

Krzysztof Tesch

PODSTAWY PODSTAW
MECHANIKI PŁYNÓW

WYKŁAD Z ĆWICZENIAMI
WYDANIE ELEKTRONICZNE
Z ILUSTRACJAMI

GDAŃSK
6 MAJA 2022

Krzysztof Tesch
Politechnika Gdańska
Wydział Mechaniczny
Katedra Energetyki i Aparatury Przemysłowej
Zespół Mechaniki Płynów i Maszyn Przepływowych
ul. G. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk

Podstawy Podstaw Mechaniki Płynów

Aktualna wersja znajduje się pod adresem
http://www.pg.gda.pl/~krzyte/students/fluids_pl.pdf

Copyright © by K. Tesch
krzyte@pg.edu.pl
Gdańsk 2020

All rights reserved. This book or any portion thereof
may not be reproduced or used in any manner whatsoever
without the express written permission of the publisher
except for the use of brief quotations.



Typeset in L^AT_EX by the author

Spis treści

Przedmowa	v
Wykaz ważniejszych oznaczeń	vi
I Wykład	1
1. Teoria pola	2
1.1. Operatory różniczkowe	2
1.2. Ślad tensora	3
1.3. Aksjator i dewiator tensora	3
1.4. Iloczyn podwójnie skalarny tensorów	4
1.5. Twierdzenie Stokesa	4
1.6. Twierdzenie Gaussa	5
2. Kinematyka	6
2.1. Pochodna substancjalna	6
2.2. Linie prądu i linie wirowe	6
2.3. Podstawowe tensory	7
2.4. Opis ruchu elementu płynu	8
2.5. I twierdzenie Helmholtza o wirowości	9
3. Równania zachowania	10
3.1. Równanie zachowania masy	10
3.2. Równanie zachowania pędu	11
3.2.1. Tensor naprężenia	11
3.2.2. Różniczkowa postać równania zachowania pędu	11
3.2.3. Całkowa postać równania zachowania pędu	11
3.3. Równanie zachowania momentu pędu	12
3.4. Równanie zachowania energii	12
3.5. Bilans równań i niewiadomych	13
4. Równania konstytutywne	14
4.1. Hipoteza Newtona	14
4.2. Płyny nienewtonowskie	15
4.3. Prawo Fouriera	16
4.4. Równania stanu	16

5. Zasady termodynamiki dla ośrodków ciągłych	18
5.1. Druga zasada termodynamiki	18
5.2. Pierwsza zasada termodynamiki	19
6. Domknięte układy równań	20
6.1. Równania Naviera-Stokesa	20
6.2. Płyn nieściśliwy dla stałej lepkości	21
6.3. Płyn nieściśliwy dla zmiennej lepkości	21
6.4. Płyn nienewtonowski	22
6.5. Płyn ściśliwy dla stałej lepkości	22
6.6. Płyn ściśliwy dla zmiennej lepkości	23
7. Przepływy płynów nielepkich	24
7.1. Domknięte układy równań	24
7.1.1. Równanie Eulera	24
7.1.2. Płyn idealny nieściśliwy	24
7.1.3. Płyn idealny ściśliwy	25
7.2. Równanie Bernoulliego	25
7.3. Przepływy potencjalne	26
7.3.1. Potencjał prędkości	26
7.3.2. Całka Lagrange'a	26
7.3.3. Dwuwymiarowe przepływy potencjalne	26
7.3.4. Potencjał zespolony	27
8. Hydrostatyka	29
8.1. Równanie równowagi	29
8.2. Prawo Pascala	29
8.3. Napór i moment naporu hydrostatycznego	30
8.4. Wypór i prawo Archimedesesa	30
8.5. Warunek pływania	31
9. Analiza wymiarowa	32
9.1. Twierdzenie Buckingham'a	32
II Ćwiczenia	33
10. Ćwiczenie 1. Teoria pola	34
10.1. Operatory pojedyncze	34
10.2. Operatory podwójne	34
10.3. Pochodna substancjalna	36
11. Ćwiczenie 2. Kinematyka	37
11.1. Zadanie 1	37

12.Ćwiczenie 3. Kinematyka	41
12.1. Zadanie 1	41
12.2. Zadanie 2	47
13.Ćwiczenie 4. Kinematyka	48
13.1. Zadanie 1	48
14.Ćwiczenie 5. Kinematyka	53
14.1. Zadanie 1	53
14.2. Zadanie 2	54
14.3. Zadanie 3	56
14.4. Zadanie 4	59
14.5. Zadanie 5	59
14.6. Zadanie 6	59
15.Ćwiczenie 6. Reakcje	60
15.1. Zadanie 1	60
15.2. Zadanie 2	64
15.3. Zadanie 3	64
16.Ćwiczenie 7. Równanie Naviera-Stokesa	65
16.1. Zadanie 1	65
16.2. Zadanie 2	68
16.3. Zadanie 3	69
17.Ćwiczenie 8. Równanie Naviera-Stokesa	70
17.1. Zadanie 1	70
17.2. Zadanie 2	72
17.3. Zadanie 3	75
18.Ćwiczenie 9. Równanie Naviera-Stokesa	76
18.1. Zadanie 1	76
18.2. Zadanie 2	78
18.3. Zadanie 3	80
19.Ćwiczenie 10. Hydrostatyka	83
19.1. Zadanie 1	83
19.2. Zadanie 2	86
19.3. Zadanie 3	88
20.Ćwiczenie 11. Hydrostatyka	89
20.1. Zadanie 1	89
20.2. Zadanie 2	91
20.3. Zadanie 3	91

21.Ćwiczenie 12. Analiza wymiarowa	94
21.1. Zadanie 1	94
21.2. Zadanie 2	97
21.3. Zadanie 3	98
21.4. Zadanie 4	98
22.Ćwiczenie 13. Potencjał zespolony	99
22.1. Zadanie 1. Przepływ jednorodny	99
22.2. Zadanie 2. Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{2}$	101
22.3. Zadanie 3. Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{3}$	103
22.4. Zadanie 4. Przepływ zawracający	106
22.5. Zadanie 5. Źródła i upusty	108
22.6. Zadanie 6. Dipol	112
22.7. Zadanie 7. Wir	114
22.8. Zadanie 8. Źródło wirowe	117
22.9. Zadanie 9. Opływ koła	119
22.10Zadanie 10. Cyrkulacyjny opływ koła	122
Bibliografia	125

Przedmowa

W pierwszej części niniejszego opracowaniu przedstawione są podstawy podstaw Mechaniki Płynów. Oznacza to, że brak jest tu jakichkolwiek wyprowadzeń i wyjaśnienia ograniczone są do minimum. Wyprowadzenia i wyjaśnienia zawarte są w książce [2] lub podawane są na tradycyjnym wykładzie. Informacje zawarte w tym opracowaniu ułatwiają zdanie egzaminu z Mechaniki Płynów, gdyż zawierają minimalny materiał, który jest niezbędny.

W drugiej części tego opracowania przedstawione są zadania, które realizowane są na ćwiczeniach z Mechaniki Płynów. Również w tym przypadku wyjaśnienia ograniczone są do minimum, gdyż te przedstawiane są podczas zajęć w tradycyjnej formie.

Odnosnie notacji, która obowiązuje w tym opracowaniu, można zauważyć, że wektory i tensory pisane są pogrubioną czcionką. Dla przykładu wektor prędkości oznaczany jest jako \mathbf{u} , podczas gdy ten sam wektor pisany na tablicy, miałby inny zapis \vec{u} . Tensory w zapisie odręcznym mogą być podkreślane z dołu. Jeżeli tensor prędkości deformacji ma zapis \mathbf{D} , to na tablicy wyglądałby w następujący sposób \underline{D} . Zmienne typu ciśnienie p , temperatura T czy czas t pisane są czcionką pochyłą. Wyjątkiem są tu duże litery greckie typu Γ , Π i zmienne wektorowe lub tensorowe. Być może, że jest to mylące, ale wynika to z tradycji.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

A	tensor spinu
c	ciepło, stała
D	tensor prędkości deformacji
e	energia wewnętrzna
f	gęstość sił masowych
g	wektor grawitacji
M	moment naporu
\hat{n}	wersor normalny
N	napór, wypór
p	ciśnienie
P	funkcja ciśnienia
q	wektor (gęstość) strumienia ciepła
r	wektor wodzący
R	indywidualna stała gazowa
s	entropia
S	powierzchnia
t	czas
T	temperatura
u	wektor (pole) prędkości
V	objętość

Litery greckie

δ	delta Kroneckera
γ	prędkość ścinania
Γ	cyrkulacja
λ	współczynnik przewodnictwa
$\boldsymbol{\lambda}$	tensor przewodnictwa
ϕ	funkcja dyssypacji
φ	potencjał
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
Π	potencjał, wielkość bezwymiarowa
ρ	gęstość
$\boldsymbol{\sigma}_n$	wektor naprężenia
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor naprężenia
τ	naprężenie styczne, granica płynięcia
$\boldsymbol{\tau}$	lepkościowa część $\boldsymbol{\sigma}$
$\boldsymbol{\omega}$	prędkość kątowna
$\boldsymbol{\Omega}$	wektor wirowości

Część I
Wykład

Rozdział 1

Teoria pola

1.1. Operatory różniczkowe

Operator wektory nabra ∇ wyraża się wzorem

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.1)$$

Posługując się tym symbolem, wprowadza się pojęcia gradientu funkcji f skalarnej w postaci

$$\nabla f = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Zatem gradient skalara jest wektorem (polem wektorowym). Jeżeli wektor \mathbf{u} ma następujące składowe

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} + u_z \hat{\mathbf{k}}, \quad (1.3)$$

to dywergencja (źródłowość) definiowana jest jako iloczyn skalarny operatora nabra (1.1) i wektora \mathbf{u} (1.3) w postaci

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.4)$$

Dywergencja wektora jest skalarą (polem skalarnym). Rotacja wektora \mathbf{u} definiowana jest jako iloczyn wektorowy operatora nabra (1.1) i wektora \mathbf{u} (1.3) w następujący sposób

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (1.5)$$

Rotacja wektora jest wektorem. Można również wykorzystywać dwukrotne operatory różniczkowe. Ważnym operatorem podwójnym jest laplasjan (operator Laplace'a¹) ∇^2 , który definiowany jest jako dywergencja gradientu w postaci

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.6)$$

¹Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) – matematyk, fizyk i astronom francuski

Laplasjan wektora \mathbf{u} liczony jest jako laplasjan jego składowych w następujący sposób

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} \nabla^2 u_x + \hat{\mathbf{j}} \nabla^2 u_y + \hat{\mathbf{k}} \nabla^2 u_z. \quad (1.7)$$

Laplasjan wektora jest wektorem. Innym operatorem podwójnym jest gradient gradientu funkcji skalarnej f , który nazywa się Hesjanem

$$\nabla \nabla f = \mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Gradient wektora (pola wektorowego), którym jest już gradient skalara ∇f , jest tensorem. Więcej szczegółów podane jest w ćwiczeniu w rozdziale 10.

