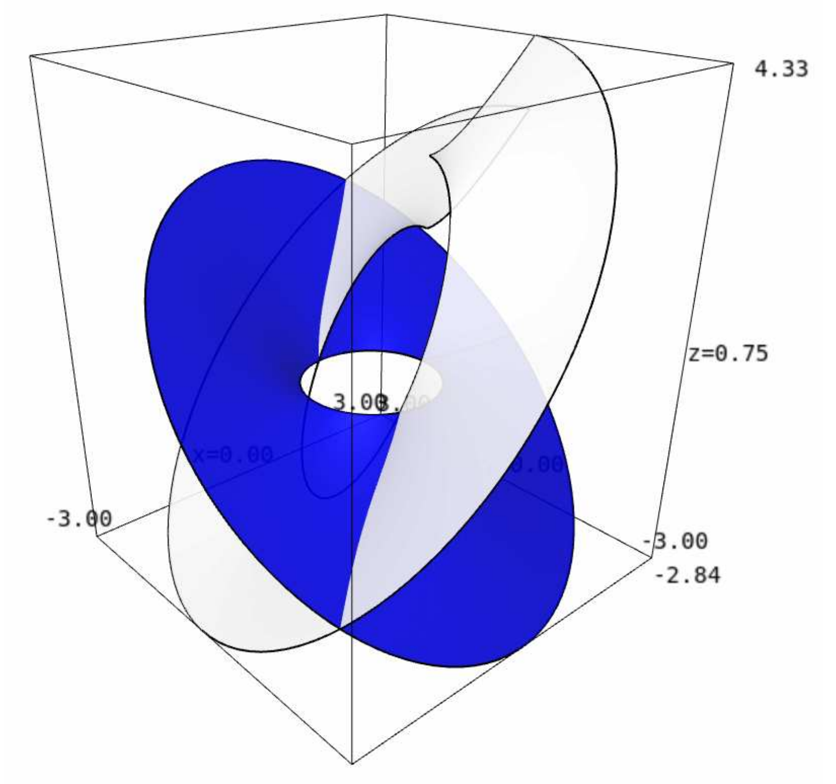
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} \qquad (464)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Cyrkulacyjny opływ koła

$$w(z) = u_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\,z \qquad (465)$$

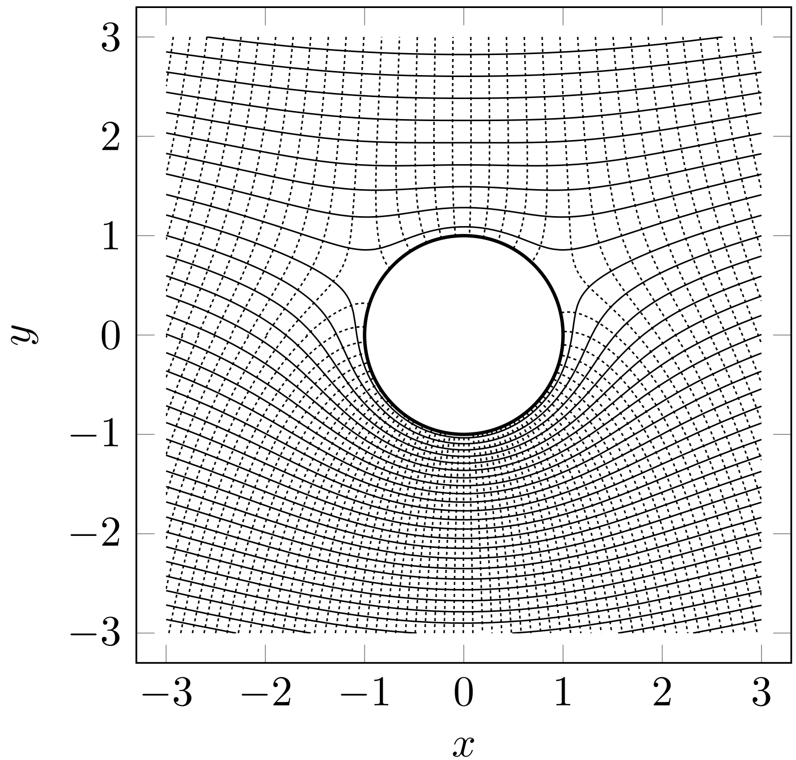


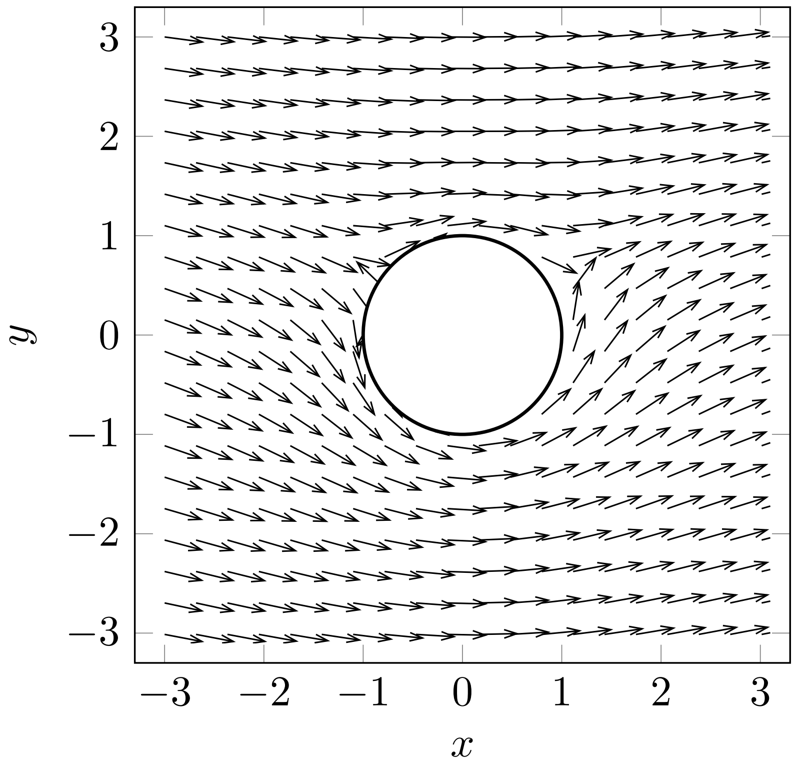


Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Cyrkulacyjny opływ koła

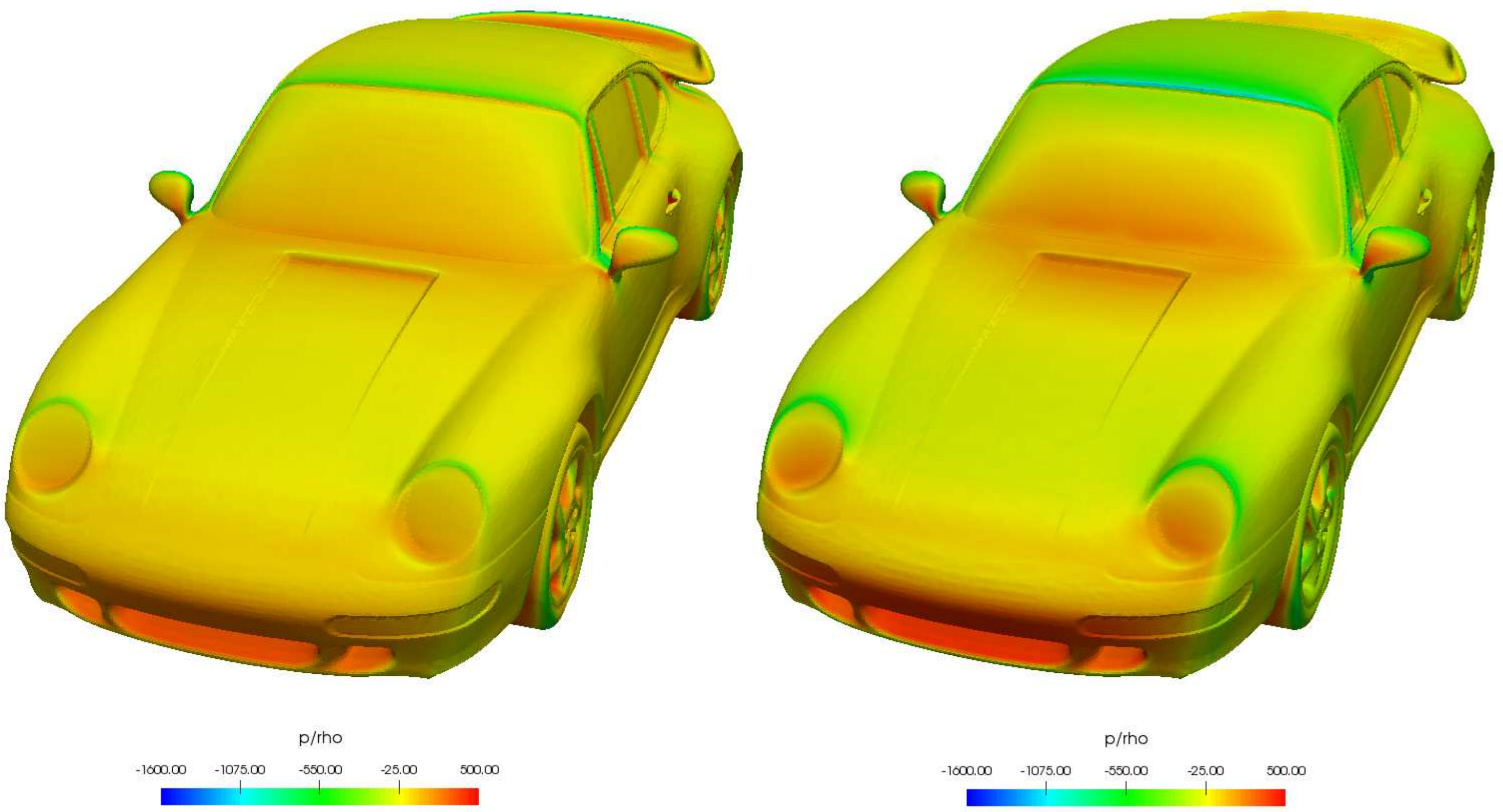
$$w(z) = u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z \qquad (466)$$





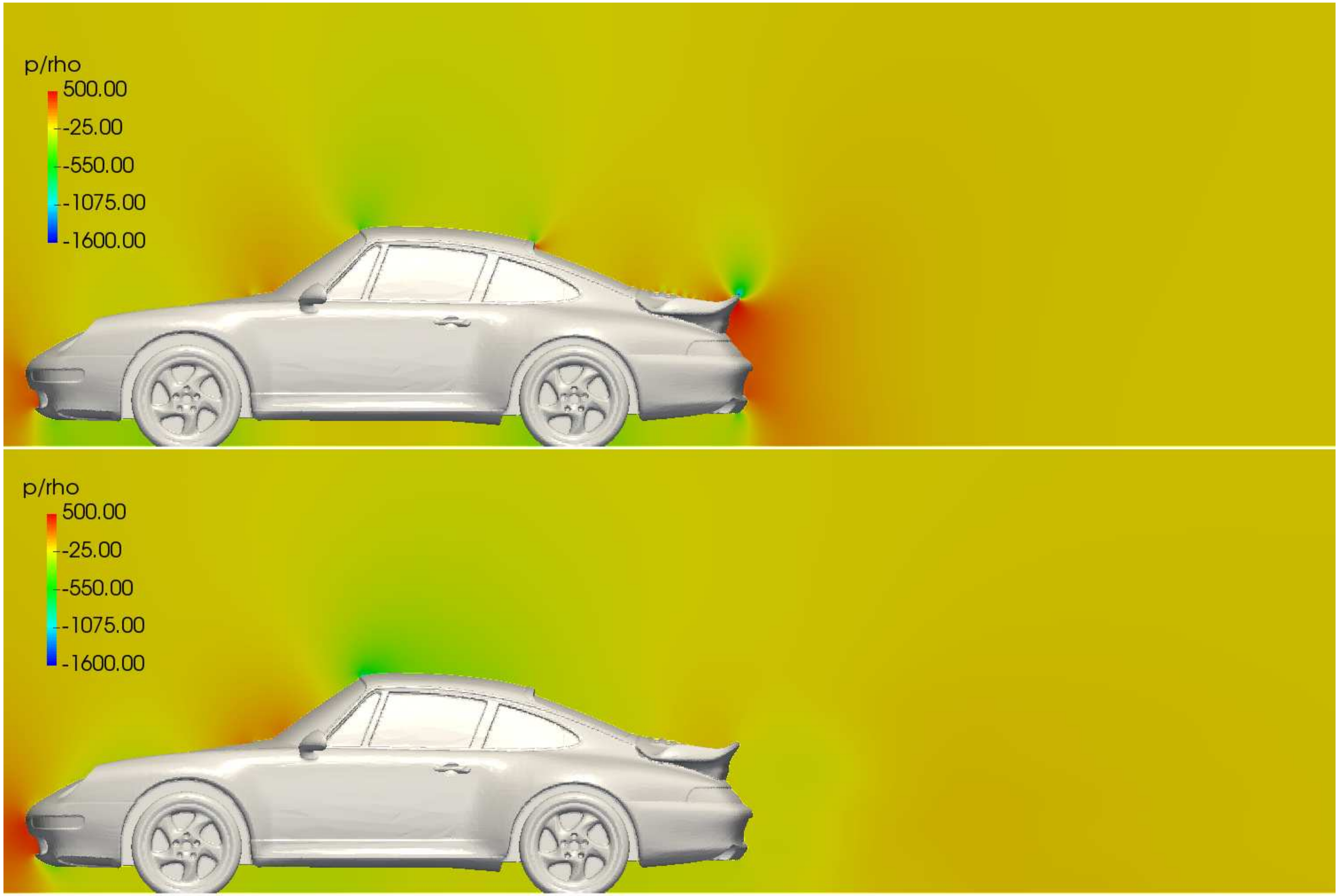
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Współczynnik oporu samochodu



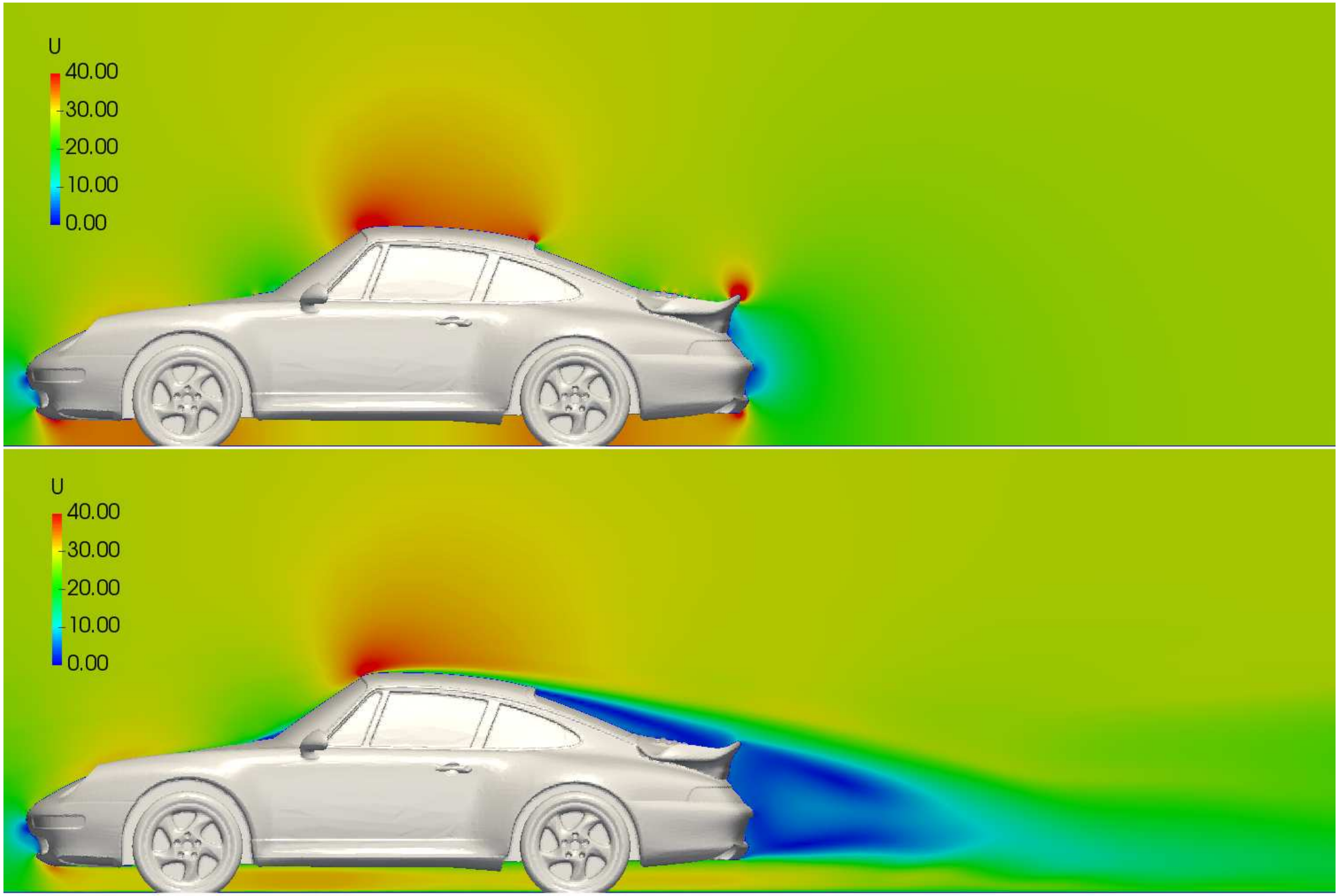
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Współczynnik oporu samochodu



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Współczynnik oporu samochodu



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Współczynnik oporu samochodu

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 A}$$

	C_D
Pomiar	0.34
Potencjalny	0.11
Lepki	0.35
Lepki (p)	0.33
Lepki (μ)	0.02

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Współczynnik oporu samochodu

Równanie zachowania pędu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \qquad (467)$$

Siły $\mathbf{F}$ na powierzchnię S

$$\mathbf{F} = -\iint\limits_S \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S \qquad (468)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ oraz $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}^{\mathrm{D}}$

$$\mathbf{F} = \iint\limits_S p\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S - 2\mu\iint\limits_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{D}^{\mathrm{D}}\,\mathrm{d}S \qquad (469)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Gazodynamika

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Założenia i uproszczenia

Gazodynamika zajmuje się przepływami gazu przy prędkościach porównywalnych i większych niż prędkość dźwięku a.