1.2. Ślad tensora

Jeżeli dany jest tensor \mathbf{T} w następującej postaci

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

to ślad tensora \mathbf{T} oznaczany jest jako $\text{tr } \mathbf{T}$ i stanowi on sumę składowych na diagonalu, co zapisuje się jako

$$\text{tr } \mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \quad (1.10)$$

1.3. Aksjator i dewiator tensora

Każdy tensor \mathbf{T} można rozłożyć na sumę aksjatora (tensora kulistego) \mathbf{T}^A i dewiatora \mathbf{T}^D

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^A + \mathbf{T}^D. \quad (1.11)$$

Jako aksjator \mathbf{T}^A definiuje się tensor w postaci

$$\mathbf{T}^A = \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \text{tr } \mathbf{T}. \quad (1.12)$$

Zatem dewiator \mathbf{T}^D , na podstawie dekompozycji (1.11), przyjmuje postać

$$\mathbf{T}^D = \mathbf{T} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \text{tr } \mathbf{T}, \quad (1.13)$$

gdzie $\boldsymbol{\delta}$ jest deltą Kroneckera – tensorem jednostkowym

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

1.4. Iloczyn podwójnie skalarny tensorów

Iloczyn podwójnie skalarny “:” tensorów o identycznych rozmiarach definiuje się w następujący sposób

$$\mathbf{T} : \mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} T_{ij}. \quad (1.15)$$

Iloczyn ten daje w wyniku skalar i jest analogiczny do iloczynu skalarnego “.” wektorów. Za pomocą iloczynu podwójnie skalarnego można zapisać ślad tensora (1.10) w następujący sposób

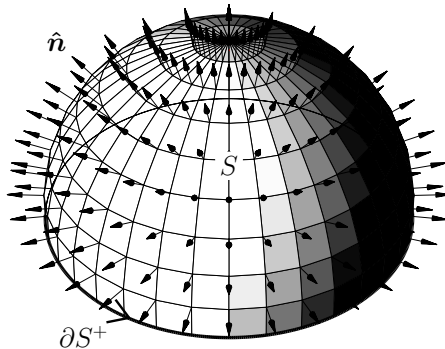
$$\text{tr } \mathbf{T} = \boldsymbol{\delta} : \mathbf{T}. \quad (1.16)$$

1.5. Twierdzenie Stokesa

Twierdzenie Stokesa² o zamianie całki krzywoliniowej na powierzchniową ma następującą postać

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) dS, \quad (1.17)$$

gdzie S jest powierzchnią, pokazaną na rysunku 1.1, a ∂S^+ jej dodatnio zorientowanym brzegiem. Brzeg ∂S jest krzywą zamkniętą. Wersor normalny do powierzchni S oznaczony jest jako $\hat{\mathbf{n}}$. Brzeg ∂S jest dodatnio zorientowany, jeżeli jest zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, gdy wersory normalny do powierzchni S jest skierowany do obserwatora.



Rys. 1.1: Ilustracja do twierdzenia Stokesa

Twierdzenie Stokesa pozwala zamienić całkę powierzchniową ze strumienia rotacji wektora \mathbf{u} na całkę krzywoliniową po brzegu powierzchni z samego wektora \mathbf{u} . Wzór Stokesa (1.17) ma swoją interpretację hydrodynamiczną, która zostanie omówiona w rozdziale 2.

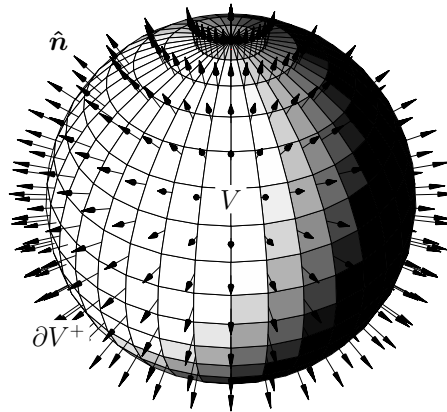
²Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) – matematyk i fizyk irlandzki

1.6. Twierdzenie Gaussa

Twierdzenie Gaussa³ o zamianie całki powierzchniowej na potrójną ma następującą postać

$$\oiint_{\partial V^+} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV, \quad (1.18)$$

gdzie V jest objętością, pokazaną na rysunku 1.2, a ∂V^+ jej dodatnio zorientowanym brzegiem. Brzeg ∂V jest powierzchnią zamkniętą. Wersor normalny do powierzchni V oznaczony jest jako $\hat{\mathbf{n}}$. Brzeg ∂V jest dodatnio zorientowany, jeżeli wersory normalne skierowane są na zewnątrz powierzchni ∂V .



Rys. 1.2: Ilustracja do twierdzenia Gaussa

Wzór Gaussa (1.18) ma również swoją interpretację hydrodynamiczną, która mówi, że strumień wektora prędkości \mathbf{u} przez zamkniętą powierzchnię ∂V , będącą brzegiem objętości V , równy jest całce potrójnej ze źródłowości (dywergencji) tego wektora wewnątrz objętości V . Wzór Gaussa (1.18) wykorzystywany jest powszechnie w Mechanice Płynów do wyprowadzania i przekształcania równań zachowania.

³Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855) – matematyk, fizyk i astronom niemiecki

Rozdział 2

Kinematyka

2.1. Pochodna substancjalna

Pochodna substancjalna funkcji f składa się z pochodnej lokalnej $\frac{\partial}{\partial t}$ oraz konwekcyjnej $\mathbf{u} \cdot \nabla$. Pochodna lokalna obrazuje lokalne zmiany w czasie przy ustalonym położeniu w przestrzeni, natomiast pochodna konwekcyjna – zmiany w przestrzeni w ustalonym czasie

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (2.1)$$

Poszczególne symbole to f – funkcja, $\frac{d}{dt}$ – pochodna substancjalna, $\frac{\partial}{\partial t}$ – pochodna cząstkowa, \mathbf{u} – wektor prędkości, ∇ – gradient, \cdot – iloczyn skalarny. Więcej szczegółów podane jest w ćwiczeniu rozdziale 10.

2.2. Linie prądu i linie wirowe

Liniami prądu nazywamy linie, do których styczne są wektory prędkości \mathbf{u} . Równania różniczkowe rzutów linii prądu na poszczególne płaszczyzny mają postać

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (2.2)$$

Jeżeli przez dowolną krzywą, która nie jest linią prądu, poprowadzimy linie prądu, to otrzymamy powierzchnię prądu. Przykłady wyznaczania linii prądu podane są w ćwiczeniu w rozdziale 12.

Jeżeli wektor prędkości zastąpimy wektorem wirowości

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

to analogicznie możemy mówić o równaniach różniczkowych rzutów linii wirowych w postaci

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}. \quad (2.4)$$

Analogicznie – jeżeli przez dowolną krzywą, która nie jest linią wirową, poprowadzimy linie wirowe, to otrzymamy powierzchnię wirową. Przykłady wyznaczania linii wirowych podane są w ćwiczeniu w rozdziale 13.

Wektorowe równanie trajektorii (torów) ma następującą postać

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.5)$$

W ogólnym przypadku linie prądu i trajektorie nie są tym samym. Jedne są tożsame z drugimi tylko dla przypadku stacjonarnego i niestacjonarnego jednowymiarowego. Przykłady wyznaczania torów podane są w ćwiczeniu w rozdziale 12.

2.3. Podstawowe tensory

Gradient prędkości definiowany jest jako

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Tensor nierównomierności pola prędkości definiowany jest jako

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Jak widać, tensor nierównomierności pola prędkości jest transpozycją gradientu prędkości lub na odwrót

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = (\nabla \mathbf{u})^T, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T = \nabla \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Tensor nierównomierności pola prędkości rozkłada się na sumę dwóch tensorów, z których jeden jest symetryczny, natomiast drugi antysymetryczny

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \right). \quad (2.9)$$

Tensor symetryczny \mathbf{D} nazywany jest tensorem prędkości deformacji

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \nabla \mathbf{u} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Interpretacją fizyczną składowych tensora prędkości deformacji, które znajdują się na diagonalu, są prędkości deformacji liniowych (objętościowych). Interpretacja fizyczna składowych tensora poza diagonalą to prędkości deformacji postaciowych (kątowych).

Tensor antysymetryczny \mathbf{A} nazywany jest tensorem spinu

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \mathbf{u} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Interpretacja fizyczna składowych tensora spinu to prędkości kątowe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

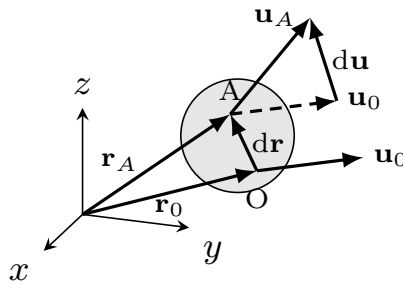
Przykłady wyznaczania składowych poszczególnych tensorów podane są w ćwiczeniu w rozdziale 13.

2.4. Opis ruchu elementu płynu

Prędkość \mathbf{u}_A dowolnego punktu A składa się z prędkości postępowej \mathbf{u}_0 bieguna O , prędkości obrotowej $\boldsymbol{\omega}_0 \times d\mathbf{r}$ wokół bieguna oraz prędkości deformacji $\mathbf{D}_0 \cdot d\mathbf{r}$, co zapisuje się

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times d\mathbf{r} + \mathbf{D}_0 \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.13)$$

Sytuacja przedstawiona jest na rysunku 2.1, gdzie \mathbf{r}_A jest wektorem wodzącym punktu A , \mathbf{r}_0 – wektor wodzący bieguna O , $d\mathbf{r}$ – różnica między \mathbf{r}_A i \mathbf{r}_0 , \mathbf{u}_A – wektor prędkości punktu A , \mathbf{u}_0 – wektor prędkości bieguna O , $d\mathbf{u}$ – różnica między \mathbf{u}_A i \mathbf{u}_0 , $\boldsymbol{\omega}_0$ – prędkość kątowa, definiowana jako $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}$, \mathbf{D} – tensor prędkości deformacji.



Rys. 2.1: Opis ruchu elementu płynu

Z rysunku 2.1 wynika, że $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + d\mathbf{u}$, natomiast $d\mathbf{u}$ zapisuje się za pomocą tensora nierównomierności pola prędkości (2.7) jako $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$, a sam tensor nierównomierności pola prędkości rozkładany jest na część niesymetryczną (tensor spinu \mathbf{A} (2.11)) i symetryczną (tensor prędkości deformacji \mathbf{D} (2.10)) według wzoru (2.9), co daje

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + d\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{A}_0 + \mathbf{D}_0) \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.14)$$

2.5. I twierdzenie Helmholtza o wirowości

Twierdzeniu Stokesa (1.17), a dokładniej jego interpretacja hydrodynamiczna, mówi, że cyrkulacja równa jest strumieniowi wirowości $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{\Omega}$, co zapisuje się jako

$$\Gamma = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{\Omega} dS. \quad (2.15)$$

Cyrkulacja definiowana jest jako całka krzywoliniowa po brzegu ∂S powierzchni S

$$\Gamma = \oint_{\partial S^+} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.16)$$

a strumień wirowości $\mathbf{\Omega}$ jako całka powierzchniowa

$$\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{\Omega} dS = \pm \iint_S \Omega_n dS, \quad (2.17)$$

gdzie Ω_n jest rzutem wektora $\mathbf{\Omega}$ na kierunek określony przez wektor $\hat{\mathbf{n}}$. Znak \pm zależy od wzajemnej orientacji wektora $\mathbf{\Omega}$ i wektora $\hat{\mathbf{n}}$. Jeżeli kąt pomiędzy wektorami jest mniejszy od kąta prostego, to mamy znak plus.

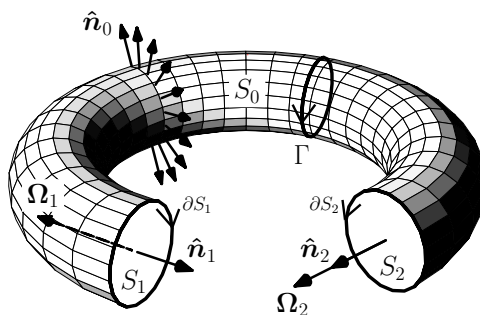
Rysunek 2.2 przedstawia fragment rurki wirowej. Z pierwszego twierdzenia Helmholtza¹ o wirowości wynika, że

$$\iint_{S_1} \Omega_{1n} dS = \iint_{S_2} \Omega_{2n} dS, \quad (2.18)$$

lub ze wzoru Stokesa (2.15)

$$\Gamma_1 = \Gamma_2, \quad (2.19)$$

czyli cyrkulacja wzdłuż rurki wirowej jest stała, a dokładniej stała jest cyrkulacja w każdym przekroju rurki wirowej. Ponieważ krzywa ∂S^+ jest brzegiem przekroju rurki wirowej S , to strumień wirowości przez dowolny przekrój (natężenie rurki wirowej) pozostaje stały.



Rys. 2.2: Fragment rurki wirowej

¹Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) – lekarz, fizyk i filozof niemiecki

Rozdział 3

Równania zachowania

3.1. Równanie zachowania masy

Różniczkowa postać równania zachowania masy wygląda następująco

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

gdzie $\frac{d}{dt}$ oznacza pochodną substancjalną, t – czas, ρ – gęstość, $\nabla \cdot$ – dywergencję, a \mathbf{u} jest wektorem prędkości. Inna różniczkowa postać równania zachowania masy wygląda następująco

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.2)$$

Jest to jedno równanie skalarne, które zawiera cztery niewiadome funkcje – gęstość ρ i trzy składowe wektora prędkości u_x , u_y , u_z . Jeżeli założymy stacjonarność, to równanie (3.1) lub (3.2) przechodzi w

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.3)$$

Nadal mamy cztery niewiadome. Jeżeli założymy nieściśliwość $\rho = \text{const}$, to równania (3.1), (3.2), (3.3) upraszczają się do

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.4)$$

Tym razem mamy trzy niewiadome u_x , u_y , u_z . Jeżeli oprócz nieściśliwości założymy potencjalność $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, gdzie φ jest potencjałem prędkości, to z równania (3.4) otrzymamy równanie Laplace'a w postaci

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.5)$$

Tym razem mamy tylko jedną niewiadomą – potencjał φ . Założenie potencjalności jest słuszne wtedy i tylko wtedy, gdy pole prędkości jest bezwirowe, czyli $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Więcej informacji znajduje się w rozdziale 11.

3.2. Równanie zachowania pędu

3.2.1. Tensor naprężenia

Zależność pomiędzy tensorem naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ a wektorem naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_n$ wyraża zależność Cauchy'ego¹

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.6)$$

gdzie $\hat{\mathbf{n}}$ jest wektorem normalnym do rozważanej powierzchni. Tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ zapisywany jest następująco

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Na diagonalu tensora (3.7) znajdują się naprężenia normalne, a poza diagonalą mamy do czynienia z naprężeniami stycznymi.

3.2.2. Różniczkowa postać równania zachowania pędu

Różniczkowa postać równania zachowania pędu, która odpowiada drugiej zasadzie dynamiki Newtona² dla ośrodków ciągłych, ma postać

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.8)$$

gdzie \mathbf{u} jest wektorem prędkości, ρ – gęstością, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czasem, \mathbf{f} – gęstością rozkładu sił objętościowych, $\nabla \cdot$ – dywergencją, $\boldsymbol{\sigma}$ – tensorem naprężenia. Równanie (3.8) jest równaniem wektorowym, które w ogólnym przypadku odpowiada trzem równaniami skalarnymi. Po prawej stronie równania (3.8) mamy siły masowe (na jednostkową objętość) $\rho \mathbf{f}$, gdzie gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się głównie, choć nie tylko, do grawitacji $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. Wyraz $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ związany jest z siłami powierzchniowymi. Lewa strona równania (3.8) opisuje szybkość zmian pędu. Równanie zachowania pędu (3.8) wprowadza dziewięć nowych niewiadomych, którymi są składowe tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ (3.7).

3.2.3. Całkowa postać równania zachowania pędu

Jedna z całkowych postaci równania zachowania pędu (3.8) wygląda następująco

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \iint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV + \iint_{\partial V^+} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS, \quad (3.9)$$

gdzie V oznacza rozważaną objętość kontrolną, a ∂V^+ brzeg tej objętości – powierzchnię zamkniętą, dodatnio zorientowaną (na zewnątrz). Równanie (3.9) przydatne jest do wyznaczania reakcji. Przykład zastosowania znajduje się w rozdziale 15.

¹Augustin Louis, baron Cauchy (1789-1857) – matematyk francuski

²Sir Isaac Newton (1642-1727) – fizyk, matematyk, astronom i filozof angielski

3.3. Równanie zachowania momentu pędu

Z równania zachowania momentu pędu wynika, że tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ (3.7) jest tensorem symetrycznym, co zapisuje się w ten sposób, że tensor $\boldsymbol{\sigma}$ równy jest swojej transpozycji $\boldsymbol{\sigma}^T$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Symetryczność tensora naprężenia (3.10) pozwala zmniejszyć liczbą niewiadomych o trzy.

Tensor naprężenia (3.9) dekomponuje się w następujący sposób

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}, \quad (3.11)$$

gdzie $-p\boldsymbol{\delta}$ jest odwracalną częścią tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, a $\boldsymbol{\tau}$ częścią nieodwracalną (lepkościową). Przez p oznacza się ciśnienie, a δ jest deltą Kroneckera (1.14).