Założenia/uproszczenia:

- współczynnik lepkości $\mu = 0$
- współczynnik przewodnictwa $\lambda = 0$
- przepływ ściśliwy $\rho \neq \mathrm{const}$
- brak sił masowych $\Pi = 0$

Dodatkowe założenia:

- adiabatyczność, skąd wynika adiabata Poissona

$$p\rho^{-\kappa} = \mathrm{const} \qquad (470)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Warunki zgodności wynikające z równania:

- zachowania masy

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\rho \mathbf{u}] = 0 \tag{471}$$

- zachowania pędu

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\rho \mathbf{u}\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{0} \tag{472}$$

- zachowania energii

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\rho \mathbf{u} e_k - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}] = 0 \tag{473}$$

gdzie zapis $[f]$ oznacza różnicę wartości f po obu stronach powierzchni (nie)ciągłości

$$[f] = f_1 - f_2 \tag{474}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Warunki zgodności

W zagadnieniach gazodynamiki $\mu = 0$, $\lambda = 0$ warunki zgodności wynikające z równania:

- zachowania masy

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\rho \mathbf{u}] = [\rho u_n] = 0 \qquad (475)$$

- zachowania pędu

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\rho \mathbf{u}\mathbf{u} + p\boldsymbol{\delta}] = [\rho u_n \mathbf{u} + p\hat{\boldsymbol{n}}] = \mathbf{0} \qquad (476)$$

- zachowania energii

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\rho \mathbf{u} e_k + p\mathbf{u}] = \left[\rho u_n \left(e_k + \frac{p}{\rho}\right)\right] = 0 \qquad (477)$$

gdyż $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta}$ i $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Prędkość dźwięku

Małe (słabe) zaburzenia gazu rozchodzą się z prędkością dźwięku a.

$$\begin{array}{ccc|ccc} \rightarrow & & a & a+\mathrm{d}a & & \rightarrow \\ \rightarrow & & p & p+\mathrm{d}p & & \rightarrow \\ \rightarrow & & \rho & \rho+\mathrm{d}\rho & & \rightarrow \end{array}$$

Przed zaburzeniem mamy parametry a, p, ρ, a za zaburzeniem $a+\mathrm{d}a$, $p+\mathrm{d}p$, $\rho+\mathrm{d}\rho$. Z warunku zgodności z równania zachowania masy dla $u_n = a$ mamy

$$\rho a = (\rho + \mathrm{d}\rho)(a + \mathrm{d}a) \qquad (478)$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{a}{\rho} \qquad (479)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Prędkość dźwięku

Z warunku zgodności z równania zachowania pędu dla $u_n = a$ mamy

$$\rho a^2 + p = (\rho + \mathrm{d}\rho)(a + \mathrm{d}a)^2 + p + \mathrm{d}p \qquad (480)$$

skąd

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{a^2 + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}{2\rho a} \qquad (481)$$

Z równań (479) i (481) otrzymujemy

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \qquad (482)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Prędkość dźwięku

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{483}$$

Adiabata Poissona i równanie stanu gazu doskonałego $p = \rho RT$ pozwalają zapisać

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa RT \tag{484}$$

Zatem prędkość dźwięku wyliczana jest jako

$$a = \sqrt{\kappa RT} \tag{485}$$

W warunkach standardowych $a \approx 341$ m/s.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

Pierwszym równaniem jest równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{486}$$

Drugie równanie – to równanie Eulera

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p \tag{487}$$

Trzecie równanie – to adiabata Poissona

$$p \rho^{-\kappa} = p_0 \rho_0^{-\kappa} \tag{488}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

W przypadku propagacji małych zaburzeń rozważa się wyłącznie fluktuacje wokół wartości niezaburzonej. Dla gęstości zapisujemy

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t) \tag{489}$$

Dla ciśnienia

$$p(x, y, z, t) = p_0 + p'(x, y, z, t) \tag{490}$$

Natomiast dla prędkości mamy wyłącznie fluktuacje wokół nieruchomego gazu

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}'(x, y, z, t) \tag{491}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

Równania linearyzuje się poprzez odrzucenie iloczynów fluktuacji. W przypadku równania zachowania masy zapisujemy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho')\mathbf{u}') = 0 \qquad (492)$$

Po linearyzacji otrzymamy nieco prostszą postać równania zachowania masy

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \qquad (493)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

W przypadku równania Eulera zapisujemy

$$(\rho_0 + \rho')\left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}_{\approx \mathbf{0}}\right) = -\nabla(p_0 + p') \quad (494)$$

Po linearyzacji (odrzuceniu iloczynów fluktuacji) otrzymamy dużo prostszą postać równania

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p' \quad (495)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

Adiabat Poissona $p\rho^{-\kappa} = p_0\rho_0^{-\kappa}$ zapisywana jest jako

$$p = p_0\rho_0^{-\kappa}\rho^{\kappa} \tag{496}$$

i rozwijana w szereg Taylora wokół ρ_0 z dokładnością do wyrazów liniowych

$$\underbrace{p - p_0}_{=p'} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\underbrace{(\rho - \rho_0)}_{=\rho'} \tag{497}$$

Dodatkowo $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = a_0^2$, więc zlinearyzowana adiabata Poissona ma postać

$$p' = a_0^2\rho' \tag{498}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

Liniowe równania akustyki.
Równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \tag{499}$$

Równanie Eulera

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p' \tag{500}$$

Adiabata Poissona

$$p' = a_0^2 \rho' \tag{501}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

Każde z równań liniowej akustyki może być sprowadzone do równania falowego

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + a_0^2 \nabla^2 \phi = 0 \tag{502}$$

Dla ϕ równego ρ', p' i $\mathbf{u}'$. Rozwiązaniem analitycznym równania falowego w jednym wymiarze przestrzennym jest

$$\phi(x,t) = f(x + a_0 t) + g(x - a_0 t) \tag{503}$$

gdzie f i g są dowolnymi funkcjami spełniającymi warunki początkowe i brzegowe.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

Rozważając uproszczoną wersję rozwiązania analitycznego w postaci

$$\phi(x,t) = f(x + a_0 t) \tag{504}$$

widać, że wartości

$$f(x + a_0 t) = f(x_1 + a_0 \Delta t) \tag{505}$$

są identyczne, gdyż punkt $x_1 = x + a_0 t_1$ osiągnięty jest w czasie $\Delta t = t - t_1$, skąd

$$f(x + a_0 t) = f\left(x + a_0 t_1 + a_0 (t - t_1)\right) \tag{506}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka

$$\phi(x,t) = f(x + a_0 t) \tag{507}$$

Funkcja f jest zatem stała na linii $x + a_0 t$, która nazywana jest charakterystyką. Lub ogólniej

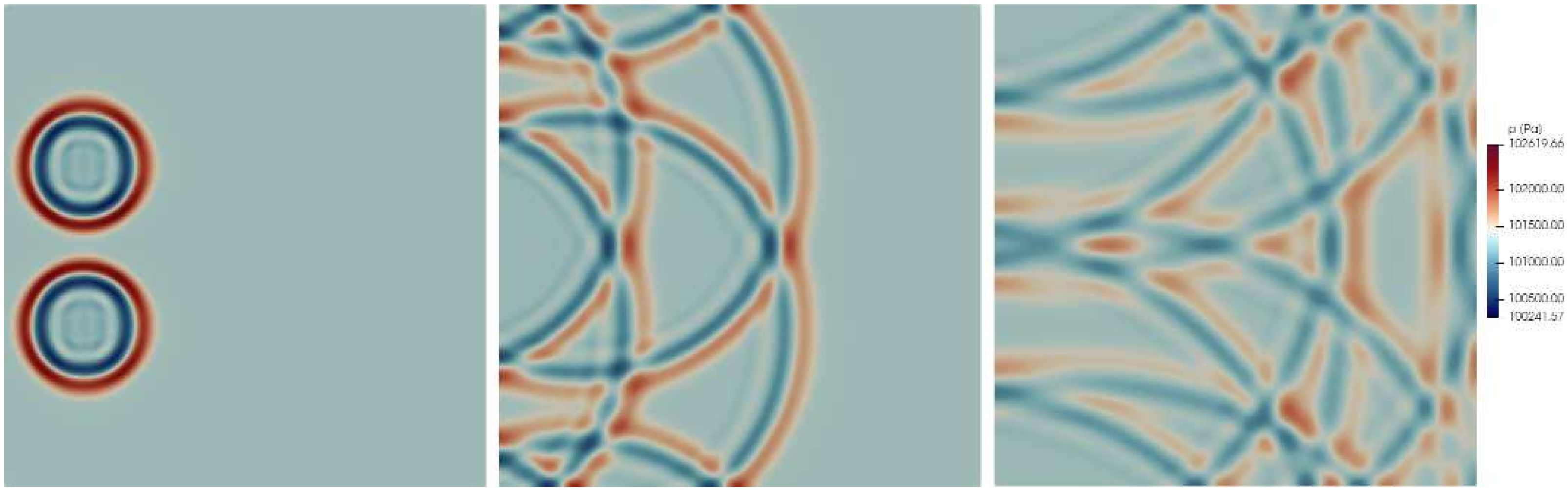
$$\phi(x,t) = f(x + a_0 t) + g(x - a_0 t) \tag{508}$$

funkcje f i g są stałe na charakterystykach $x \pm a_0 t$. Zatem zaburzenia propagują się bez deformacji z prędkościami

$$\frac{\mathrm{d}(x \pm a_0 t)}{\mathrm{d}t} = \pm a_0 \tag{509}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Małe zaburzenia – akustyka



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Duże zaburzenia

Pierwszym równaniem jest równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{510}$$

Drugie równanie – to równanie Eulera

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{511}$$

Trzecie równanie – wzór na prędkość dźwięku

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{512}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Duże zaburzenia

Dla przypadku przepływów jednowymiarowych i niestacjonarnych otrzymujemy równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{513}$$

równanie Eulera

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{514}$$

wzór na prędkość dźwięku $\mathrm{d}p = a^2\,\mathrm{d}\rho$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{515}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{516}$$

równanie Eulera plus równanie na prędkość dźwięku

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{517}$$

Różniczki zupełne gęstości i prędkości

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial \rho}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{518}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{519}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Duże zaburzenia

To samo macierzowo

$$\begin{pmatrix} 1 & u & 0 & \rho \\ 0 & \frac{a^2}{\rho} & 1 & u \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}\rho \\ \mathrm{d}u \end{pmatrix} \tag{520}$$

Rozwiązania nie istnieją, jeżeli wyznacznik macierzy się zeruje, co zapisuje się jako

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u^2 - a^2 = 0 \tag{521}$$

skąd otrzymujemy równania charakterystyk

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \pm a \tag{522}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Liczba Macha

$$\mathrm{Ma} = \frac{u}{a} \qquad (523)$$

gdzie u lokalna prędkość i a lokalna prędkość dźwięku

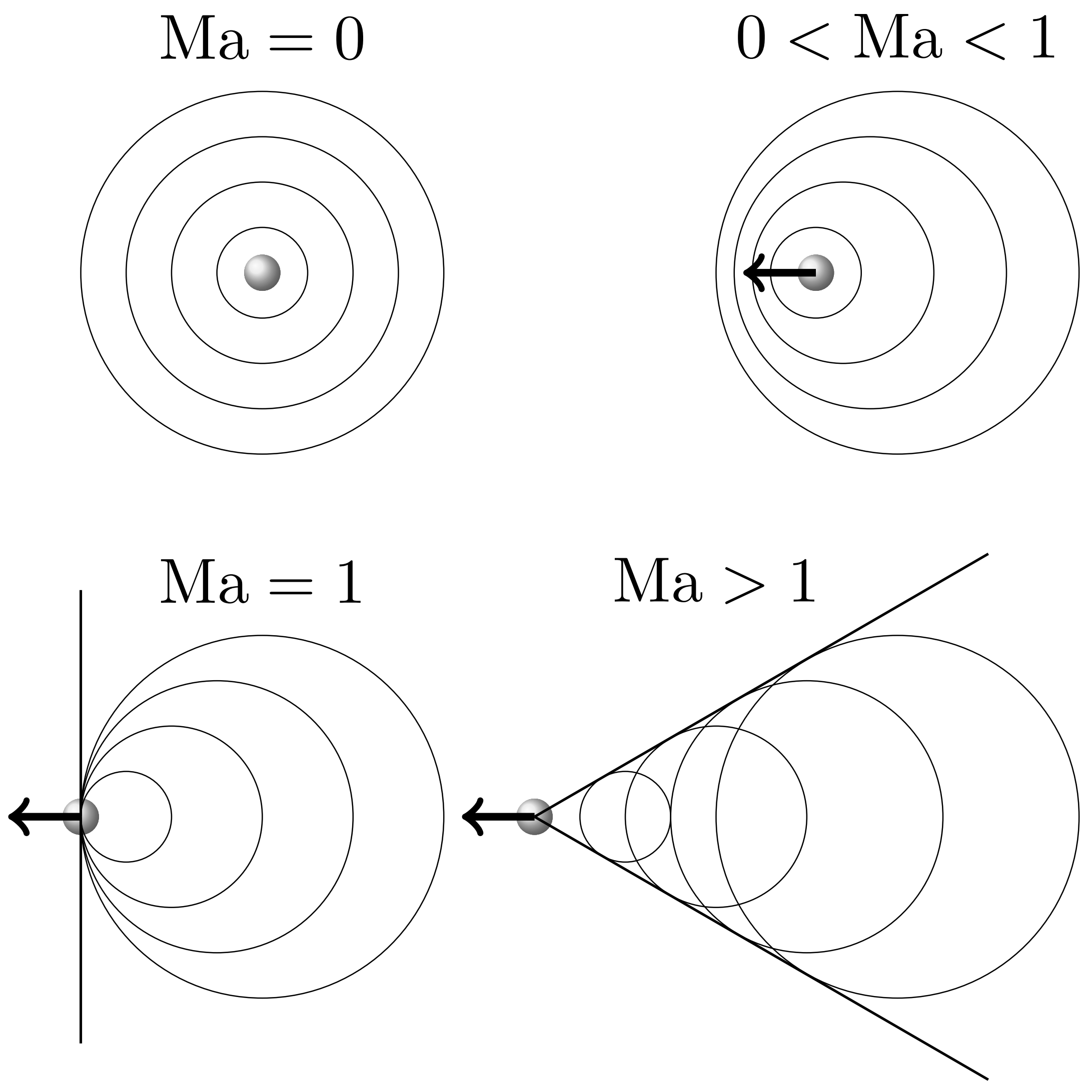
$$a = \sqrt{\kappa R T} \qquad (524)$$

Ze względu na liczbą Macha przepływy dzielimy na:

- poddźwiękowe $\mathrm{Ma} < 1$
- okołodźwiękowe $0.8 < \mathrm{Ma} < 1.2$
- naddźwiękowe $\mathrm{Ma} > 1$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

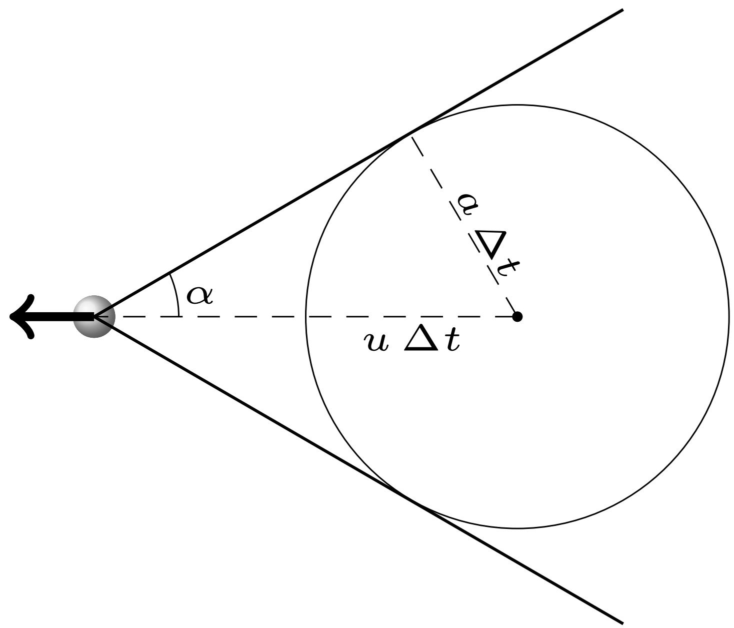
Fale uderzeniowe



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Kąt Macha

$$\sin\alpha = \frac{a\,\Delta t}{u\,\Delta t} = \frac{a}{u} = \frac{1}{\mathrm{Ma}} \qquad (525)$$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Prostopadła fala uderzeniowa

Duże zaburzenia rozchodzą się z prędkością większą niż prędkość dźwięku

$$\begin{array}{cc|cc} \longrightarrow & u_1 & u_2 & \longrightarrow \\ \longrightarrow & p_1 & p_2 & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \rho_1 & \rho_2 & \longrightarrow \\ \longrightarrow & T_1 & T_2 & \longrightarrow \end{array}$$

Przed falę mamy parametry u_1, p_1, ρ_1, T_1, a za falą u_2, p_2, ρ_2, T_2. Z warunku zgodności z równania zachowania masy mamy

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{526}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Prostopadła fala uderzeniowa

Z warunku zgodności z równania zachowania pędu mamy

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \tag{527}$$

Z warunku zgodności z równania zachowania energii mamy

$$e_{k1} + \frac{p_1}{\rho_1} = e_{k2} + \frac{p_2}{\rho_2} \tag{528}$$

Biorąc pod uwagę, że $e_k = \frac{1}{2}u^2 + e$, $e = c_v T$, $h = c_p T$, $h = e + \frac{p}{\rho}$, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, można zapisać powyższe równanie jako