3.4. Równanie zachowania energii

Różniczkowa postać równania zachowania energii wygląda następująco

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (3.12)$$

gdzie ρ oznacza gęstość, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas, u moduł (długość) wektora prędkości \mathbf{u} , e – energię wewnętrzną, \mathbf{f} – gęstość rozkładu sił masowych, $\nabla \cdot$ – dywergencją, $\boldsymbol{\sigma}$ – tensor naprężenia, \mathbf{q} – wektorowy strumień ciepła (gęstość strumienia ciepła). W równaniu (3.12) po lewej stronie mamy szybkość zmian energii kinetycznej ruchu makroskopowego i energii wewnętrznej. Po prawej stronie mamy moc sił masowych $\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$, moc sił powierzchniowych $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u})$ i strumień ciepła $\nabla \cdot \mathbf{q}$. Równanie zachowania energii (3.12) jest równanie skalarnym i wprowadza pięć nowych niewiadomych – temperaturę T , energię wewnętrzną e i wektorowy strumień ciepła \mathbf{q} , który ma trzy składowe.

Równanie energii całkowitej e_c jest inną wersją równania zachowania energii (3.12) i zapisywane jest jako

$$\rho \frac{de_c}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (3.13)$$

Przez energię całkowitą e_c rozumie się sumę energii kinetycznej $\frac{1}{2}u^2$, wewnętrznej e , potencjalnej Π i energii ciśnienia $\frac{p}{\rho}$

$$e_c = \frac{1}{2}u^2 + e + \Pi + \frac{p}{\rho}. \quad (3.14)$$

Interpretacja równania energii całkowitej (3.13) mówi, że na szybkość zmian energii całkowitej e_c wpływ ma niestacjonarność pola ciśnienia p , efekty związane z lepkościową częścią $\boldsymbol{\tau}$ tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ i strumień ciepła \mathbf{q} .

3.5. Bilans równań i niewiadomych

Zestawienie wszystkich równań zachowania, tj. równania zachowania masy (3.1), pędu (3.8), energii (3.12), wygląda następująco

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) &= \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tensor naprężenia w powyższym układzie jest symetryczny, co oznacza, że wykorzystany został również wniosek z równania zachowania momentu pędu w postaci (3.10). Układ trzech równań (3.15) odpowiada układowi pięciu równań skalarnych. Nie można tego układu rozwiązać, gdyż ma on czternaście niewiadomych – gęstość ρ , trzy składowe wektora \mathbf{u} , sześć składowych tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, energię wewnętrzną e i trzy składowe wektorowego strumienia ciepła \mathbf{q} . Zakładamy, że gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} .

Można również zestawić inne postaci równania zachowania pędu (3.8) przy wykorzystaniu dekompozycji (3.11) oraz równania energii całkowitej (3.13). W takim przypadku układ równań wyglądałby następująco

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 + e + \Pi + \frac{p}{\rho} \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Również teraz lepkościowa część $\boldsymbol{\tau}$ tensora naprężenia jest symetryczna, co oznacza, że wykorzystany został również wniosek z równania zachowania momentu pędu w postaci (3.10). Układ (3.16) odpowiada układowi pięciu równań skalarnych. I tym razem nie można tego układu rozwiązać, gdyż ma on piętnaście niewiadomych – gęstość ρ , trzy składowe wektora \mathbf{u} , sześć składowych lepkościowej części $\boldsymbol{\tau}$ tensora naprężenia, energię wewnętrzną e , ciśnienie p i trzy składowe wektorowego strumienia ciepła \mathbf{q} . Potencjał Π jest znany.

Wniosek z tego rozdziału jest taki, że ogólne prawa fizyki, którymi są równania zachowania, nie wystarczą do rozwiązywania zagadnień ruchu płynu, gdyż równań zachowania jest mniej niż niewiadomych.

Rozdział 4

Równania konstytutywne

4.1. Hipoteza Newtona

Hipoteza Newtona podaje zależność pomiędzy naprężeniami a prędkościami odkształceń, a dokładniej pomiędzy nieodwracalną (lepka) częścią tensora naprężenia $\boldsymbol{\tau}$, według dekompozycji (3.10), a tensorem prędkości deformacji \mathbf{D} (2.10). Zależność ta dla przepływów jednowymiarowych ma postać

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (4.1)$$

lub w zapisie skróconym

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \boldsymbol{\gamma}, \quad (4.2)$$

gdzie μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, a $\boldsymbol{\gamma}$ prędkością ścinania. Trójwymiarowe uogólnienie zależności (4.1) lub (4.2) przyjmuje następującą postać

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}^D, \quad (4.3)$$

gdzie dewiator \mathbf{D}^D tensora prędkości deformacji \mathbf{D} zapisuje się, zgodnie z zależnością (1.13), w następujący sposób

$$\mathbf{D}^D = \mathbf{D} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \operatorname{tr} \mathbf{D} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (4.4)$$

W ten sposób tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ można zapisać, według dekompozycji (3.10), w następujący sposób

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}^D. \quad (4.5)$$

Dla przepływów płynu nieściśliwego ($\rho = \text{const}$) dewiator tensora \mathbf{D} jest tożsamy z samym tensorem, więc

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (4.6)$$

Hipotezę Newtona wprowadza się po to, aby zmniejszyć liczbę niewiadomych w układzie równań zachowania (3.15) lub (3.16). Biorąc pod uwagę wzór (4.5) lub (4.6), widać że nieznaną sześć składowych tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ zostało zredukowane do dwóch niewiadomych – ciśnienia p i współczynnika lepkości μ . Zatem liczba niewiadomych zmniejszyła się o cztery. Jeżeli współczynnik lepkości μ jest stały, to liczba niewiadomych zmniejszy się o pięć. Gazy są płynami newtonowskimi, ale nie wszystkie ciecze można klasyfikować jako newtonowskie.

4.2. Płyny nienewtonowskie

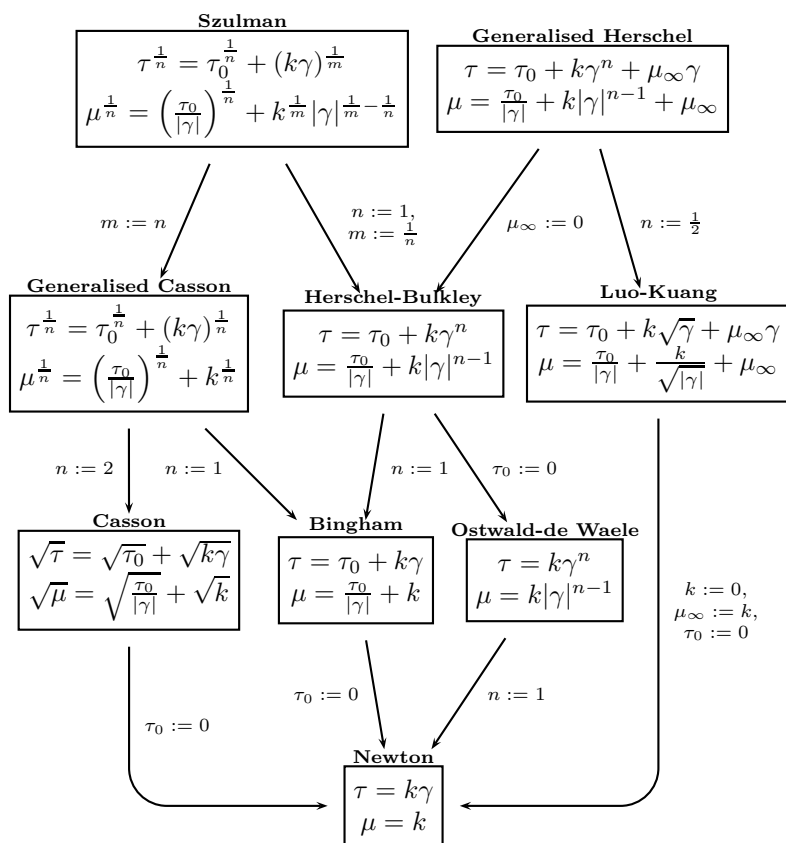
Płyny nienewtonowskie nie spełniają hipotezy Newtona (4.2) lub (4.3). Istnieją różne modele opisujące zachowanie płynów nienewtonowskich. Najprostszą grupą są uogólnione płyny newtonowskie, gdzie współczynnik lepkości μ zależy od prędkości ścinania γ , co zapisuje się jako

$$\tau = \mu(\gamma)\gamma \quad (4.7)$$

lub w przypadku trójwymiarowym

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}. \quad (4.8)$$

Zależność (4.7) w formie graficznej nazywana jest krzywą płynięcia. Rysunek 4.1 pokazuje wybrane modele płynów nienewtonowskich. Przez τ_0 oznaczono granicę płynięcia, a przez n – bezwymiarowy parametr reologiczny. Współczynnik k ma wymiar taki sam, jak współczynnik lepkości μ .



Rys. 4.1: Uogólnione płyny newtonowskie

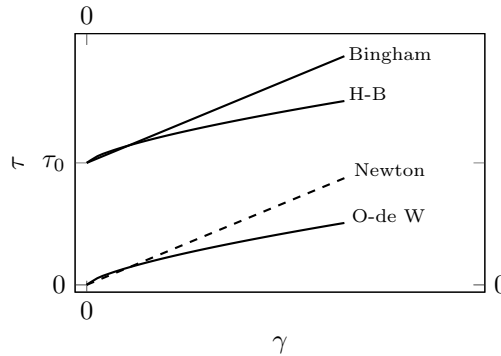
Na przykład dla modelu Bingham krzywa płynięcia opisana jest wzorem

$$\tau = \tau_0 + k\gamma \quad (4.9)$$

natomiast współczynnik lepkości dynamicznej jako

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau_0}{|\gamma|} + k. \quad (4.10)$$

Wzory (4.9) i (4.10) pokazane są graficznie na wykresie 4.2. Analogiczne wykresy (krzywe płynięcia) można wykreślić dla innych modeli z rysunku 4.1. Krzywa płynięcia dla płynu newtonowskiego jest linią prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Tangens nachylenia tej krzywej jest równy współczynnikowi lepkości dynamicznej μ .



Rys. 4.2: Przykładowe krzywe płynięcia

4.3. Prawo Fouriera

Prawo Fouriera¹ jest kolejnym przykładem równania konstytutywnego, które wprowadza się w celu wyrażenia wektorowego strumienia ciepła (gęstości strumienia ciepła) \mathbf{q} przez inne wielkości, aby zredukować liczbę niewiadomych. Wektorowa postać prawa Fouriera ma postać

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T, \quad (4.11)$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ jest tensorem przewodnictwa dla ośrodków anizotropowych. Tensor ten jest znany, gdyż opisuje ośrodek, w którym analizujemy przewodnictwo ciepła. Jeżeli ośrodek jest izotropowy, to tensor przewodnictwa redukuje się do współczynnika przewodnictwa ciepła λ , a prawo Fouriera (4.11) do prostszej postaci

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T. \quad (4.12)$$

Dzięki zależności konstytutywnej (4.12) możliwe jest zredukowanie liczby niewiadomych składowych wektora \mathbf{q} , która wynosi trzy, do jednej niewiadomej T .

4.4. Równania stanu

Równanie stanu gazu doskonałego w postaci

$$p = \rho RT \quad (4.13)$$

¹Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) – matematyk i fizyk francuski

jest kolejnym przykładem równania konstytutywnego, które wiąże ze sobą trzy parametry p , ρ i T w prosty sposób za pomocą równania algebraicznego. Równanie (4.13) słuszne jest dla gazów doskonałych i może być dodane do układu równań (3.15) lub (3.16) zwiększając jego liczbę. Równania (4.13) nie stosuje się oczywiście dla cieczy.

Innym przykładem równania konstytutywnego, znanego z termodynamiki, jest kaloryczne równanie stanu, które podaje zależność pomiędzy energią wewnętrzną e i temperaturą T

$$de = c_v dT, \quad (4.14)$$

gdzie c_v jest ciepłem właściwym przy stałej objętości. Zależność (4.14) słuszna jest dla gazów i cieczy. Ciepło c_v może być dodatkowo funkcją temperatury. Funkcja ta jest znana i zależna od płynu. W najprostszym przypadku c_v jest stałe. Kaloryczne równania stanu (4.14) pozwala zmniejszyć liczbę niewiadomych o jedną, gdyż wyraża energię wewnętrzną e przez temperaturę T .

Rozdział 5

Zasady termodynamiki dla ośrodków ciągłych

5.1. Druga zasada termodynamiki

Druga zasada termodynamiki dla ośrodków ciągłych i przemian nierównowagowych wyrażona jest za pomocą nierówności Clausiusa¹-Duhema² w następujący sposób

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T}, \quad (5.1)$$

gdzie ρ oznacza gęstość, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas, s – entropię właściwą, \mathbf{q} – wektorowy strumień ciepła, T – temperaturę i $\nabla \cdot$ – dywergencję. Iloraz strumienia ciepła i temperatury \mathbf{q}/T zwany jest strumieniem entropii. Zatem druga zasada termodynamiki (5.1) mówi, że szybkość zmian entropii (lewa strona nierówności) jest większa lub równa od strumienia entropii (prawa strona nierówności). Przez strumień entropii rozumie się tutaj entropię transportowaną z ciepłem. W przypadku, gdyby znak nierówności w relacji (5.1) zamienić na równość, to mielibyśmy do czynienia z procesami równowagowymi (odwracalnymi).

Z drugiej zasady termodynamiki (5.1) wynika równanie bilansu entropii w następującej postaci

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\phi}{T} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T}, \quad (5.2)$$

gdzie ϕ jest funkcją dyssypacji. Jeżeli wstawimy równanie bilansu entropii (5.2) do nierówności Clausiusa-Duhema (5.1), to zauważymy, że $\phi \geq 0$, czyli funkcja dyssypacji jest zawsze nieujemna. Równanie bilansu entropii mówi, że na szybkość zmian entropii wpływa entropia transportowana z ciepłem (strumień entropii) i procesy dyssypacyjne, które opisane są funkcją dyssypacji ϕ . Funkcję dyssypacji dekomponuje się na część związaną z procesami mechanicznymi (lepkością) ϕ_μ i procesami termicznymi ϕ_λ w następujący sposób

$$\phi = \phi_\mu + \phi_\lambda. \quad (5.3)$$

¹Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888) – fizyk niemiecki

²Pierre Maurice Marie Duhem (1861-1916) – fizyk i matematyk francuski

Lepkościową (mechaniczną) część funkcji dyssypacji wylicza się z następującej zależności

$$\phi_\mu = 2\mu\mathbf{D}^{\text{D}2}, \quad (5.4)$$

gdzie symbol $\mathbf{D}^{\text{D}2}$ rozumiany jest jako kwadrat dewiatora tensora prędkości deformacji. Całkowanie lepkościowej części funkcji dyssypacji (5.4) po objętości przepływu daje moc dyssypacji. Samo pojęcie dyssypacji jest rozumiane jako nieodwracalna zamiana części energii kinetycznej w ciepło.

5.2. Pierwsza zasada termodynamiki

Pierwsza zasada termodynamiki dla ośrodków ciągłych zapisywana jest w następujący sposób

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (5.5)$$

i wynika z równania zachowania energii (3.12) i przekształconego równania zachowania pędu (3.8). W równaniu (5.5) ρ – oznacza gęstość, $\frac{d}{dt}$ pochodną substancjalną, e – energię wewnętrzną, t – czas, $\boldsymbol{\tau}$ – lepkościową część tensora naprężenia, $\nabla \mathbf{u}$ – gradient prędkości, p – ciśnienie, $\nabla \cdot \mathbf{u}$ – dywergencję prędkości, $\nabla \cdot \mathbf{q}$ – dywergencją wektorowego strumienia ciepła (gęstości strumienia ciepła). Pierwsza zasada termodynamiki (5.5) dla ośrodków ciągłych i przemian nieodwracalnych mówi, że szybkość zmian energii wewnętrznej, a więc temperatury, spowodowana jest trzema czynnikami. Pierwszym jest praca sił lepkościowych $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}$, które związane są z nieodwracalną częścią $\boldsymbol{\tau}$ tensora naprężenia. Drugim jest praca sił odwracalnych $p \nabla \cdot \mathbf{u}$ związana z odwracalną (nielepką) częścią $-p\boldsymbol{\delta}$ tensora naprężenia. Trzecim czynnikiem jest przewodnictwo ciepła $\nabla \cdot \mathbf{q}$.

Pierwsza zasada termodynamiki w postaci (5.5) jest równaniem skalarnym, w którym występują trzy wielkości opisywane równaniami konstytutywnymi. To co jest również istotne, jest to, że te trzy wielkości, jak również równania konstytutywne, są różnych walencji. Energia wewnętrzna (dokładniej jej przyrost) de jest skalarą i skalarnie jest równanie konstytutywne, zwane kalorycznym równaniem stanu (4.14). Strumień (gęstość) ciepła \mathbf{q} jest wektorem, podobnie jak prawo Fouriera w postaci np. (4.12). Wreszcie lepkościowa część $\boldsymbol{\tau}$ tensora naprężenia jest tensorem, podobnie jak hipoteza Newtona, która może być określona np. dla płynów newtonowskim równaniem (4.3). Po wykorzystaniu trzech równań konstytutywnych, pierwszą zasadę termodynamiki można przedstawić w następującej postaci

$$c_v \rho \frac{dT}{dt} = \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \lambda \nabla^2 T, \quad (5.6)$$

która znana jest pod nazwą równania energii wewnętrznej lub w zagadnieniach wymiany ciepła – równaniem Fouriera-Kirchhoffa³. Dla stałej gęstości ($\rho = \text{const}$) równanie powyższe upraszcza się do poniższej postaci

$$c_v \rho \frac{dT}{dt} = \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T. \quad (5.7)$$

³Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) – fizyk niemiecki

Rozdział 6

Domknięte układy równań

6.1. Równania Naviera-Stokesa

Równania Naviera¹-Stokesa otrzymuje się z równania zachowania pędu (3.8) i hipotezy Newtona w postaci (4.5) dla płynów ściśliwych lub (4.6) dla płynów nieściśliwych.

Najogólniejsza postać równania Naviera-Stokesa otrzymywana jest dla płynów ściśliwych przy zmiennym współczynniku lepkości μ , co zapisuje się w następujący sposób

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}^D). \quad (6.1)$$

Jeżeli współczynnik lepkości μ jest stały, to równanie Naviera-Stokesa wygląda następująco

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (6.2)$$

Dla przypadku nieściśliwego i zmiennego współczynnika lepkości μ wystarczy zastąpić dewiator \mathbf{D}^D tensora prędkości deformacji samym tensorem prędkości deformacji \mathbf{D} , gdyż oba tensory są wtedy tożsame. Dla płynów newtonowskich współczynnik lepkości może być funkcją wyłącznie temperatury T , natomiast dla uogólnionych płynów newtonowskich współczynnik lepkości μ może zależeć jeszcze od prędkości ścinania γ . Dla obu przypadków równanie Naviera-Stokesa przyjmuje następującą postać

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}). \quad (6.3)$$

Równanie Naviera-Stokesa dla przypadku nieściśliwego i przy stałym współczynniku lepkości ma postać

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (6.4)$$

Równanie (6.4) słuszne jest wyłącznie dla płynów newtonowskich i jest najczęściej spotykaną postacią równania Naviera-Stokesa. Powyższa postać może być również stosowana dla przepływów płynów ściśliwych, o ile liczba Macha jest mała.