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_2}{\rho_2} \tag{529}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Prostopadła fala uderzeniowa

Układ równań Rankine'a-Hugoniota (warunki zgodności)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{530}$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \tag{531}$$

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_2}{\rho_2} \tag{532}$$

pozwalają wyliczyć np. parametry za falą uderzeniową, znając parametry przed falą. Np. zachodzą następujące zależności

$$\frac{p_2}{p_1} \geqslant 1, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \geqslant 1, \quad \frac{u_2}{u_1} \leqslant 1 \tag{533}$$

$$\frac{2\kappa}{\kappa - 1}\left(\mathrm{Ma}_1^2 - 1\right) \geqslant 0, \quad \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \leqslant \mathrm{Ma}_2^2 \leqslant 1 \tag{534}$$

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

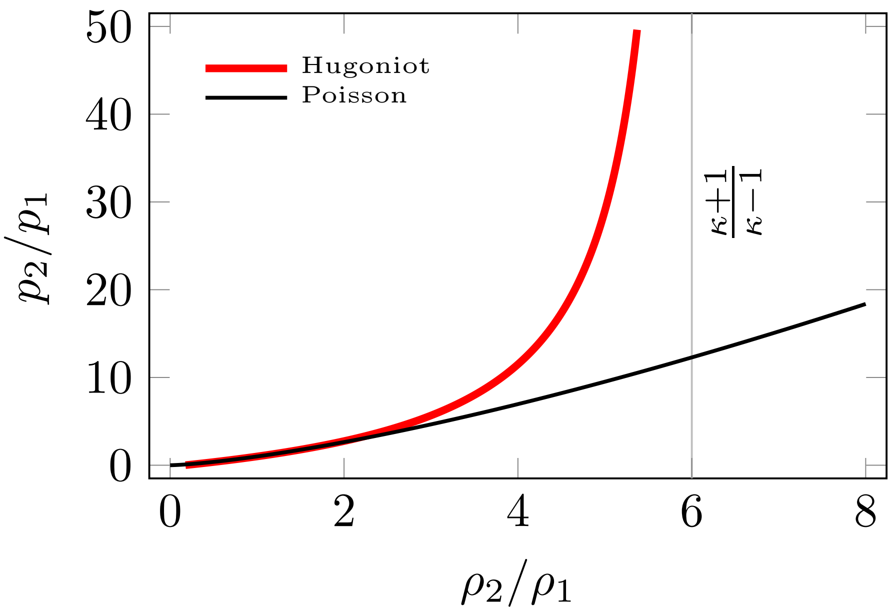
Literatura

Prostopadła fala uderzeniowa

Z warunków zgodności wynika wzór na adiabatę Hugoniota

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \tag{535}$$

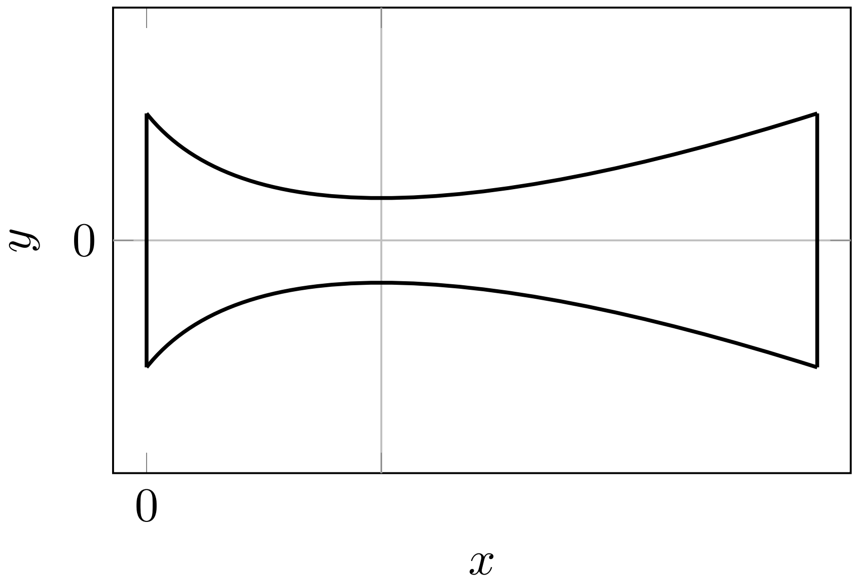
którą można porównać z adiabatą Poissona $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2^\kappa}{\rho_1^\kappa}$



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dysza de Lavala

- kanał zbieżno-rozbieżny
- ma przekrój minimalny
- umożliwia rozpędzenie gazu do prędkości naddźwiękowych



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Teoria jednowymiarowa:

- $u_y = u_z = 0,\ u_x = u$
- przepływ jest stacjonarny $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Jednowymiarowe równanie zachowania masy

$$\dot{m} = \rho u s = \mathrm{const} \tag{536}$$

Różniczkując wzdłuż długości, otrzymamy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} u s + \rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} s + \rho u \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{537}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Eulera

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)=-\nabla p \tag{538}$$

zgodnie z założeniami upraszcza się do postaci

$$\rho u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{539}$$

Dodatkowo mamy dla prędkości dźwięku $a^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a^2}\left(-\rho u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \tag{540}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Z poprzedniego równania

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = -\frac{\rho u}{a^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{541}$$

i równania zachowania masy

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}us + \rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}s + \rho u\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{542}$$

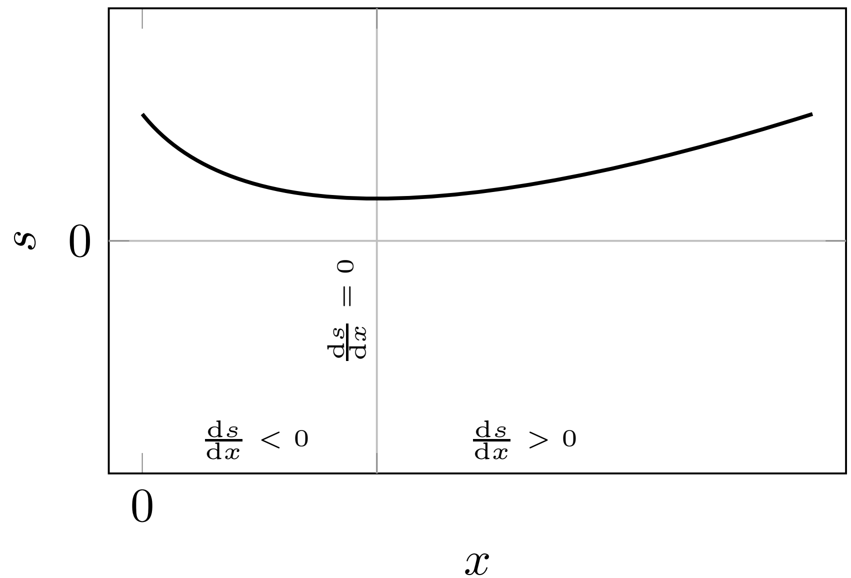
otrzymujemy ostatecznie

$$\left(\mathrm{Ma}^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{543}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dysza de Lavala

$$\left(\mathrm{Ma}^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{544}$$

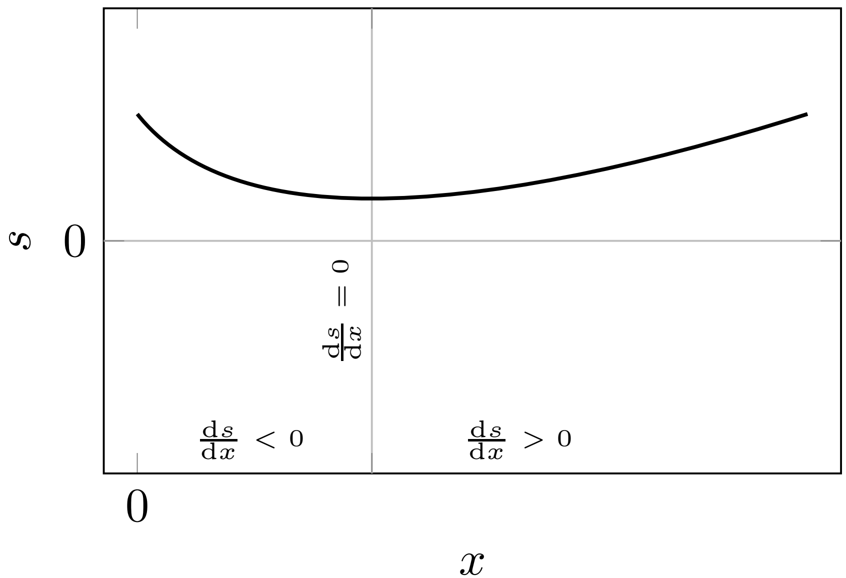


	$\mathrm{Ma} < 1$	$\mathrm{Ma} > 1$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} < 0$	$u \nearrow$	$u \searrow$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} > 0$	$u \searrow$	$u \nearrow$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dysza de Lavala

$$\left(\mathrm{Ma}^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \qquad (545)$$



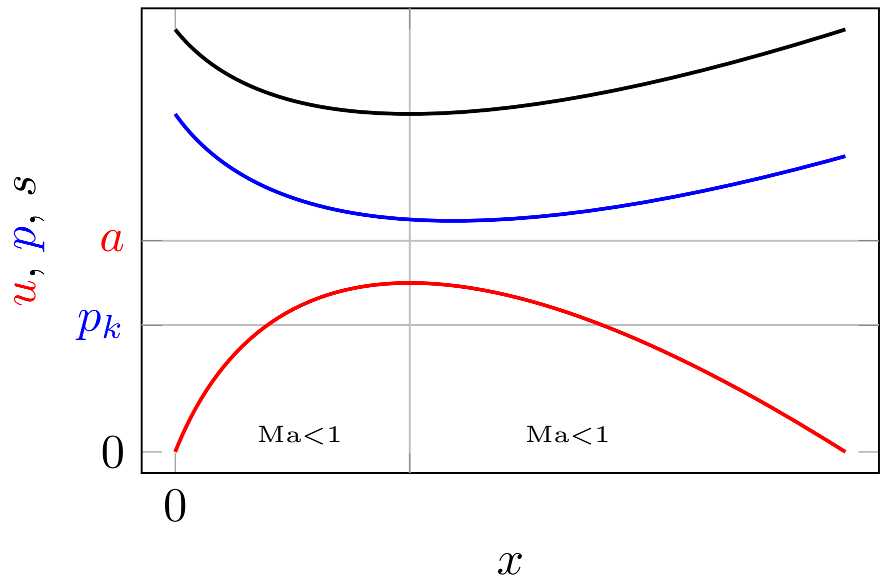
Dalsze wnioski:

- Jeżeli $\mathrm{Ma} = 1$, to $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 0$
- Jeżeli $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 0$, to albo $\mathrm{Ma} = 1$, albo $\mathrm{Ma} \neq 1$ i wtedy $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dysza de Lavala

$$\left(\mathrm{Ma}^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{546}$$

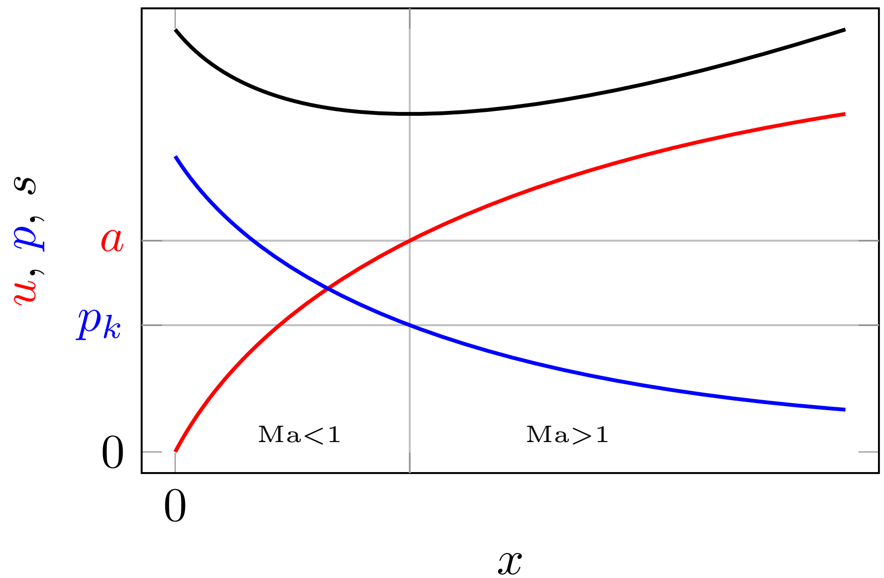


	$\mathrm{Ma} < 1$	$\mathrm{Ma} > 1$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} < 0$	$u \nearrow$	$u \searrow$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} > 0$	$u \searrow$	$u \nearrow$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dysza de Lavala

$$\left(\mathrm{Ma}^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{547}$$

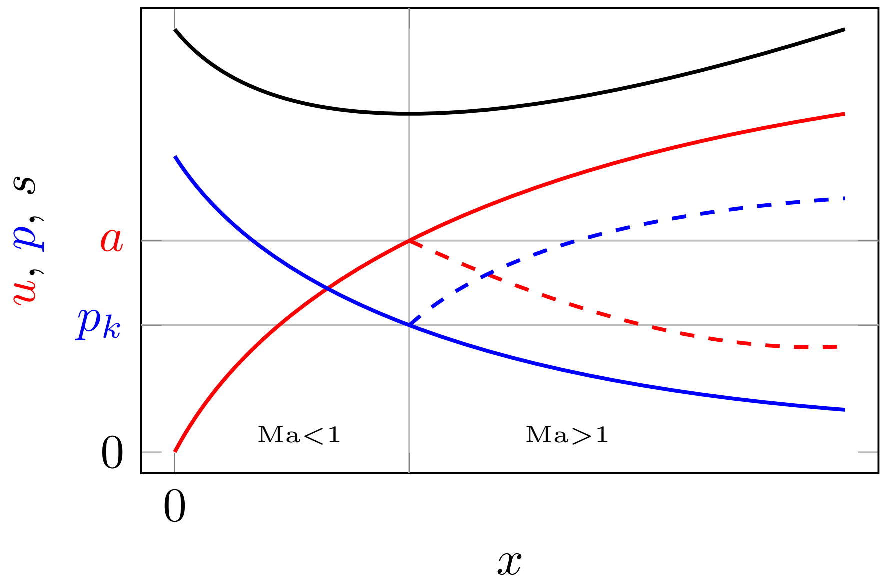


	$\mathrm{Ma} < 1$	$\mathrm{Ma} > 1$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} < 0$	$u \nearrow$	$u \searrow$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} > 0$	$u \searrow$	$u \nearrow$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dysza de Lavala

$$\left(\mathrm{Ma}^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \qquad (548)$$

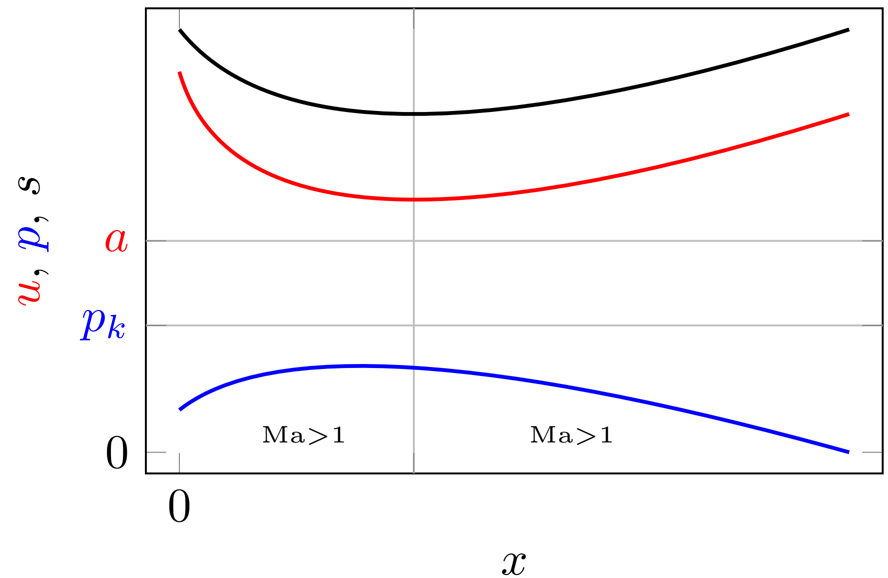


	$\mathrm{Ma} < 1$	$\mathrm{Ma} > 1$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} < 0$	$u \nearrow$	$u \searrow$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} > 0$	$u \searrow$	$u \nearrow$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Dysza de Lavala

$$\left(\mathrm{Ma}^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \qquad (549)$$



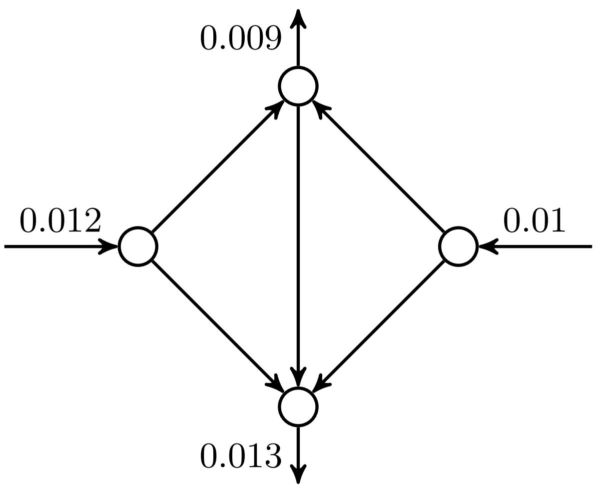
	$\mathrm{Ma} < 1$	$\mathrm{Ma} > 1$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} < 0$	$u \nearrow$	$u \searrow$
$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} > 0$	$u \searrow$	$u \nearrow$