¹Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) – fizyk i inżynier francuski

6.2. Płyn nieściśliwy dla stałej lepkości

Domknięty układ równań, który opisuje ruch płynu nieściśliwego przy stałym współczynniku lepkości μ , tworzą równanie zachowania masy (3.4) i równanie Naviera-Stokesa (6.4)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}.\end{aligned}\tag{6.5}$$

W układzie (6.5) mamy cztery równania skalarne i cztery niewiadome. Niewiadomymi są trzy składowe u_x , u_y , u_z wektora prędkości \mathbf{u} i ciśnienie p . Gęstość ρ jest znana, podobnie jak współczynnik lepkości μ . Gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} . Ponadto w układzie równań (6.5) $\nabla \cdot$ oznacza dywergencję, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas, ∇ – gradient i ∇^2 – laplasjan. Przykłady rozwiązań układu (6.5) podane są w rozdziałach 16, 17 i 18.

6.3. Płyn nieściśliwy dla zmiennej lepkości

Domknięty układ równań, który opisuje ruch płynu nieściśliwego przy współczynniku lepkości μ zależnym wyłącznie od temperatury, tworzą równanie zachowania masy (3.4), równanie Naviera-Stokesa (6.3) i uproszczona postać równania Fouriera-Kirchhoffa (5.7)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}), \\ c_v \rho \frac{dT}{dt} &= \phi_\mu + \lambda \nabla^2 T, \\ \mu &= f(T).\end{aligned}\tag{6.6}$$

Powyższy układ słuszny jest dla płynów newtonowskich. W układzie (6.6) mamy sześć równań skalnych i sześć niewiadomych. Niewiadomymi są trzy składowe u_x , u_y , u_z wektora prędkości \mathbf{u} , ciśnienie p , temperatura T i współczynnik lepkości μ . Gęstość ρ jest znana. Gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} . Dodatkowo w układzie równań (6.6) $\nabla \cdot$ oznacza dywergencję, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas, ∇ – gradient, $\nabla \cdot$ – dywergencją, ∇^2 – laplasjan i λ – współczynnik przewodnictwa. Funkcja dyssypacji ϕ_μ liczona jest według wzoru (5.4), pamiętając o tym, że dewiator \mathbf{D}^D tensora prędkości deformacji jest tożsamy z tensorem prędkości deformacji \mathbf{D} dla płynów nieściśliwych. Funkcja dyssypacji zależy więc od współczynnika lepkości μ i składowych wektora prędkości \mathbf{u} , a dokładniej od pochodnych składowych prędkości. Dla cieczy zamiast ciepła właściwego przy stałej objętości c_v pisze się zwykle c . Funkcja f jest znana.

6.4. Płyn nienewtonowski

Domknięty układ równań, który opisuje ruch płynu nienewtonowskiego, tworzą równanie zachowania masy (3.4), równanie Naviera-Stokesa w postaci (6.3) i zależność, która opisuje współczynnik lepkości μ jako funkcję prędkości ścinania γ . Zależność ta może być dowolną funkcją z rysunku 4.1. Układ równań wygląda następująco

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}), \\ \mu &= f(\gamma).\end{aligned}\tag{6.7}$$

W układzie (6.7) mamy pięć równań skalarnych i pięć niewiadomych. Niewiadomymi są trzy składowe u_x, u_y, u_z wektora prędkości \mathbf{u} , ciśnienie p i współczynnik lepkości μ . Gęstość ρ jest znana. Gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} . Dodatkowo w układzie równań (6.7) $\nabla \cdot$ oznacza dywergencję, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas, ∇ – gradient i $\nabla \cdot$ – dywergencją. Funkcja dyssypacji ϕ_μ liczona jest według wzoru (5.4) dla $\mathbf{D}^D = \mathbf{D}$, gdzie \mathbf{D} jest tensorem prędkości deformacji. Funkcja dyssypacji zależy zatem od współczynnika lepkości μ i pochodnych składowych wektora prędkości \mathbf{u} .

6.5. Płyn ściśliwy dla stałej lepkości

Domknięty układ równań, który opisuje ruch płynu ściśliwego przy stałym współczynniku lepkości μ i stałym ciepłe właściwym c_v , tworzą równanie zachowania masy (3.1), równanie Naviera-Stokesa (6.2), równanie Fouriera-Kirchhoffa (5.6) i równanie stanu gazu doskonałego (4.13)

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}), \\ c_v \rho \frac{dT}{dt} &= \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \lambda \nabla^2 T, \\ p &= \rho RT.\end{aligned}\tag{6.8}$$

W układzie (6.8) mamy sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych. Niewiadomymi są trzy składowe u_x, u_y, u_z wektora prędkości \mathbf{u} , ciśnienie p , gęstość ρ i temperatura T . Gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} . Dodatkowo w układzie równań (6.8) $\nabla \cdot$ oznacza dywergencję, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas, ∇ – gradient, $\nabla \cdot$ – dywergencją, ∇^2 – laplasjan i λ – współczynnik przewodnictwa. Funkcja dyssypacji ϕ_μ liczona jest według wzoru (5.4). Funkcja dyssypacji zależy zatem od współczynnika lepkości μ i pochodnych składowych wektora prędkości \mathbf{u} . Indywidualna stała gazowa oznaczona jest jako R .

6.6. Płyn ściśliwy dla zmiennej lepkości

Domknięty układ równań, który opisuje ruch płynu ściśliwego przy zmiennym współczynniku lepkości μ i zmiennym ciepłem właściwym c_v , tworzą równanie zachowania masy (3.1), równanie Naviera-Stokesa w postaci (6.1), równanie Fouriera-Kirchhoffa (5.6), równanie stanu gazu doskonałego (4.13) i zależności, która opisuje współczynnik lepkości μ i c_v jako funkcje temperatur. Układ równań wygląda następująco

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}^D), \\ c_v \rho \frac{dT}{dt} &= \phi_\mu + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \lambda \nabla^2 T, \\ p &= \rho RT, \\ \mu &= f_1(T), \\ c_v &= f_2(T). \end{aligned} \tag{6.9}$$

W układzie (6.9) mamy osiem równań skalarnych i osiem niewiadomych. Niewiadomymi są trzy składowe u_x , u_y , u_z wektora prędkości \mathbf{u} , ciśnienie p , gęstość ρ , temperatura T , współczynniki μ i c_v . Gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} . Dodatkowo w układzie równań (6.9) $\nabla \cdot$ oznacza dywergencję, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas, ∇ – gradient, $\nabla \cdot$ – dywergencję, ∇^2 – laplasjan i λ – współczynnik przewodnictwa. Funkcja dyssypacji ϕ_μ liczona jest według wzoru (5.4). Funkcja dyssypacji zależy więc od współczynnika lepkości μ i pochodnych składowych wektora prędkości \mathbf{u} . Indywidualna stała gazowa oznaczona jest jako R , a \mathbf{D}^D dewiator tensora prędkości deformacji. Funkcje f_1 i f_2 są znane.

Rozdział 7

Przepływy płynów nielepkich

7.1. Domknięte układy równań

7.1.1. Równanie Eulera

Dla przepływów płynów nielepkich (idealnych) zakłada się zerowy współczynnik lepkości μ i zerowy współczynnik przewodnictwa ciepła λ . Równanie Eulera¹ otrzymujemy z dowolnej postaci równań Naviera-Stokesa (6.1)-(6.4)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (7.1)$$

Ponieważ w równaniu Eulera (7.1) nie ma laplasjanu prędkości, który związany był ze współczynnikiem lepkości, to równanie Eulera jest równaniem różniczkowym nieliniowym pierwszego rzędu. Założenie braku lepkości skutkuje tym, że na powierzchniach opływanych składowa styczna prędkości nie zeruje się, tak jak ma to miejsce w przypadku przepływów płynu lepkiego.

7.1.2. Płyn idealny nieściśliwy

Domknięty układ równań, który opisuje ruch idealnego płynu nieściśliwego, tworzą równanie zachowania masy (3.4) i równanie Eulera (7.1)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p. \end{aligned} \quad (7.2)$$

W układzie (7.2) mamy cztery równania skalarne i cztery niewiadome. Niewiadomymi są trzy składowe u_x, u_y, u_z wektora prędkości \mathbf{u} i ciśnienie p . Gęstość ρ jest znana. Gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} . Ponadto w układzie równań (7.2) $\nabla \cdot$ oznacza dywergencję, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas i ∇ – gradient.

¹Leonhard Euler (1707-1783) – matematyk i fizyk szwajcarski

7.1.3. Płyn idealny ściśliwy

Domknięty układ równań, który opisuje ruch idealnego płynu ściśliwego, tworzą równanie zachowania masy (3.1), równanie Eulera (7.1), równanie Fouriera-Kirchhoffa (5.6) i równanie stanu gazu doskonałego (4.13)

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p, \\ c_v \rho \frac{dT}{dt} &= \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \\ p &= \rho RT.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Równanie Fouriera-Kirchhoffa (5.6) nie zawiera ani laplasjanu temperatury, gdyż współczynnik przewodnictwa $\lambda = 0$, ani lepkościowej części funkcji dyssypacji ϕ_μ , gdyż według wzoru (5.4) zależy ona od współczynnika lepkości dynamicznej $\mu = 0$. W układzie (7.3) mamy sześć równań skalarnych i sześć niewiadomych. Niewiadomymi są trzy składowe u_x, u_y, u_z wektora prędkości \mathbf{u} , ciśnienie p , gęstość ρ i temperatura T . Gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} . W układzie równań (7.3) $\nabla \cdot$ oznacza dywergencję, $\frac{d}{dt}$ – pochodną substancjalną, t – czas, ∇ – gradient i $\nabla \cdot$ – dywergencją. Indywidualna stała gazowa oznaczona jest jako R .

7.2. Równanie Bernoulliego

Równanie Bernoulliego² ma następującą postać

$$\frac{1}{2}u^2 + P + \Pi = \text{const},\tag{7.4}$$

gdzie u jest modułem (długością) wektora prędkości \mathbf{u} , P jest funkcją ciśnienia i Π jest potencjałem wektora grawitacji. Równanie (7.4) słuszne jest przy założeniu nielepkości $\mu = 0$, potencjalności sił masowych $\mathbf{f} = -\nabla\Pi$, stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ i barotropowości płynu. Barotropowość oznacza, że gęstość jest wyłącznie funkcją ciśnienia. Sama funkcja ciśnienia P dana jest wzorem

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}.\tag{7.5}$$

Równanie Bernoulliego (7.4) zachowuje słuszność na liniach prądu lub liniach wirowych lub w całym obszarze przepływu w przypadku przepływu bezwirowego, czyli $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

²Daniel Bernoulli (1700-1782) – matematyk i fizyk szwajcarski

7.3. Przepływy potencjalne

7.3.1. Potencjał prędkości

W przypadku przepływów potencjalnych, oprócz założenia nielepkości $\mu = 0$, zakłada się dodatkowo, że pole prędkości \mathbf{u} dane jest gradientem potencjału φ

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi. \quad (7.6)$$

Pole prędkości jest potencjalne wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwirowe, czyli $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

7.3.2. Całka Lagrange'a

Całka Lagrange'a³ ma następującą postać

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + P + \Pi = f(t), \quad (7.7)$$

gdzie f jest dowolną funkcją czasu. Całka Lagrange'a jest bardzo podobna do równania Bernoulliego (7.4). Jeżeli uwzględnimy wzór (7.6), to całka (7.7) ma następującą postać

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 + P + \Pi = f(t). \quad (7.8)$$

Równanie (7.7) lub (7.8) słuszne jest przy założeniu nielepkości $\mu = 0$, potencjalności sił masowych $\mathbf{f} = -\nabla\Pi$, barotropowości płynu i potencjalności lub bezwirowości pola prędkości.

Porównując powyższe założenia z założeniami, przy których słuszne jest równanie Bernoulliego, widać, że całka Lagrange'a jest ogólniejsza w tym sensie, że dotyczy przepływów niestacjonarnych, podczas gdy równanie Bernoulliego tylko stacjonarnych. Natomiast równanie Bernoulliego jest ogólniejsze od całki Lagrange'a w tym sensie, że może dotyczyć przepływów wirowych, podczas gdy całka Lagrange'a tylko bezwirowych.

7.3.3. Dwuwymiarowe przepływy potencjalne

Przy dodatkowym założeniu stacjonarności i nieściśliwości domknięty układ równań, który opisuje przepływ dwuwymiarowy, składa się z równania zachowania masy (3.5) i całki Lagrange'a (7.8)

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi &= 0, \\ p &= p_0 - \frac{1}{2}\rho(\nabla\varphi)^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Dodatkowo założone zostało, że przepływ dwuwymiarowy jest prostopadły do wektora grawitacji, więc nie ma potrzeby rozważania potencjału w całce Lagrange'a (7.8). Funkcja ciśnienia (7.5) dla przypadku nieściśliwego przyjmuje prostą postać

³Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) – matematyk i astronom włoski

$P = p\rho^{-1}$. Równanie zachowania masy – pierwsze z układu (7.2), przechodzi w równanie Laplace’a $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$. Warunek konieczny i dostateczny istnienia potencjału $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, który w przepływie dwuwymiarowym redukuje się do postaci

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \quad (7.10)$$

spełniony jest dla funkcji φ prądu w sposób tożsamościowy, gdyż wzór (7.6) dla przypadku dwuwymiarowego ma następującą postać

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (7.11)$$

Dodatkowo można zauważyć, że układ równań (7.9) jest rozprzęgnięty. Oznacza to, że najpierw należy wyznaczyć potencjał φ , a później na jego podstawie należy wyznaczyć ciśnienie z całki Lagrange’a.

Układ równań (7.9) opisuje przepływy potencjalne przy wykorzystaniu potencjału φ . Istnieje alternatywny układ równań, który wykorzystuje funkcję prądu ψ . Funkcja prądu określana jest za pomocą układu równań

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7.12)$$

Przy takiej definicji funkcji prądu równanie zachowania masy (pierwsze w układzie (7.2)) spełnione jest tożsamościowo. Zamiast równania zachowania masy stosuje się warunek (7.10) i całkę Lagrange’a (7.8), co daje

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= 0, \\ p &= p_0 - \frac{1}{2} \rho \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Podobnie jak poprzednio, układ równań (7.13) jest rozprzęgnięty. Dodatkowo można zauważyć, że $\nabla \varphi \cdot \nabla \psi = 0$, co oznacza, że izolinie potencjału i izolinie funkcji prądu (linie prądu) są ortogonalne.

7.3.4. Potencjał zespolony

Ze wzorów (7.11) i (7.12) wynika, że

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Warunki (7.14) nazywane są warunkami Cauchy’ego-Riemanna⁴ i związane są z różniczkowaniem w sensie zespolonym potencjału zespolonego

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (7.15)$$

⁴Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) – matematyk niemiecki

gdzie $z = x + iy$. Pochodna potencjału zespolonego (7.15) jest według równań (7.14) sprzężoną prędkością zespoloną

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = u_x - iu_y. \quad (7.16)$$

Potencjał zespolony umożliwia rozpatrywanie jednej funkcji w jednej zmiennej zespolonej z zamiast dwóch funkcji rzeczywistych φ , ψ dwóch zmiennych rzeczywistych x , y . Ponieważ potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ spełniają (są rozwiązaniami) równanie Laplace'a, które jest liniowe, to zachodzi zasada superpozycji. Oznacza to, że można dodawać i odejmować różne potencjały zespolone, otrzymując w ten sposób bardziej skomplikowane przepływy.

We współrzędnych biegunowych r , α potencjał zespolony zapisywany jest jako

$$w(z) = \varphi(r, \alpha) + i\psi(r, \alpha), \quad (7.17)$$

gdzie $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, a pochodna potencjału (7.17) jest sprzężoną prędkością zespoloną w układzie biegunowym

$$e^{i\alpha} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + i\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - i\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = u_r - iu_\alpha. \quad (7.18)$$

Przykłady wykorzystania potencjałów zespolonych do modelowania przepływów podane są w rozdziale 22.

Rozdział 8

Hydrostatyka

8.1. Równanie równowagi

Równanie równowagi otrzymuje się z któregośkolwiek równania Naviera-Stokesa (6.1)-(6.4) lub Eulera (7.1), podstawiając $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\rho \mathbf{f} = \nabla p. \quad (8.1)$$

W równaniu powyższym przez ρ oznaczono gęstość, przez \mathbf{f} – gęstość rozkładu sił masowych, która sprowadza się do wektora grawitacji \mathbf{g} . Ciśnienie oznaczone jest jako p i gradient jako ∇ . Równanie (8.1) odpowiada trzem równaniami skalarnym

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho g_x, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho g_y, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho g_z, \end{aligned} \quad (8.2)$$

gdzie przez g_x, g_y, g_z oznaczono składowe wektora grawitacji \mathbf{g} . Jeżeli wektor grawitacji ma tylko jedną składową niezerową, np g_z , to równanie (8.1) lub (8.2) można scałkować do postaci

$$p = p_0 + \rho g z, \quad (8.3)$$

o ile początek układu współrzędnych znajduje się na powierzchni swobodnej lustra wody. Przez p_0 oznaczono ciśnienie atmosferyczne p_0 , które panuje nad lustrem wody i pełni tu rolę stałej całkowania. Ciśnienie hydrostatyczne wody $\rho g z$ zależy od głębokości z .

8.2. Prawo Pascala

Jeżeli ciśnienie atmosferyczne p_0 jest dużo większe od ciśnienia hydrostatycznego $\rho g z$, to $p \approx p_0$, co oznacza, że w całym zbiorniku cieczy ciśnienie jest jednakowe i równe ciśnieniu atmosferycznemu p_0 . Ciśnienie p_0 można również utożsamiać z ciśnieniem zewnętrznym, wywieranym na płyn.

Jeżeli w równaniu równowagi (8.1) pominiemy siły masowe, to $\nabla p = \mathbf{0}$. Skoro gradient ciśnienia jest zerowy, to ciśnienie musi być stałe w całej objętości zajmowanej przez płyn $p = \text{const}$. Jest to inne sformułowaniu prawa Pascala¹.

8.3. Napór i moment naporu hydrostatycznego

Przez napór hydrostatyczny (parcie) \mathbf{N} na powierzchnię S rozumie się siłę wyliczaną na podstawie następującej całki powierzchniowej

$$\mathbf{N} = - \iint_S p \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (8.4)$$

gdzie wektor $\hat{\mathbf{n}}$ jest wektorem normalnym do powierzchni i skierowany jest on w kierunku cieczy – przeciwnie do kierunku działania naporu. Ciśnienie oznaczone jest jako p .

Momentu siły naporu hydrostatycznego definiuje się w następujący sposób

$$\mathbf{M} = - \iint_S \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} p dS, \quad (8.5)$$

gdzie \mathbf{r} oznacza wektor wodzący, którego początek znajduje się w punkcie, względem którego liczony jest moment siły naporu. Przykłady zastosowania wzoru (8.5) podane są w rozdziałach 19 i 20.