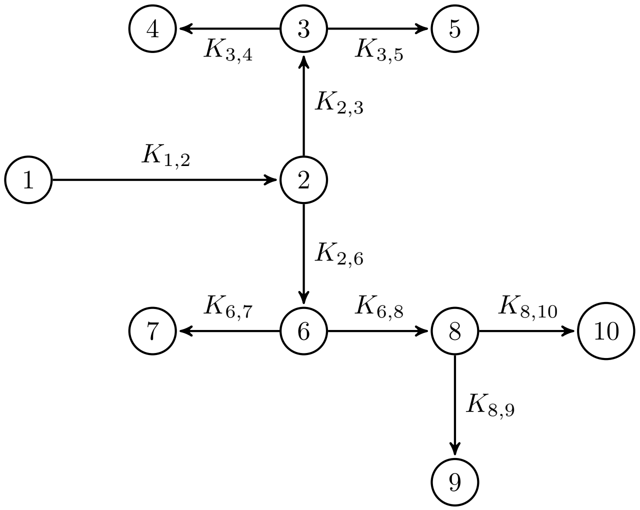
Rurociągi

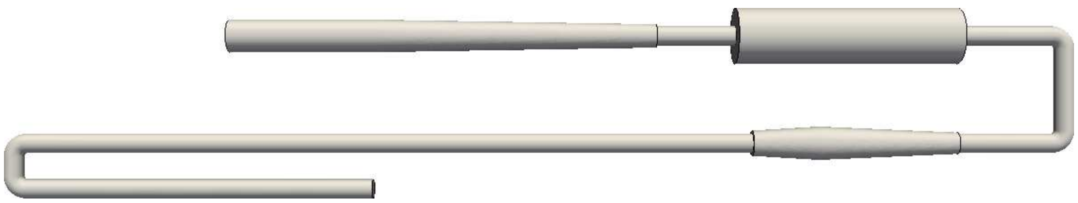
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Typy sieci rurociągów

- Sieci zamknięte
- Sieci otwarte

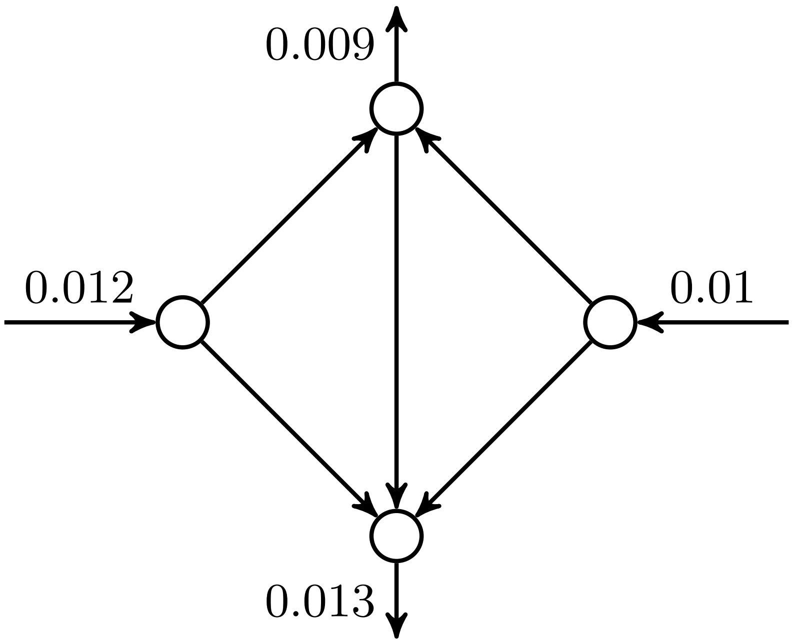






Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Sieci zamknięte – pytania



- Jakie są poszczególne natężenia przepływu?
- Jakie są poszczególne spadki ciśnień?
- Jakie są kierunki przepływu?

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Bernoulliego

$$\left(\frac{u_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1\right)-\left(\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2\right)=e_2-e_1 \tag{550}$$

$$\left(\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\right)-\left(\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2\right)=\sum_i \Delta h_{li}+\cancel{\sum_j \Delta h_{nj}} \tag{551}$$

- energia kinetyczna $\frac{u^2}{2}$
- energia ciśnienia $\frac{p}{\rho}$
- energia potencjalna gz
- energia wewnętrzna e

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Darcy'ego-Weisbacha

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{\rho u^2}{2} \tag{552}$$

straty liniowe

$$\Delta h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{u^2}{2g} = \frac{\lambda}{S^2} \frac{l}{D} \frac{\dot{V}^2}{2g} = K \dot{V}^2 \tag{553}$$

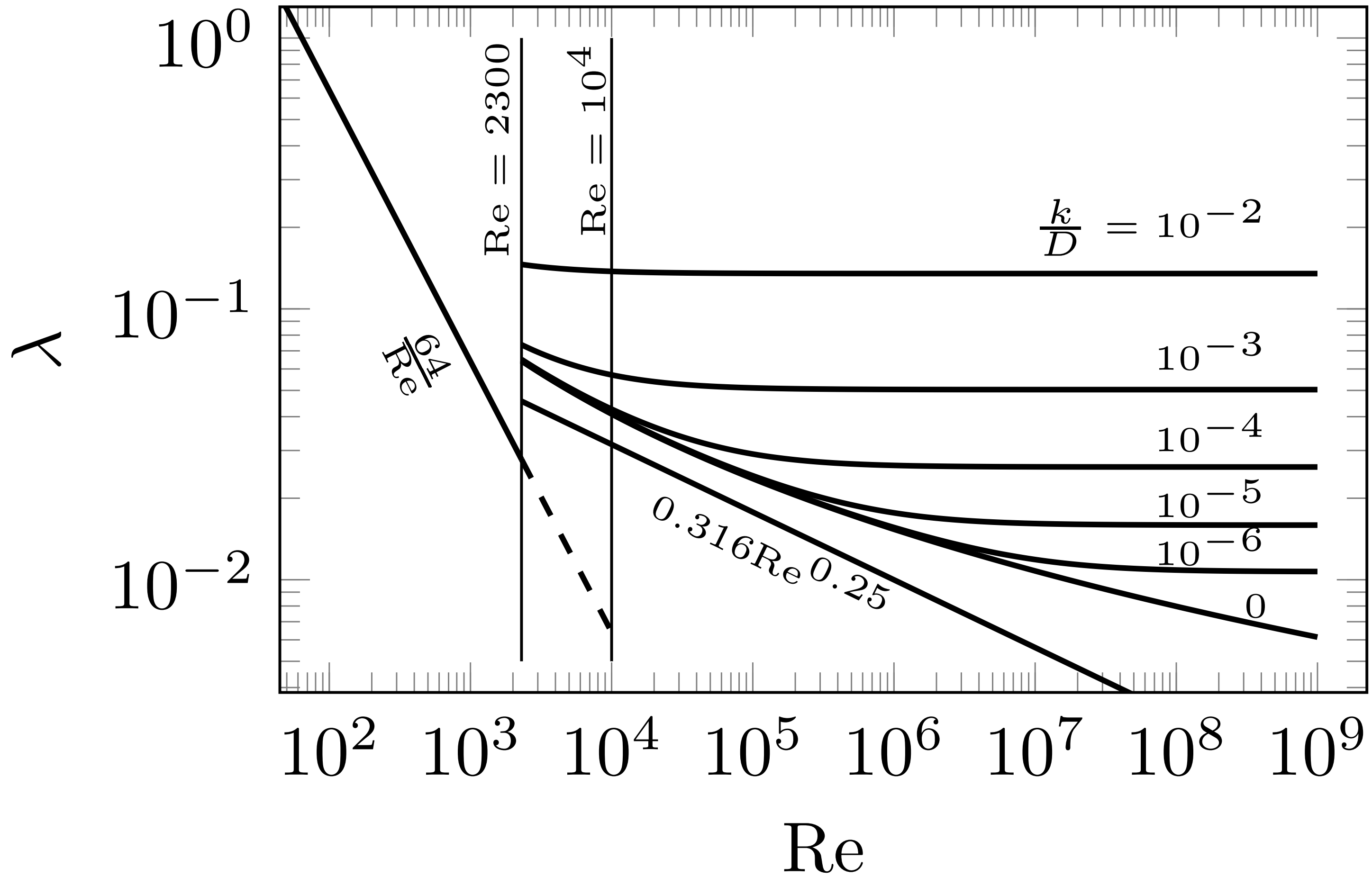
gdzie

$$K = \frac{8 \lambda l}{\pi^2 D^5 g} \tag{554}$$

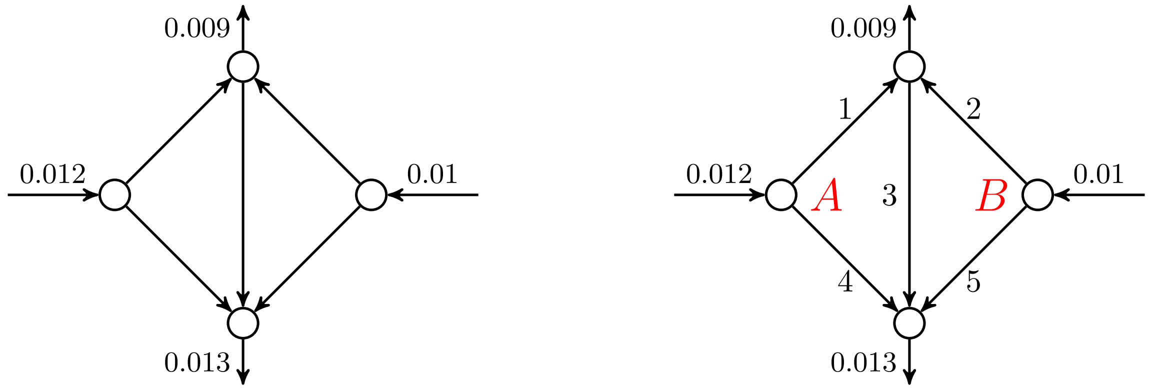
Równanie Haalanda

$$\lambda = \frac{0.409097}{\log_{10}^2 \left[\left(\frac{k/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\mathrm{Re}} \right]} \tag{555}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura



- Równanie zachowania masy

$$\sum_i \dot{V}_{in} = \sum_j \dot{V}_{out} \tag{556}$$

- Równanie zachowania energii

$$\sum_i \Delta h_i = 0 \tag{557}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Nowe przybliżenie $\dot{V}$ oblicza się jako

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_0 + \Delta\dot{V} \tag{558}$$

Spowoduje to, że suma spadków ciśnień w pętli będzie bliższa zeru. Spadek początkowy

$$\Delta h_0 = K\dot{V}_0^2 \tag{559}$$

Poprawiony spadek w rurze

$$\Delta h_1 = K\dot{V}_1^2 = K\left(\dot{V}_0 + \Delta\dot{V}\right)^2 \approx K\left(\dot{V}_0^2 + 2\dot{V}_0\Delta\dot{V}\right) \tag{560}$$

Wyrazy wyższych rzędów są odrzucane.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Sumując spadki ciśnień dla danej pętli

$$\sum_i \Delta h_i = 0 \tag{561}$$

$$\sum_i \left(K_i \dot{V}_{0i}^2 + 2K_i \dot{V}_{0i} \Delta \dot{V} \right) = 0 \tag{562}$$

$$\sum_i \Delta h_{0i} + 2\Delta \dot{V} \sum_i K_i \frac{\dot{V}_{0i}^2}{\dot{V}_{0i}} = 0 \tag{563}$$

Ostatecznie znajdujemy poprawkę

$$\Delta \dot{V} = -\frac{\sum_i \Delta h_{0i}}{2 \sum_i \frac{\Delta h_{0i}}{\dot{V}_{0i}}} \tag{564}$$

gdzie $\Delta h_{0i} = K_i \dot{V}_{0i} |\dot{V}_{0i}|$.

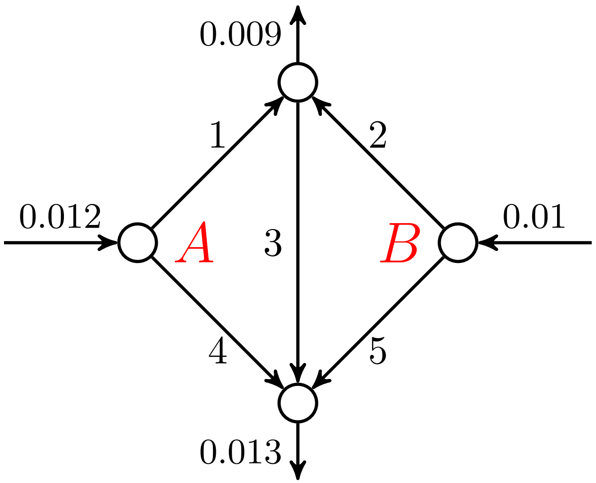
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

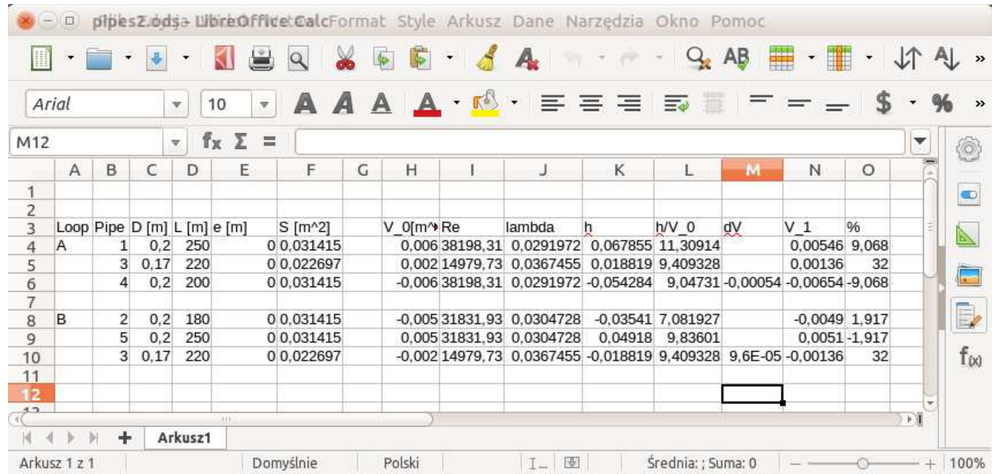
Algorytm

- Identyfikacja wszystkich najmniejszych pętli w sieci;
- Przyjęcie początkowego $\dot{V}_i$ jest dowolne, ale równanie zachowania masy musi być spełnione w każdym węźle;
- Znak $\dot{V}_i$ jest dodatni, jeżeli założony kierunek przepływu jest zgodny z kierunkiem wskazówek zegara;
- Obliczenie spadków ciśnienia we wszystkich rurociągach;
- Korekcja $\dot{V}_i$ w każdym rurociągu w rozważanych pętlach o $\Delta\dot{V}$. Zapewnia to, że równanie zachowania masy jest spełnione;
- Powtarzanie dopóki $|\Delta\dot{V}| \leqslant \varepsilon$.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Przykład





Loop	Pipe	D [m]	L [m]	e [m]	S [m^2]	V_0[m^	Re	lambda	h	h/V_0	dV	V_1	%
A	1	0,2	250	0	0,031415	0,006	38198,31	0,0291972	0,067855	11,30914		0,00546	9,068
	3	0,17	220	0	0,022697	0,002	14979,73	0,0367455	0,018819	9,409328		0,00136	32
	4	0,2	200	0	0,031415	-0,006	38198,31	0,0291972	-0,054284	9,04731	-0,00054	-0,00654	-9,068
B	2	0,2	180	0	0,031415	-0,005	31831,93	0,0304728	-0,03541	7,081927		-0,0049	1,917
	5	0,2	250	0	0,031415	0,005	31831,93	0,0304728	0,04918	9,83601		0,0051	-1,917
	3	0,17	220	0	0,022697	-0,002	14979,73	0,0367455	-0,018819	9,409328	9,6E-05	-0,00136	32

Nr	$D[m]$	$L[m]$	$\dot{V}[\frac{m^3}{s}]$
1	0.2	250	0.00533
2	0.2	180	0.0051
3	0.17	220	0.00143
4	0.2	200	0.00667
5	0.2	250	0.0049

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Liniowe rozwinięcie w szereg Taylora

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}(x - x_0) \tag{565}$$

Jeżeli $f(\dot{V}) = \Delta h = k\dot{V}^2$, to liniowe rozwinięcie w szereg $k\dot{V}^2$ ma postać

$$k\dot{V}^2 \approx K\dot{V}_0^2 + 2K\dot{V}_0(\dot{V} - \dot{V}_0) = 2K\dot{V}_0\dot{V} - K\dot{V}_0^2 \tag{566}$$

Powyższe równanie może być również zapisane jako

$$\begin{gathered} K\dot{V}^2 \approx a\dot{V} + b \\ a = 2K\dot{V}_0, \quad b = -K\dot{V}_0^2 \end{gathered} \tag{567}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie nieliniowe

$$\dot V_6 - \dot V_4 - \dot V_1 = 0 \tag{568a}$$

$$\dot V_1 - 0.009 + \dot V_2 - \dot V_3 = 0 \tag{568b}$$

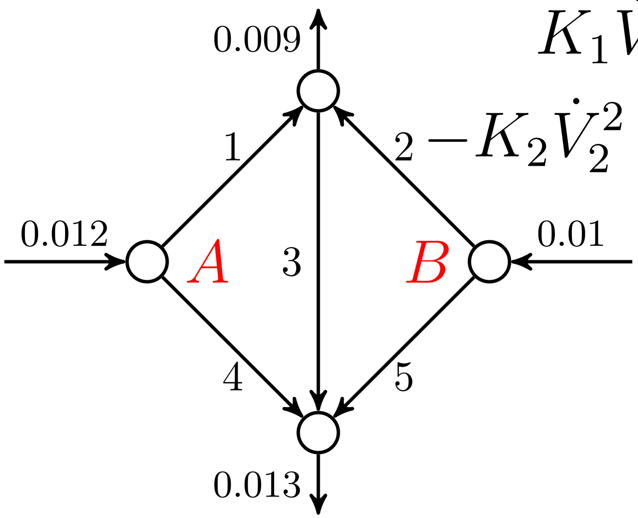
$$-\dot V_2 + \dot V_7 - \dot V_5 = 0 \tag{568c}$$

$$\dot V_4 + \dot V_3 + \dot V_5 - 0.013 = 0 \tag{568d}$$

$$\dot V_6 = 1.2\,\dot V_7 \tag{568e}$$

$$K_1\dot V_1^2 + K_3\dot V_3^2 - K_4\dot V_4^2 = 0 \tag{568f}$$

$$-K_2\dot V_2^2 + K_5\dot V_5^2 - K_3\dot V_3^2 = 0 \tag{568g}$$



Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura

Równania zachowania masy są liniowe, ale równania zachowania energii już nie

$$K_1\dot{V}_1^2 + K_3\dot{V}_3^2 - K_4\dot{V}_4^2 = 0 \tag{569a}$$

$$-K_2\dot{V}_2^2 + K_5\dot{V}_5^2 - K_3\dot{V}_3^2 = 0 \tag{569b}$$

Po linearyzacji otrzymujemy

$$a_1\dot{V}_1 + a_3\dot{V}_3 - a_4\dot{V}_4 = -b_1 - b_3 + b_4 \tag{570a}$$

$$-a_2\dot{V}_2 + a_5\dot{V}_5 - a_3\dot{V}_3 = b_2 - b_5 + b_3 \tag{570b}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Forma macierzowa

Zlinearyzowane równania w zapisie macierzowym

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.2 \\ a_1 & 0 & a_3 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & 0 & a_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \\ \dot{V}_5 \\ \dot{V}_6 \\ \dot{V}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.009 \\ 0 \\ 0.013 \\ 0 \\ -b_1 - b_3 + b_4 \\ b_2 + b_3 - b_5 \end{pmatrix}$$

lub symbolicznie

$$\mathbf{A}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{b}(\mathbf{K}) \tag{571}$$

Pierwsza iteracja wymaga założenia prędkości w każdej rurze. Rozwiązanie powyższego układu staje się założeniem początkowym do kolejnej iteracji, itd. dopóki różnica między kolejnymi rozwiązaniami jest mniejsza niż założona tolerancja.

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$
\begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.00693055 \\ 0.00609011 \\ 0.00402066 \\ 0.00506945 \\ 0.00390989 \\ 0.012 \\ 0.01 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.00569655 \\ 0.00542533 \\ 0.00212188 \\ 0.00630345 \\ 0.00457467 \\ 0.012 \\ 0.01 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.00538961 \\ 0.00516801 \\ 0.00155762 \\ 0.00661039 \\ 0.00483199 \\ 0.012 \\ 0.01 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.00533444 \\ 0.00511612 \\ 0.00145056 \\ 0.00666556 \\ 0.00488388 \\ 0.012 \\ 0.01 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0.00532695 \\ 0.00510875 \\ 0.0014357 \\ 0.00667305 \\ 0.00489125 \\ 0.012 \\ 0.01 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.00532601 \\ 0.00510779 \\ 0.0014338 \\ 0.00667399 \\ 0.00489221 \\ 0.012 \\ 0.01 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.00532589 \\ 0.00510767 \\ 0.00143356 \\ 0.00667411 \\ 0.00489233 \\ 0.012 \\ 0.01 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0.00532588 \\ 0.00510765 \\ 0.00143353 \\ 0.00667412 \\ 0.00489235 \\ 0.012 \\ 0.01 \end{pmatrix}
$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Metoda Newtona

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{572a}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta\mathbf{x} \tag{572b}$$

$$\mathbf{0} \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta\mathbf{x} \tag{573}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_n) \cdot \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \tag{574a}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x} \tag{574b}$$

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| = \|\Delta\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon \tag{575}$$

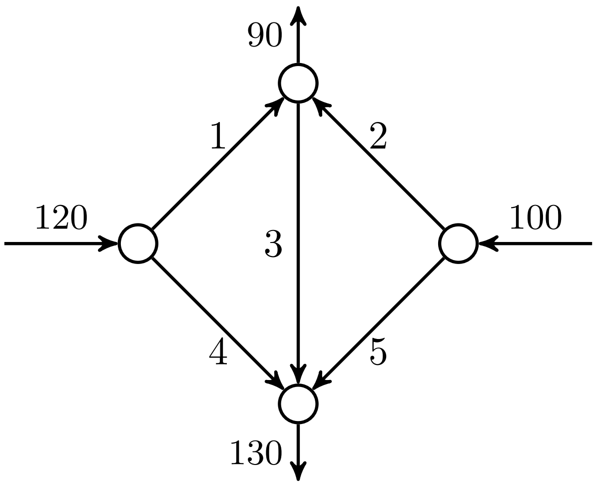
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

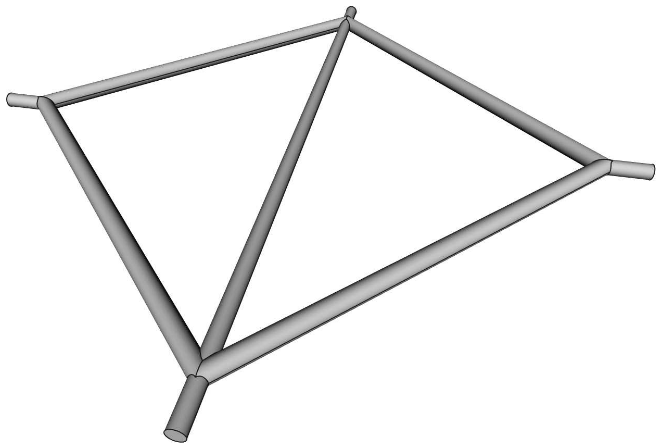
$$
\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dot V_6 - \dot V_4 - \dot V_1 \\ \dot V_1 - 0.009 + \dot V_2 - \dot V_3 \\ -\dot V_2 + \dot V_7 - \dot V_5 \\ \dot V_4 + \dot V_3 + \dot V_5 - 0.013 \\ \dot V_6 - 1.2\,\dot V_7 \\ K_1\dot V_1^2 + K_3\dot V_3^2 - K_4\dot V_4^2 \\ -K_2\dot V_2^2 + K_5\dot V_5^2 - K_3\dot V_3^2 \end{pmatrix} \tag{576}
$$

$$
\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.2 \\ 2K_1\dot V_1 & 0 & 2K_3\dot V_3 & -2K_4\dot V_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2K_2\dot V_2 & -2K_3\dot V_3 & 0 & 2K_5\dot V_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Porówanie metod

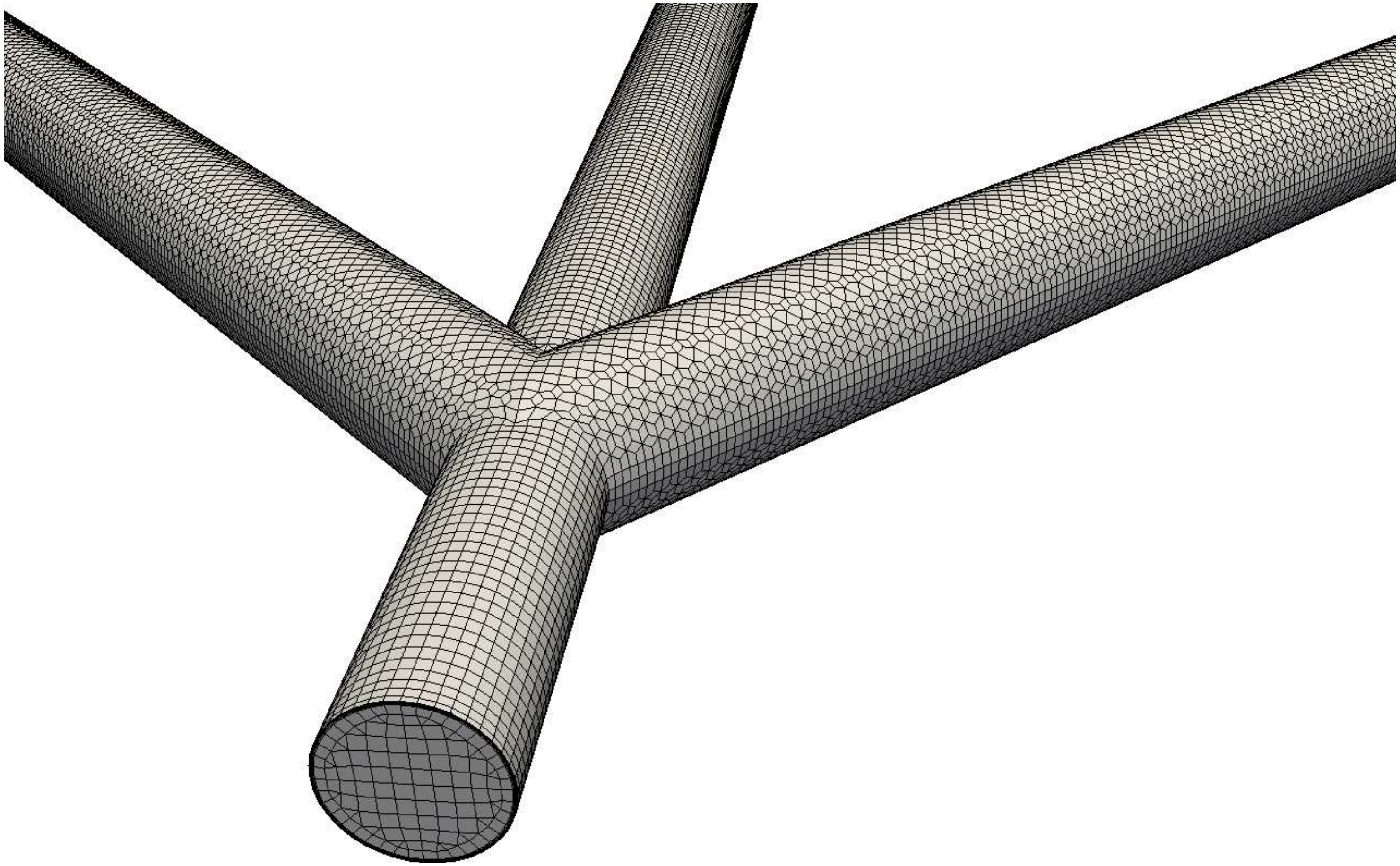




Nr	$D[m]$	$L[m]$	$\dot{m}_{CFD}[\frac{kg}{s}]$	$\dot{m}_{Cross}[\frac{kg}{s}]$
1	0.4	10	55.3	56.9
2	0.4	10	43.1	46.5
3	0.35	14.14	9.2	13.4
4	0.4	10	63.4	63.1
5	0.4	10	55.9	53.5

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Porówanie metod



Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

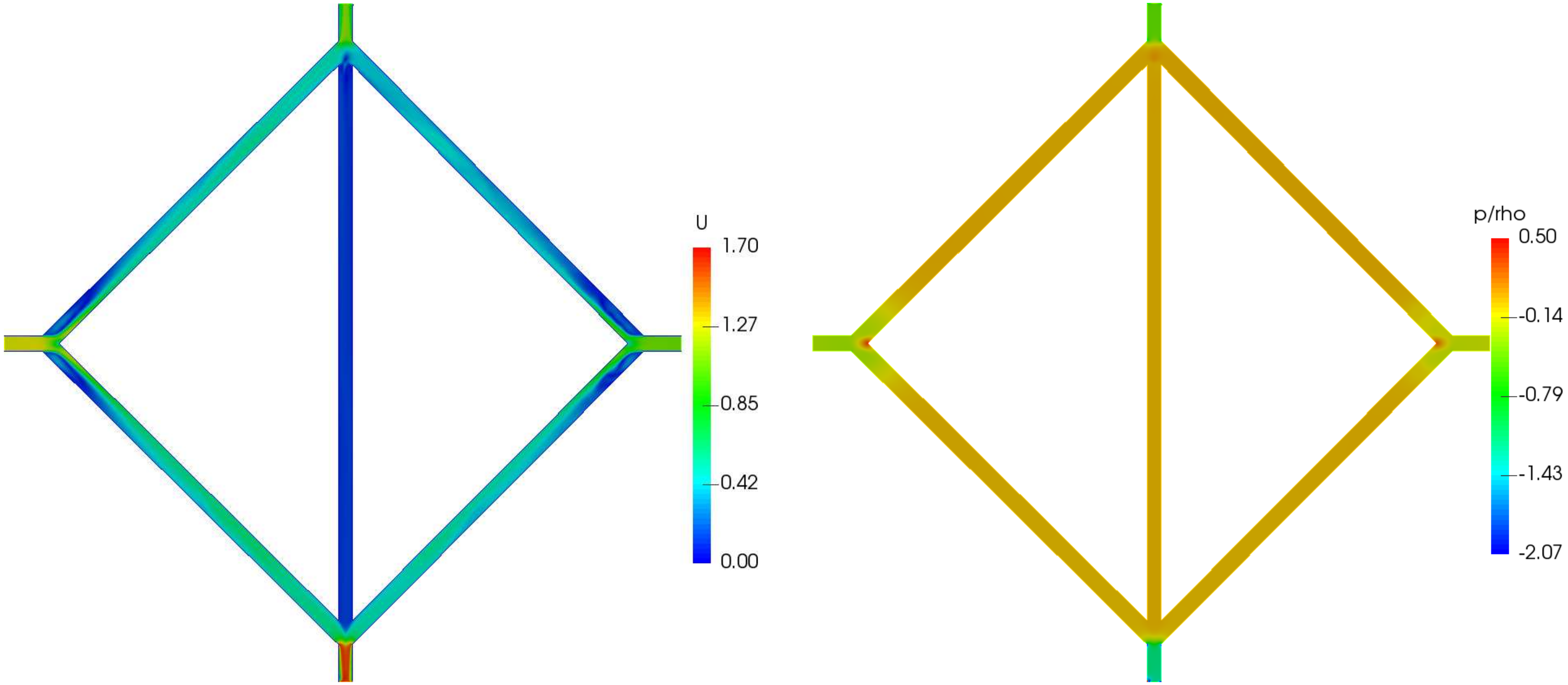
Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

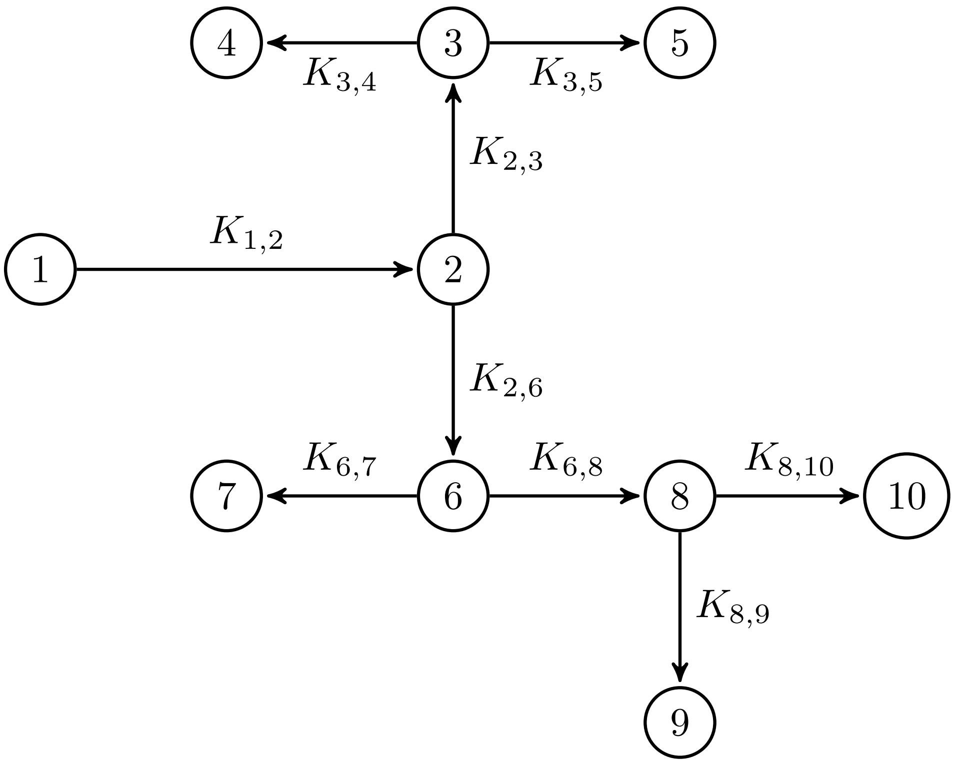
Literatura

Porówanie metod



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Sieci otwarte – pytania



- Jakie są poszczególne natężenia przepływu?
- Jakie są poszczególne spadki ciśnień?
- Zawsze wiemy, jakie są kierunki przepływu!

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równania

- Spadek ciśnienia

$$\Delta h_{i,j} = h_i - h_j = K_{i,j}\,\dot{V}_{i,j}^2 \qquad (577)$$

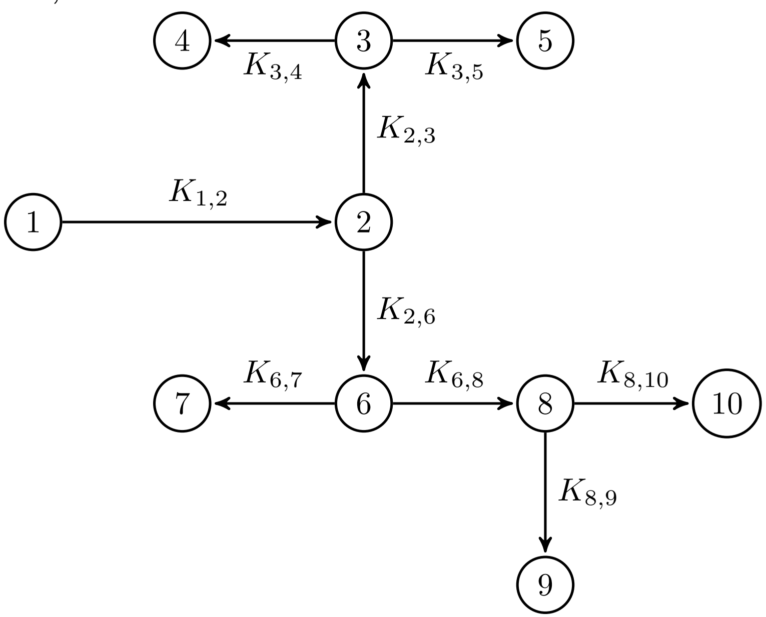
- Równanie zachowania masy

$$\sum_i \dot{V}_{i\,\mathsf{in}} = \sum_j \dot{V}_{j\,\mathsf{out}} \qquad (578)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Układ równań nieliniowych

$H_2, H_3, H_6, H_8 \quad =?$
$\dot{V}_{1,2}, \dot{V}_{2,3}, \dot{V}_{3,4}, \dot{V}_{3,5}, \dot{V}_{2,6}, \dot{V}_{6,7}, \dot{V}_{6,8}, \dot{V}_{8,9}, \dot{V}_{8,10} \quad =?$

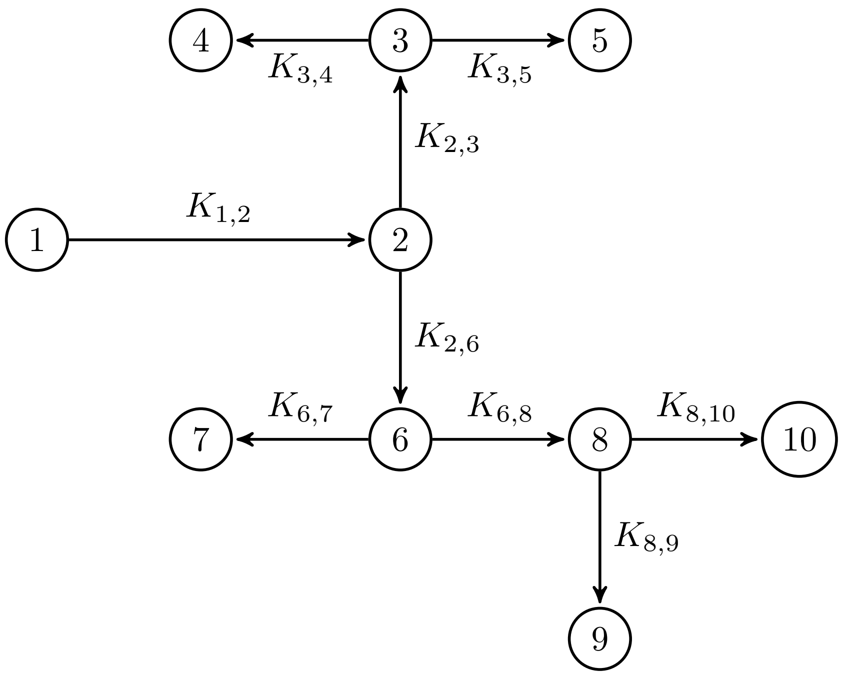


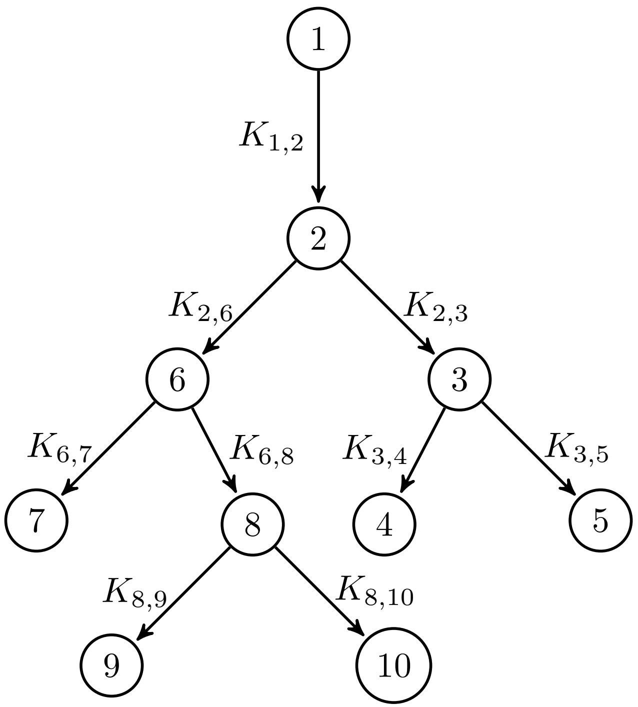
$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 = H_{10} = 0$
H_1 znane

$$\dot{V}_{1,2} = \dot{V}_{2,6} + \dot{V}_{2,3} \tag{579a}$$
$$\dot{V}_{2,6} = \dot{V}_{6,7} + \dot{V}_{6,8} \tag{579b}$$
$$\dot{V}_{6,8} = \dot{V}_{8,9} + \dot{V}_{8,10} \tag{579c}$$
$$\dot{V}_{2,3} = \dot{V}_{3,4} + \dot{V}_{3,5} \tag{579d}$$
$$H_1 - H_2 = K_{1,2}\dot{V}_{1,2}^2 \tag{579e}$$
$$H_2 - H_3 = K_{2,3}\dot{V}_{2,3}^2 \tag{579f}$$
$$H_2 - H_6 = K_{2,6}\dot{V}_{2,6}^2 \tag{579g}$$
$$H_3 = K_{3,4}\dot{V}_{3,4}^2 \tag{579h}$$
$$H_3 = K_{3,5}\dot{V}_{3,5}^2 \tag{579i}$$
$$H_6 = K_{6,7}\dot{V}_{6,7}^2 \tag{579j}$$
$$H_6 - H_8 = K_{6,8}\dot{V}_{6,8}^2 \tag{579k}$$
$$H_8 = K_{8,9}\dot{V}_{8,9}^2 \tag{579l}$$
$$H_8 = K_{8,10}\dot{V}_{8,10}^2 \tag{579m}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

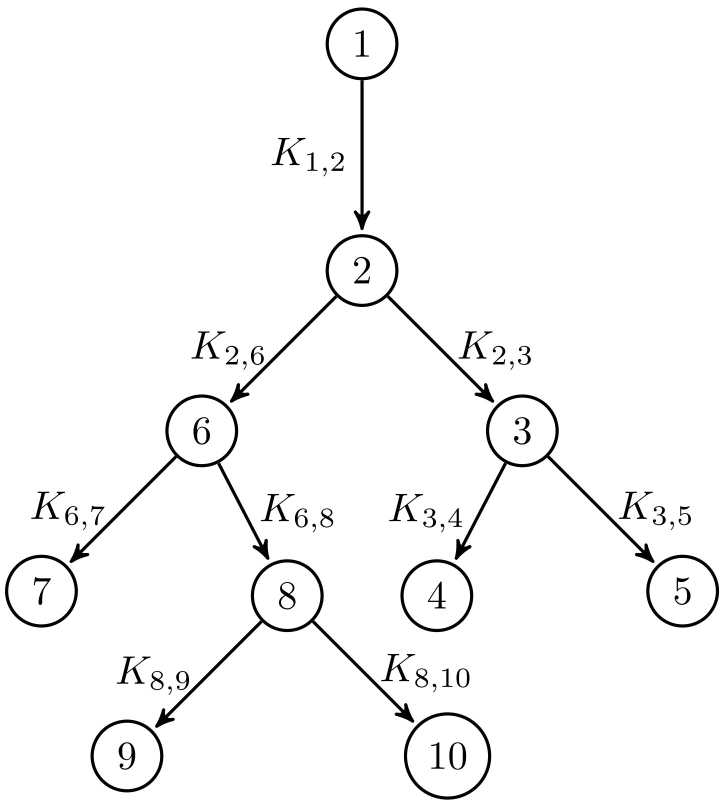
Metoda ogólna – wzajemna konfiguracja





Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

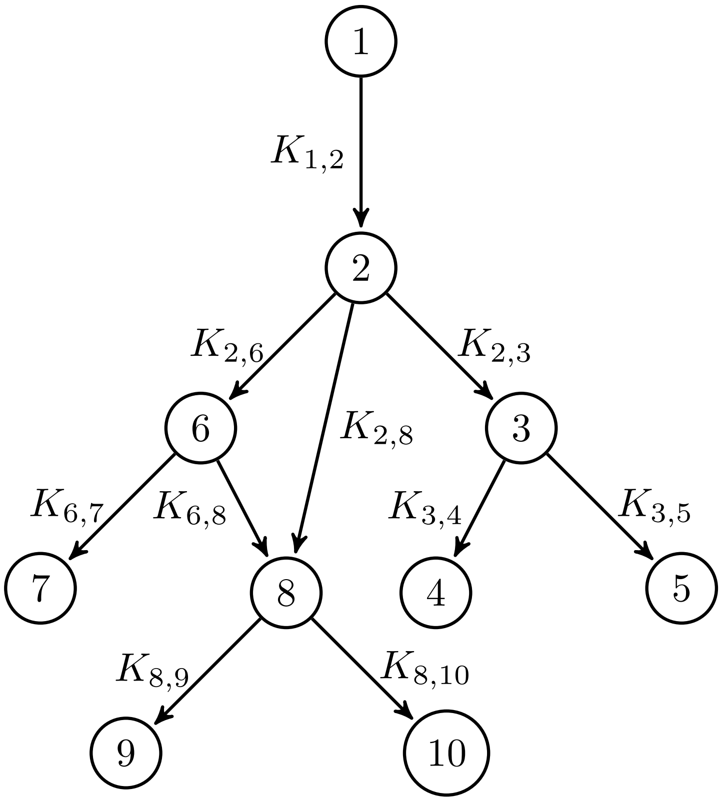
Grafy



N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Out
1		1									1
2			1			1					2
3				1	1						2
4											**0**
5											**0**
6							1	1			2
7											**0**
8									1	1	2
9											**0**
10											**0**
In	**0**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Grafy



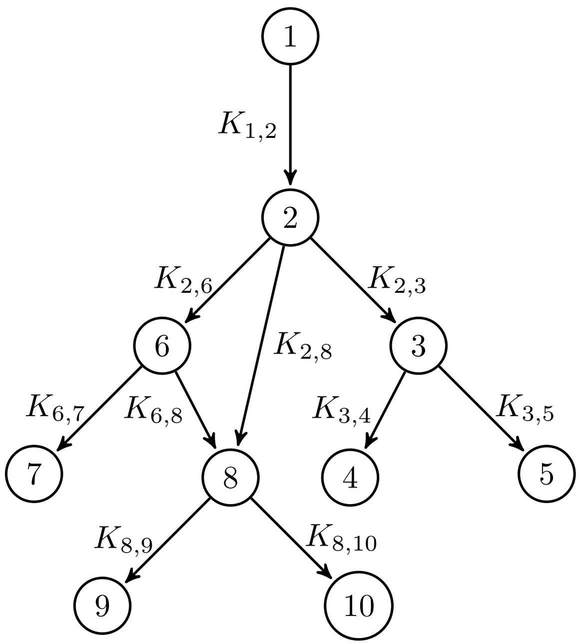
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Out
1		1									1
2			1			1		1			3
3				1	1						2
4											**0**
5											**0**
6							1	1			2
7											**0**
8									1	1	2
9											**0**
10											**0**
In	**0**	1	1	1	1	1	1	2	1	1	

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równania nieliniowe

$H_2, H_3, H_6, H_8 \quad = ?$

$\dot V_{1,2}, \dot V_{2,3}, \dot V_{3,4}, \dot V_{3,5},$
$\dot V_{2,6}, \dot V_{6,7}, \dot V_{6,8}, \dot V_{8,9},$
$\dot V_{8,10}, \boxed{\dot V_{2,8}} \quad = ?$



$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 = H_{10} = 0$

H_1 znane

$$\dot V_{1,2} = \dot V_{2,6} + \dot V_{2,3} \boxed{+\dot V_{2,8}} \tag{580a}$$

$$\dot V_{2,6} = \dot V_{6,7} + \dot V_{6,8} \tag{580b}$$

$$\dot V_{6,8} \boxed{+\dot V_{2,8}} = \dot V_{8,9} + \dot V_{8,10} \tag{580c}$$

$$\dot V_{2,3} = \dot V_{3,4} + \dot V_{3,5} \tag{580d}$$

$$H_1 - H_2 = K_{1,2}\dot V_{1,2}^2 \tag{580e}$$

$$H_2 - H_3 = K_{2,3}\dot V_{2,3}^2 \tag{580f}$$

$$H_2 - H_6 = K_{2,6}\dot V_{2,6}^2 \tag{580g}$$

$$H_3 = K_{3,4}\dot V_{3,4}^2 \tag{580h}$$

$$H_3 = K_{3,5}\dot V_{3,5}^2 \tag{580i}$$

$$H_6 = K_{6,7}\dot V_{6,7}^2 \tag{580j}$$

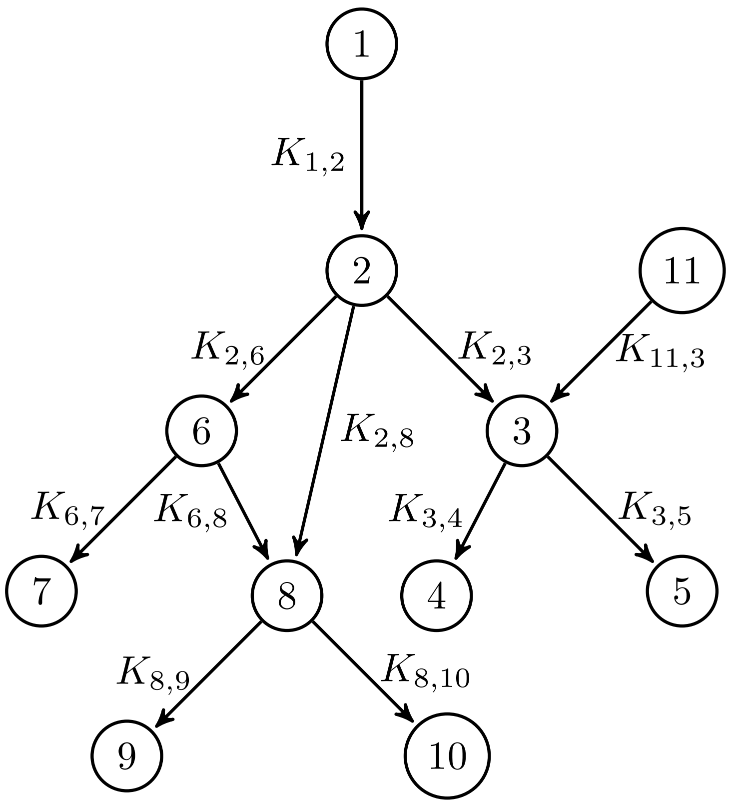
$$H_6 - H_8 = K_{6,8}\dot V_{6,8}^2 \tag{580k}$$

$$H_8 = K_{8,9}\dot V_{8,9}^2 \tag{580l}$$

$$H_8 = K_{8,10}\dot V_{8,10}^2 \tag{580m}$$

$$\boxed{H_2 - H_8 = K_{2,8}\dot V_{2,8}^2} \tag{580n}$$

Grafy



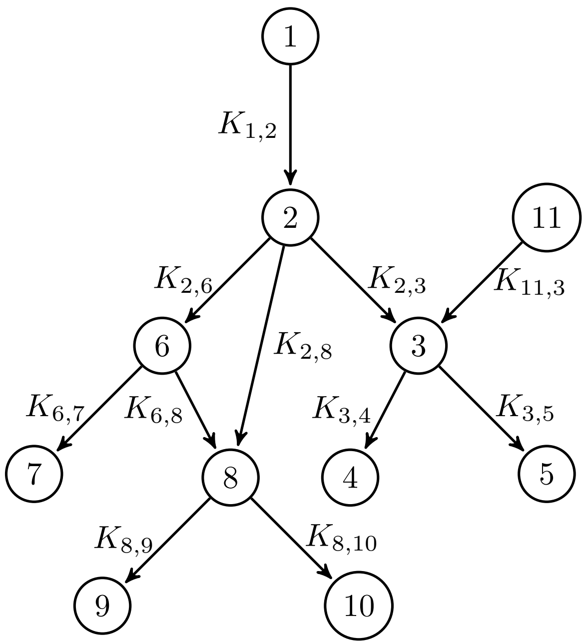
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Out
1		1										1
2			1			1		1				3
3				1	1							2
4												0
5												0
6							1	1				2
7												0
8									1	1		2
9												0
10												0
11			1									1
In	0	1	2	1	1	1	1	2	1	1	0	

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równania nieliniowe

$$H_2, H_3, H_6, H_8 \quad =?$$

$$\dot V_{1,2}, \dot V_{2,3}, \dot V_{3,4}, \dot V_{3,5}, \dot V_{2,6}, \dot V_{6,7}, \dot V_{6,8}, \dot V_{8,9}, \dot V_{8,10}, \dot V_{2,8}, \boxed{\dot V_{11,3}} \quad =?$$



$H_4 = H_5 = H_7 = H_9 = H_{10} = 0$

H_1, H_{11} znane

$$\dot V_{1,2} = \dot V_{2,6} + \dot V_{2,3} + \dot V_{2,8} \tag{581a}$$

$$\dot V_{2,6} = \dot V_{6,7} + \dot V_{6,8} \tag{581b}$$

$$\dot V_{6,8} + \dot V_{2,8} = \dot V_{8,9} + \dot V_{8,10} \tag{581c}$$

$$\dot V_{2,3} \boxed{+\dot V_{11,3}} = \dot V_{3,4} + \dot V_{3,5} \tag{581d}$$

$$H_1 - H_2 = K_{1,2} \dot V_{1,2}^2 \tag{581e}$$

$$H_2 - H_3 = K_{2,3} \dot V_{2,3}^2 \tag{581f}$$

$$H_2 - H_6 = K_{2,6} \dot V_{2,6}^2 \tag{581g}$$

$$H_3 = K_{3,4} \dot V_{3,4}^2 \tag{581h}$$

$$H_3 = K_{3,5} \dot V_{3,5}^2 \tag{581i}$$

$$H_6 = K_{6,7} \dot V_{6,7}^2 \tag{581j}$$

$$H_6 - H_8 = K_{6,8} \dot V_{6,8}^2 \tag{581k}$$

$$H_8 = K_{8,9} \dot V_{8,9}^2 \tag{581l}$$

$$H_8 = K_{8,10} \dot V_{8,10}^2 \tag{581m}$$

$$H_2 - H_8 = K_{2,8} \dot V_{2,8}^2 \tag{581n}$$

$$\boxed{H_{11} - H_3 = K_{11,3} \dot V_{11,3}^2} \tag{581o}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Pojedyncze linie

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Równanie Bernoulliego

$$\left(\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\right)-\left(\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2\right)= \\ =\sum_i \Delta h_{l,i}+\sum_j \Delta h_{n,j} \quad (582)$$

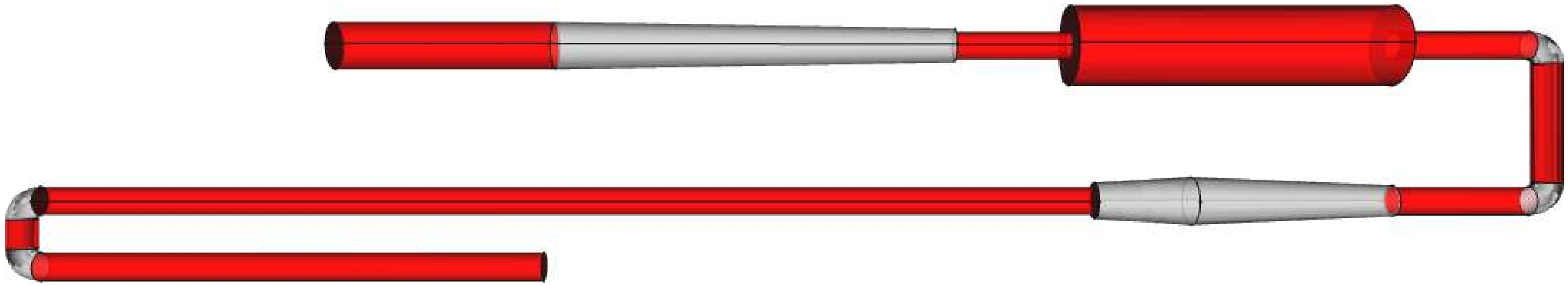
- straty liniowe

$$\Delta h_l=\lambda\frac{l}{D}\frac{u^2}{2g}=\lambda\frac{8\,l\,\dot{V}^2}{\pi^2 D^5 g} \quad (583)$$

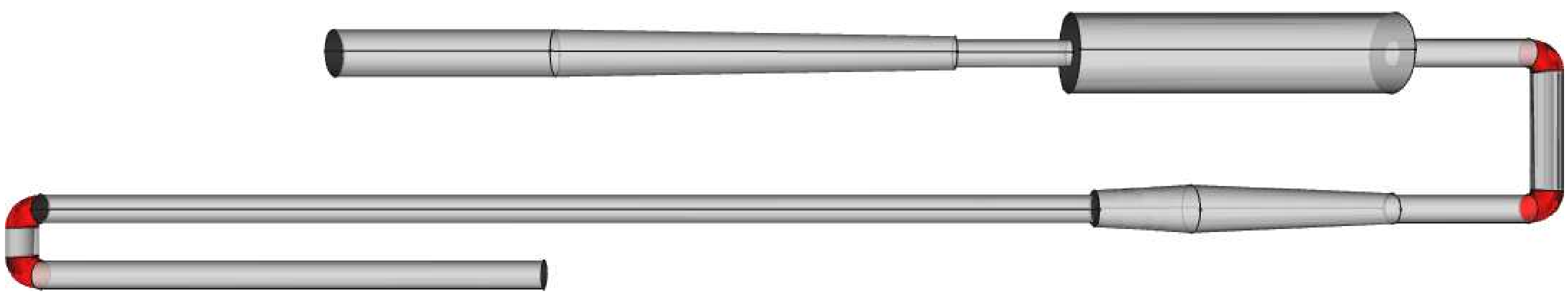
- straty lokalne

$$\Delta h_n=\zeta\frac{u^2}{2g}=\zeta\frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 D^4 g} \quad (584)$$

Straty liniowe



$$9 \times \Delta h_{l,i} = \lambda_i \frac{8\, l_i\, \dot{V}^2}{\pi^2 D_i^5 g} \tag{585}$$



$$4 \times \Delta h_{n,i} = \zeta_i \frac{8 \dot{V}^2}{\pi^2 D_i^4 g} \tag{586}$$

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

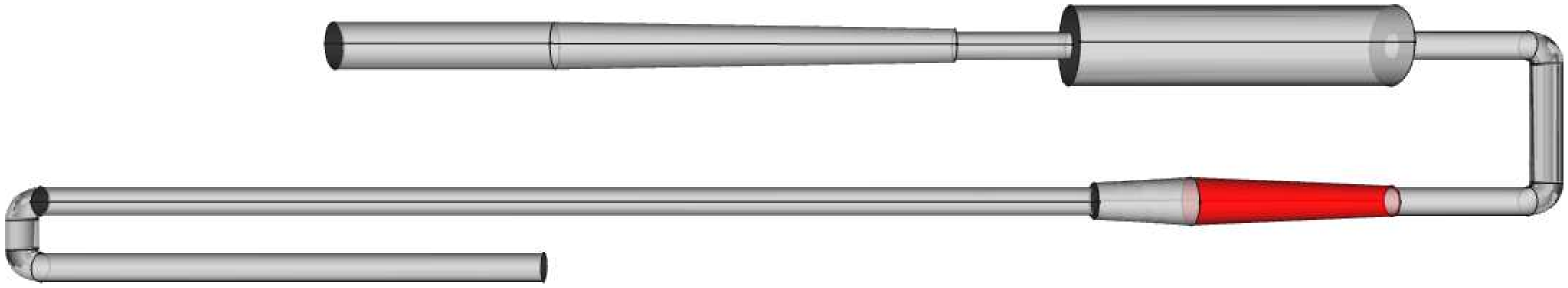
Gazodynamika

Rurociągi

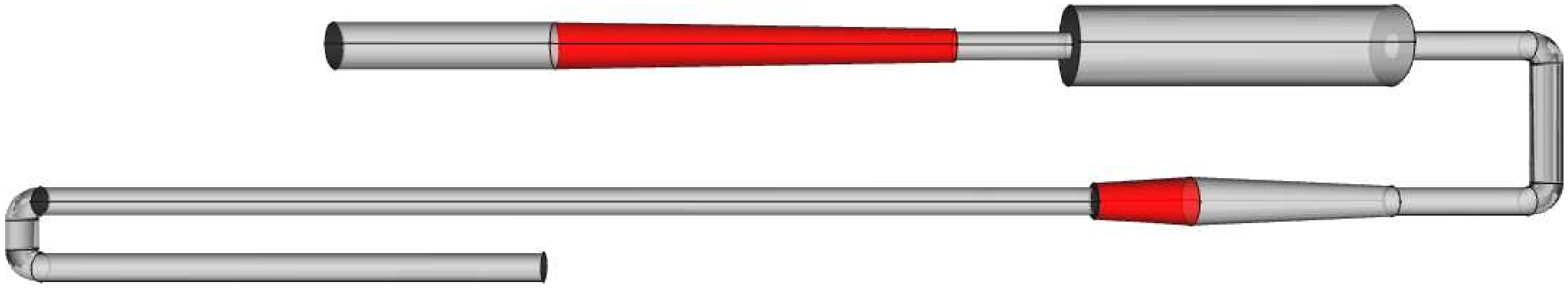
Analiza wymiarowa

Literatura

Dyfuzory i konfuzory



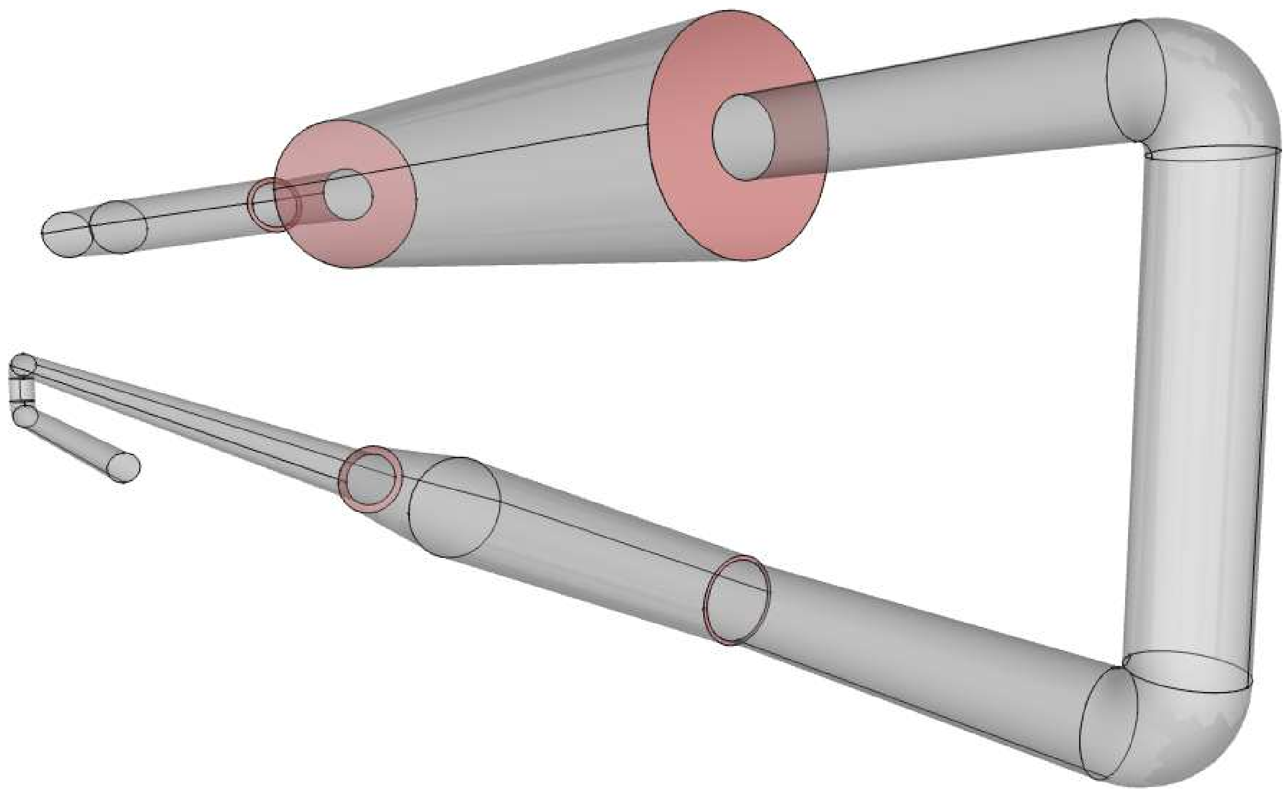
$$\Delta h_n = \zeta \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 D^4 g} \qquad (587)$$



$$2 \times \Delta h_{n,i} = \zeta_i \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 D_i^4 g} \qquad (588)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Przewężenia



$$5 \times \Delta h_{n,i} = \zeta_i \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 D_i^4 g} \tag{589}$$

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura

Jeżeli $z_1 = z_2$ i $p_1 = p_0 + \rho g H_1$ i $p_2 = p_0$ to

$$\left(\frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 D_1^4 g} + H_1\right) - \left(\frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 D_2^4 g}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{9} \lambda_i \frac{8 l_i \dot{V}^2}{\pi^2 D_i^5 g} + \sum_{j=1}^{12} \zeta_j \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 D_j^4 g} \quad (590)$$

Możliwe są dwa zadania:

- Znamy H_1 i szukamy $\dot{V} =?$
- Znamy $\dot{V}$ i szukamy $H_1 =?$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Rozwiązanie

poprzednie równanie ma teraz postać

$$\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4} + \frac{H_1 \pi^2 g}{8\dot{V}^2} = \sum_{i=1}^{9} \frac{\lambda_i l_i}{D_i^5} + \sum_{j=1}^{12} \frac{\zeta_j}{D_j^4} \tag{591}$$

Skąd możemy wyznaczyć

$$H_1 = \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 g} \left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4} + \sum_{i=1}^{9} \frac{\lambda_i l_i}{D_i^5} + \sum_{j=1}^{12} \frac{\zeta_j}{D_j^4} \right) \tag{592}$$

lub

$$\dot{V}^2 = \frac{8^{-1} H_1 \pi^2 g}{D_2^{-4} - D_1^{-4} + \sum_{i=1}^{9} \lambda_i l_i D_i^{-5} + \sum_{j=1}^{12} \zeta_j D_j^{-4}} \tag{593}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Rozwiązanie

Jeżeli ponadto $D_1 = D_2$, to

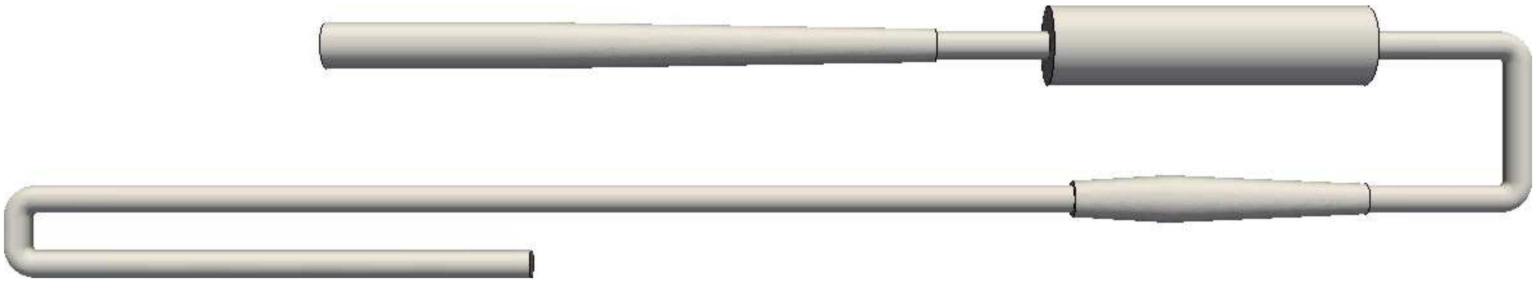
$$H_1 = \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 g}\left(\sum_{i=1}^{9}\frac{\lambda_i l_i}{D_i^5} + \sum_{j=1}^{12}\frac{\zeta_j}{D_j^4}\right) \tag{594}$$

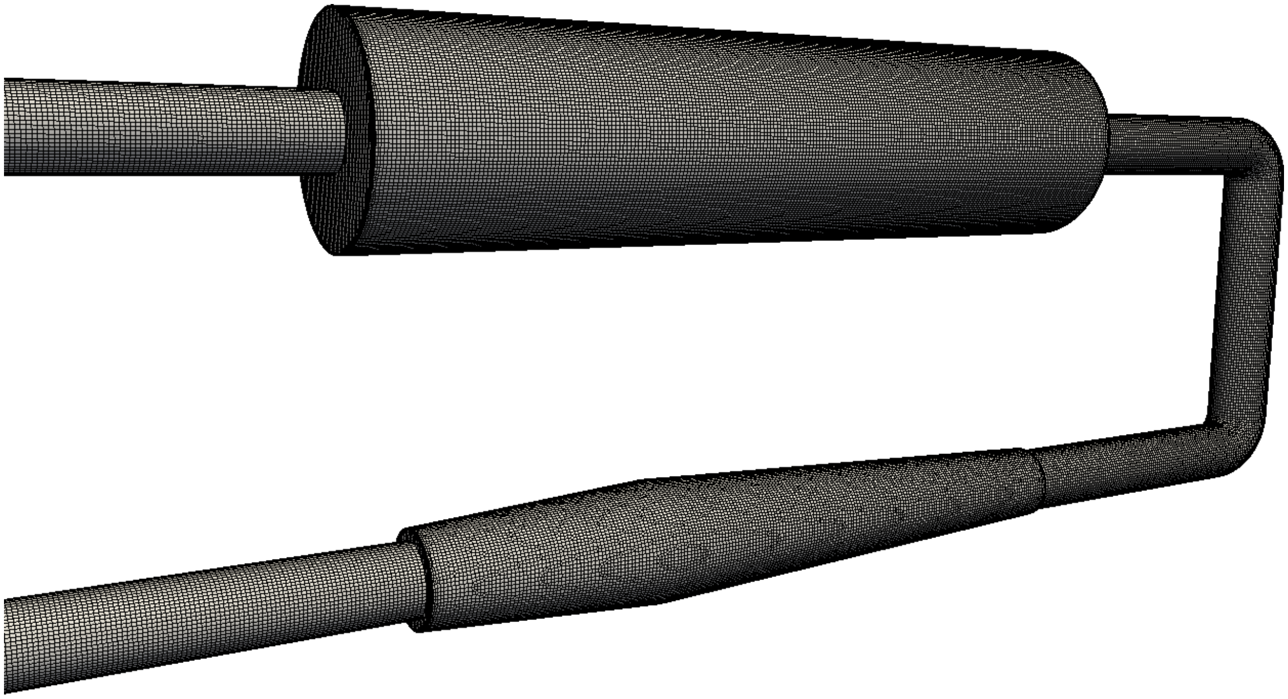
lub

$$\dot{V}^2 = \frac{8^{-1} H_1 \pi^2 g}{\sum\limits_{i=1}^{9}\lambda_i l_i D_i^{-5} + \sum\limits_{j=1}^{12}\zeta_j D_j^{-4}} \tag{595}$$

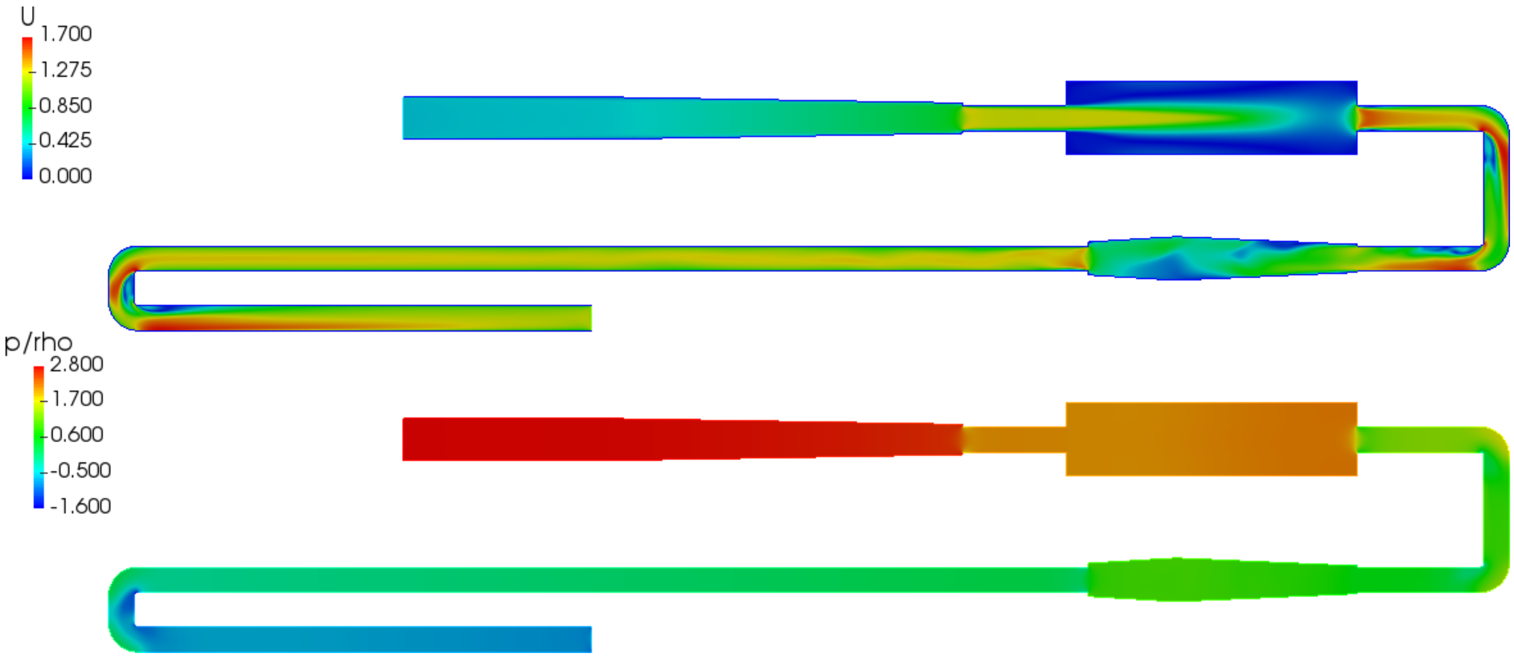
Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

CFD





Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura



Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Analiza wymiarowa

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Tabela 1: Wybrane jednostki podstawowe

Wielkość	Jednostka
kilogram	kg
metr	m
sekunda	s
kelwin	K

Tabela 2: Wybrane jednostki pochodne o nazwach własnych

Wielkość	Symbol	Jednostka
siła	N	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
energia	J	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$
moc	W	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$
ciśnienie	Pa	$\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$
częstotliwość	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Tabela 3: Wybrane jednostki pochodne bez nazw własnych

Wielkość	Jednostka
powierzchnia	m^2
objętość	m^3
gęstość	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
prędkość	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
przyspieszenie	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
lepkość dynamiczna	$\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$

Ogólnie

$$\mathrm{kg}^{a_1}\mathrm{m}^{a_2}\mathrm{s}^{a_3}\mathrm{K}^{a_4} \tag{596}$$

Analiza wymiarowa

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) = 0 \qquad (597)$$

n zmiennych wymiarowych a_i, w tym k zmiennych podstawowych. To samo w innym układzie jednostek

$$F(a'_1, a'_2, \ldots, a'_k, a'_{k+1}, a'_{k+2}, \ldots, a'_n) = 0 \qquad (598)$$

Zależności między jednostkami podstawowymi

$$\begin{aligned} a'_1 &= \alpha_1 a_1 \\ a'_2 &= \alpha_2 a_2 \\ &\vdots \\ a'_k &= \alpha_k a_k \end{aligned}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Zależności między jednostkami podstawowymi

$$
\begin{aligned}
a_1' &= \alpha_1 a_1\\
a_2' &= \alpha_2 a_2\\
&\vdots\\
a_k' &= \alpha_k a_k
\end{aligned}
$$

Zależności między jednostkami pochodnymi

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}' &= \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\dots\alpha_k^{p_k} a_{k+1}\\
a_{k+2}' &= \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\dots\alpha_k^{q_k} a_{k+2}\\
&\vdots\\
a_n' &= \alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\dots\alpha_k^{r_k} a_n
\end{aligned}
$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Z równania

$$F(a'_1, a'_2, \ldots, a'_k, a'_{k+1}, a'_{k+2}, \ldots, a'_n) = 0 \qquad (602)$$

i zależności między jednostkami mamy

$$F(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \ldots, \alpha_k a_k,$$
$$\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \ldots, \alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\ldots\alpha_k^{r_k} a_n) = 0 \quad (603)$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{1}{a_1}$, $\alpha_2 = \frac{1}{a_2}$, …, $\alpha_k = \frac{1}{a_k}$. Zatem

$$F\Bigg(1, 1, \ldots, 1,$$
$$\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2}\ldots a_k^{p_k}}, \frac{a_{k+2}}{a_1^{q_1} a_2^{q_2}\ldots a_k^{q_k}}, \ldots, \frac{a_n}{a_1^{r_1} a_2^{r_2}\ldots a_k^{r_k}}\Bigg) = 0$$
$$(604)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Zatem równanie wymiarowe

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) = 0 \qquad (605)$$

o n zmiennych wymiarowych a_i, w tym k zmiennych podstawowych, można sprowadzić do postaci

$$F\Bigg(\underbrace{\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}}}_{\Pi_{k+1}}, \underbrace{\frac{a_{k+2}}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_k^{q_k}}}_{\Pi_{k+2}}, \ldots, \underbrace{\frac{a_n}{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}}}_{\Pi_n}\Bigg) = 0 \qquad (606)$$

o $n-k$ zmiennych bezwymiarowych (twierdzenie Buckinghama)

$$F(\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \ldots, \Pi_n) = 0 \qquad (607)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$\Delta p = f(L, D, k, \rho, \mu, \bar{u}) \tag{608a}$$

$$F(\Delta p, L, D, k, \rho, \mu, \bar{u}) = 0 \tag{608b}$$

$$[\Delta p] = \mathrm{Pa} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}} \tag{609a}$$

$$[L] = [D] = [k] = \mathrm{m} \tag{609b}$$

$$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}} \tag{609c}$$

$$[\mu] = \mathrm{Pa\,s} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}} \tag{609d}$$

$$[\bar{u}] = \mathrm{m\,s^{-1}} \tag{609e}$$

$$n = 7,\ k = 3 \tag{610}$$

$$D, \rho, \bar{u} \tag{611}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$[\Delta p] = [D]^{a_1}[\rho]^{a_2}[\bar{u}]^{a_3} \tag{612}$$

$$\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-2}} = \mathrm{m}^{a_1}(\mathrm{kg\,m^{-3}})^{a_2}(\mathrm{m\,s^{-1}})^{a_3} \tag{613}$$

$$1 = a_2 \tag{614a}$$

$$-1 = a_1 - 3a_2 + a_3 \tag{614b}$$

$$-2 = -a_3 \tag{614c}$$

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2$

$$[\Delta p] = [D]^0[\rho]^1[\bar{u}]^2 \tag{615}$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} \tag{616}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Analiza wymiarowa

$$[L] = [D]^{a_1} [\rho]^{a_2} [\bar{u}]^{a_3} \tag{617}$$

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}^{a_1} (\mathrm{kg\,m^{-3}})^{a_2} (\mathrm{m\,s^{-1}})^{a_3} \tag{618}$$

$$0 = a_2 \tag{619a}$$

$$1 = a_1 - 3a_2 + a_3 \tag{619b}$$

$$0 = -a_3 \tag{619c}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$$

$$[L] = [D]^1 [\rho]^0 [\bar{u}]^0 \tag{620}$$

$$\Pi_2 = \frac{L}{D}, \quad \Pi_3 = \frac{k}{D} \tag{621}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$[\mu] = [D]^{a_1}[\rho]^{a_2}[\bar{u}]^{a_3} \tag{622}$$

$$\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}} = \mathrm{m}^{a_1}(\mathrm{kg\,m^{-3}})^{a_2}(\mathrm{m\,s^{-1}})^{a_3} \tag{623}$$

$$1 = a_2 \tag{624a}$$

$$-1 = a_1 - 3a_2 + a_3 \tag{624b}$$

$$-1 = -a_3 \tag{624c}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1$

$$[\mu] = [D]^1[\rho]^1[\bar{u}]^1 \tag{625}$$

$$\Pi_4 = \frac{\mu}{D\rho\,\bar{u}}; \quad \Pi_4 = \frac{1}{\mathrm{Re}} \tag{626}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Z twierdzenia Buckinghama wynika, że

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0 \tag{627}$$

Zatem

$$F\left(\frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2}, \frac{L}{D}, \frac{k}{D}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) = 0 \tag{628}$$

lub w postaci jawnej (o ile istnieje)

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{k}{D}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \tag{629}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{k}{D}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \tag{630}$$

Dla przepływu laminarnego

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \tag{631}$$

Równanie Darcy'ego-Weisbacha

$$\Delta p = \frac{64}{\mathrm{Re}} \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \tag{632}$$

Dla przepływu turbulentnego $\lambda = f(1/\mathrm{Re}, k/D)$, np. $\lambda = 0.3164\,\mathrm{Re}^{-0.25}$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Podsumowanie

- Prawa fizyczne nie mogę zależeć od wyboru układu jednostek
- Każda funkcja n zmiennych wymiarowych może być sprowadzona do postaci funkcji $n-k$ zmiennych bezwymiarowych (twierdzenie Buckinghama)
- Twierdzenie Buckinghama nie podaje sposobu wyznaczania postaci tej funkcji!

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Wielkości bezwymiarowe oznaczane są górnym indeksem $+$.
Bezwymiarowe współrzędne

$$x^+ = \frac{x}{l_0}, \quad y^+ = \frac{y}{l_0}, \quad z^+ = \frac{x}{l_0} \tag{633}$$

Bezwymiarowe składowe prędkości

$$u_x^+ = \frac{u_x}{u_0}, \quad u_y^+ = \frac{u_y}{u_0}, \quad u_z^+ = \frac{u_z}{u_0} \tag{634}$$

Bezwymiarowego wektor prędkości

$$\mathbf{u} = u_0 \begin{pmatrix} u_x^+ & u_y^+ & u_z^+ \end{pmatrix} = u_0 \mathbf{u}^+ \tag{635}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Bezwymiarowe ciśnienia, gęstość, współczynnik lepkości, czas, gęstość rozkładu sił objętościowych

$$t^+ = \frac{t}{t_0}, \quad p^+ = \frac{p}{p_0}, \quad \rho^+ = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{636}$$

$$\mu^+ = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \mathbf{f}^+ = \frac{\mathbf{f}}{f_0} \tag{637}$$

Bezwymiarowe operatory

$$\nabla = \frac{1}{l_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^+} \quad \frac{\partial}{\partial y^+} \quad \frac{\partial}{\partial z^+}\right) = \frac{1}{l_0}\nabla^+ \tag{638}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial(l_0 x^+)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(l_0 y^+)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(l_0 z^+)^2} = \frac{1}{l_0^2}\nabla^{2+} \tag{639}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Bezwymiarowe równanie zachowania masy (po uporządkowaniu)

$$\frac{l_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + \nabla^+ \cdot \left(\rho^+ \mathbf{u}^+ \right) = 0 \tag{640}$$

dla liczby Strouhala

$$\mathrm{Sh} = \frac{l_0}{u_0 t_0} = \frac{t_{ch}}{t_0} \tag{641}$$

mamy

$$\mathrm{Sh} \frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + \nabla^+ \cdot \left(\rho^+ \mathbf{u}^+ \right) = 0 \tag{642}$$

Dla przypadku nieściśliwego

$$\nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ = 0 \tag{643}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Analiza wymiarowa

Równanie Naviera-Stokesa

$$\rho^+\left(\frac{l_0}{u_0 t_0}\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+}+\mathbf{u}^+\cdot\nabla^+\mathbf{u}^+\right)=\frac{f_0 l_0}{u_0^2}\rho^+\mathbf{f}^+-\frac{p_0}{\rho_0 u_0^2}\nabla^+ p^+ \\ +\frac{\mu_0}{l_0 u_0 \rho_0}\mu^+\left(\nabla^{2+}\mathbf{u}^+ + \tfrac{1}{3}\nabla^+\left(\nabla^+\cdot\mathbf{u}^+\right)\right) \tag{644}$$

Dla liczby Froude'a

$$\mathrm{Fr}=\frac{u_0^2}{f_0 l_0}=\frac{\rho_0 u_0^2/l_0}{\rho_0 f_0} \tag{645}$$

Reynoldsa

$$\mathrm{Re}=\frac{l_0 u_0 \rho_0}{\mu_0}=\frac{l_0 u_0}{\nu_0}=\frac{\rho_0 u_0^2/l_0}{\mu_0 u_0/l_0^2} \tag{646}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Eulera

$$\mathrm{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} = \frac{p_0/l_0}{\rho_0 u_0^2/l_0} \tag{647}$$

równanie Naviera-Stokesa przyjmie postać

$$\rho^+ \left(\mathrm{Sh} \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \mathbf{u}^+ \right) = \frac{\rho^+ \mathbf{f}^+}{\mathrm{Fr}} - \mathrm{Eu} \nabla^+ p^+ + \frac{\mu^+}{\mathrm{Re}} \left(\nabla^{2+} \mathbf{u}^+ + \tfrac{1}{3} \nabla^+ \left(\nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ \right) \right) \tag{648}$$

lub przy założeniu nieściśliwości

$$\mathrm{Sh} \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \mathbf{u}^+ = \frac{\mathbf{f}^+}{\mathrm{Fr}} - \frac{\mathrm{Eu}}{\rho^+} \nabla^+ p^+ + \frac{\nu^+}{\mathrm{Re}} \nabla^{2+} \mathbf{u}^+ \tag{649}$$

Równanie energii wewnętrznej

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right) \quad (650)$$

Funkcja dyssypacji $\phi_\mu = \mu_0 u_0^2 l_0^{-2} \phi_\mu^+$ pozwala zapisać

$$\rho^+ c_v^+ \left(\frac{l_0}{t_0 u_0} \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ T^+ \right) =$$
$$\frac{u_0^2}{c_{v0} T_0} \frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 l_0} \phi_\mu^+ + \frac{\lambda_0}{c_{v0} \mu_0} \frac{\mu_0}{l_0 u_0 \rho_0} \lambda^+ \nabla^{2+} T^+ +$$
$$\frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \frac{u_0^2}{T_0 c_{v0}} \frac{p^+}{\rho^+} \left(\frac{l_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \rho^+ \right) \quad (651)$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Liczba Eckerta

$$\mathrm{Ec} = \frac{u_0^2}{c_{v0}\, T_0} \tag{652}$$

liczbę Prandtla

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_{v0}\, \mu_0}{\lambda_0} \tag{653}$$

pozwalają zapisać równanie energii wewnętrznej

$$\rho^+ c_v^+ \left(\mathrm{Sh} \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ T^+ \right) = \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}} \phi_\mu^+ + \frac{\lambda^+}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}} \nabla^{2+} T^+ + \mathrm{Eu}\,\mathrm{Ec} \frac{p^+}{\rho^+} \left(\mathrm{Sh} \frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \rho^+ \right) \tag{654}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Układ równań dla przypadku nieściśliwego (bez $+$)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{655}$$

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{\mathbf{f}}{\mathrm{Fr}} - \frac{\mathrm{Eu}}{\rho}\nabla p + \frac{\nu}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \mathbf{u} \tag{656}$$

$$\rho c_v \left(\mathrm{Sh}\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T\right) = \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\phi_\mu + \frac{\lambda}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\nabla^2 T \tag{657}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Analiza wymiarowa

$$\mathrm{Sh} = \frac{l_0}{u_0 t_0} = \frac{t_{ch}}{t_0} \tag{658}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{u_0^2}{f_0 l_0} = \frac{\rho_0 u_0^2 / l_0}{\rho_0 f_0} \tag{659}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{l_0 u_0 \rho_0}{\mu_0} = \frac{l_0 u_0}{\nu_0} = \frac{\rho_0 u_0^2 / l_0}{\mu_0 u_0 / l_0^2} \tag{660}$$

$$\mathrm{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} = \frac{p_0 / l_0}{\rho_0 u_0^2 / l_0} \tag{661}$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{u_0^2}{c_{v0}\, T_0} \tag{662}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_{v0}\, \mu_0}{\lambda_0} \tag{663}$$

Spis zagadnień
Operatory różniczkowe
Wstęp
Kinematyka
Dynamika
Energia i entropia
Domknięte układy równań
Statyka
Płyny nielepkie
Gazodynamika
Rurociągi
Analiza wymiarowa
Literatura

Literatura

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura

Literatura

[1] Tesch K., *Mechanika Płynów*, Wyd. PG, Gdańsk, 2008

[2] Tesch K., *Wybrane zagadnienia modelowania przepływów krwi...*, Wyd. PG, Gdańsk, 2012

[3] Tesch K., *Podstawy podstaw mechaniki płynów*, online, Gdańsk, 2020 **LINK**

Spis zagadnień

Operatory różniczkowe

Wstęp

Kinematyka

Dynamika

Energia i entropia

Domknięte układy równań

Statyka

Płyny nielepkie

Gazodynamika

Rurociągi

Analiza wymiarowa

Literatura