8.4. Wypór i prawo Archimedesesa

Wypór hydrostatyczny (siła wyporu) definiuje się analogicznie do naporu (8.4)

$$\mathbf{N} = - \iint_S p \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (8.6)$$

Różnica polega na tym, że tym razem powierzchnia całkowania musi być zamknięta, co jest zaznaczone przy symbolu całki powierzchniowej w powyższym równaniu. W przypadku naporu hydrostatycznego powierzchnia całkowania jest dowolna. Na rysunku 8.2 pokazane jest przykładowe ciało częściowo zanurzone. Powierzchnia zamknięta S , po której następuje całkowanie we wzorze (8.6), pokazana jest natomiast na rysunku 8.3.

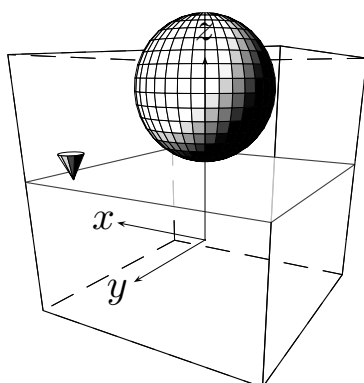
Prawo Archimedesesa² mówi, że siła wyporu \mathbf{N} (8.6) jest równa ciężarowi cieczy wypartej przez zanurzone ciało $\rho V \mathbf{g}$. Zwrot siły wyporu jest przeciwny do zwrotu siły ciężkości, co można zapisać jako

$$\mathbf{N} = -\rho V \mathbf{g}. \quad (8.7)$$

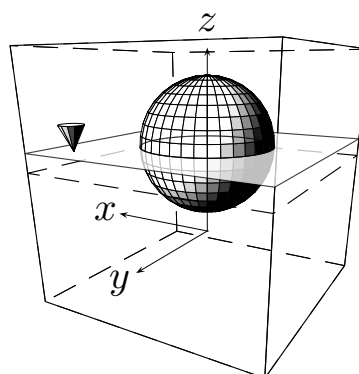
W powyższym sformułowaniu prawa Archimedesesa V oznacza objętość wypartej cieczy, która równa jest objętości zanurzonej ciała, pokazanej na rysunku 8.3. Gęstość cieczy oznaczana jest jako ρ , a \mathbf{g} oznacza wektor grawitacji. Rysunek 8.1 pokazuje ciało przed zanurzeniem wraz z poziomem cieczy. Na rysunku 8.2 widać ciało częściowo zanurzone wraz z nowym, wyższym poziomem cieczy.

¹Blaise Pascal (1623-1662) – matematyk, fizyk i filozof francuski

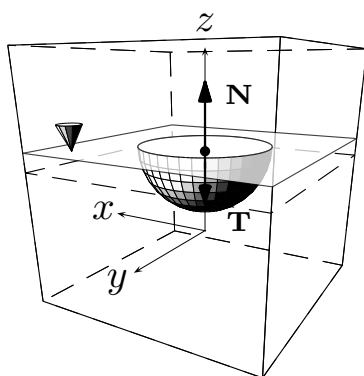
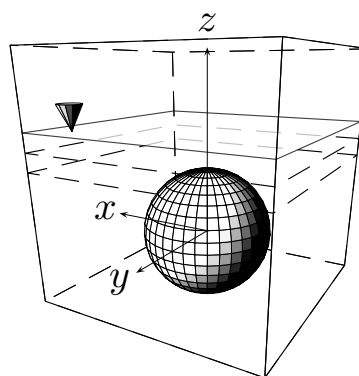
²Archimedes z Syrakuz (287-212 p.n.e.) – filozof i matematyk grecki



Rys. 8.1: Ciało przed zanurzeniem



Rys. 8.2: Ciało w równowadze, częściowo zanurzone

Rys. 8.3: Wypór \mathbf{N} i ciężar \mathbf{T} 

Rys. 8.4: Ciało zatopione

8.5. Warunek pływania

Ciało pływa, jeżeli wypór \mathbf{N} równoważony jest ciężarem ciała \mathbf{T} , co zapisujemy jako

$$\mathbf{N} + \mathbf{T} = \mathbf{0}. \quad (8.8)$$

W przypadku, gdy zanurzone całkowicie ciało zostanie pozostawione na pewnej głębokości, to możliwe są trzy warianty. Jeżeli wypór $|\mathbf{N}|$ jest większy od ciężaru ciała $|\mathbf{T}|$, to ciało zacznie się wynurzać częściowo, aż do momentu, w którym wypór będzie równoważony przez ciężar i ciało zacznie pływać, czyli znajdzie się w równowadze, co pokazane jest na rysunku 8.2. Jeżeli wypór równy jest ciężarowi ciała, to ciało pozostanie zanurzone na głębokości, na której zostało umieszczone. Jeżeli ciężar ciała jest większy od wyporu, to ciało zacznie tonąć (rysunek 8.4). Ciężar ciała w najprostszym przypadku wyznacza się ze wzoru

$$\mathbf{T} = \rho_c V_c \mathbf{g}, \quad (8.9)$$

gdzie ρ_c jest stałą gęstością ciała, a V_c objętością ciała.

Rozdział 9

Analiza wymiarowa

9.1. Twierdzenie Buckinghama

Twierdzenie Buckinghama¹ [3] mówi, że dowolną funkcję f w postaci

$$f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = 0, \quad (9.1)$$

która zależy od n zmiennych wymiarowych, można sprowadzić do innej postaci

$$f\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}}, \frac{a_{k+2}}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_k^{q_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}}\right) = 0, \quad (9.2)$$

która zależy od $n - k$ zmiennych bezwymiarowych. Przez k oznaczono liczbę zmiennych, wybranych z grupy n zmiennych podstawowych, których liczba równa jest liczbie jednostek podstawowych. Powyższe równanie zapisuje się również jako

$$f(\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n) = 0. \quad (9.3)$$

Twierdzenie Buckinghama niesie dwojakie korzyści. Po pierwsze, ogranicza liczbę zmiennych, między którymi należy szukać zależności w postaci funkcji f . Po drugie, nowa funkcja f operuje na zmiennych bezwymiarowych, które nie zależą od wyboru jednostek. Postaci poszczególnych zmiennych Π_i nie są jednoznaczne, co bierze się stąd, że zmienne z grupy podstawowej mogą być często wybierane na wiele sposobów. Twierdzenie Buckinghama nie rozstrzyga więc o postaci funkcji f . Nie podaje również sposobu jej poszukiwania.

W mechanice płynów mamy do czynienia z czterema jednostkami podstawowymi. Są to jednostka masy kg, długości m, czasu s i temperatury K. Pozostałe jednostki są tzw. jednostkami pochodnymi. Jako jednostkę pochodną można podać przykładowo ciśnienie $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$. Ogólnie każdą jednostkę pochodną można zapisać w postaci $\text{kg}^{a_1}\text{m}^{a_2}\text{s}^{a_3}\text{K}^{a_4}$. Przykłady zastosowania twierdzenia Buckinghama podane są w rozdziale 21.

¹Edgar Buckingham (1867-1940) – fizyk amerykański

Część II
Ćwiczenia

Rozdział 10

Ćwiczenie 1. Teoria pola

10.1. Operatory pojedyncze

Wektor, np. wektor prędkości \mathbf{u} , zapisuje się na dwa sposoby

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} + u_z \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}. \quad (10.1)$$

Wektorowy operator różniczkowy ∇ , zapisuje się na dwa sposoby

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Gradient funkcji skalarnej f zapisuje się na dwa sposoby

$$\nabla f = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

Dywergencja wektora \mathbf{u} (10.1) oblicza się tak, jak dla mnożenia skalarnego dwóch wektorów

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (10.4)$$

Rotacja wektora \mathbf{u} (10.1) obliczana jest tak, jak w przypadku mnożenia wektorowego dwóch wektorów

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (10.5)$$

10.2. Operatory podwójne

	∇f	$\nabla \cdot \mathbf{u}$	$\nabla \times \mathbf{u}$
∇	tensor $\nabla \nabla f$	wektor $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$	tensor $\nabla(\nabla \times \mathbf{u})$
$\nabla \cdot$	skalar $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$	—	skalar $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$
$\nabla \times$	wektor $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$	—	wektor $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$

Tab. 10.1: Operatory podwójne

Rotacja gradientu liczona jest jak iloczyn wektorowy ∇ i ∇f

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \quad (10.6) \end{aligned}$$

Dywergencja rotacji liczona jest jako iloczyn mieszany ∇ , ∇ i \mathbf{u}

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U_x}{\partial z \partial y} = 0. \quad (10.7) \end{aligned}$$

Gradient gradientu funkcji skalarnej f oblicza się w następujący sposób, którego wynikiem jest tensor

$$\nabla \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

Gradient prędkości obliczany jest analogicznie jak (10.8) i wynikiem jest również tensor

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

Dywergencja gradientu definiowana jest jako laplasjan ∇^2

$$\nabla \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f. \quad (10.10)$$

Gradient rotacji $\nabla(\nabla \times \mathbf{u})$ jest tensorem, który obliczyć można podobnie jak gradient prędkości (10.9) z tą różnicą, że zamiast wektora prędkości \mathbf{u} podstawia się wektor wirowości $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z) = \nabla \times \mathbf{u}$ w następujący sposób

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} & \frac{\partial \Omega_y}{\partial z} & \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (10.11)$$

Składowe Ω_x , Ω_y , Ω_z wektora wirowości obliczane są według zależności (10.5). Rotację rotacji wektora prędkości \mathbf{u} , która jest wektorem, można obliczyć jako rotację

wektora wirowości $\boldsymbol{\Omega}$ na podstawie wzoru (10.5) podstawiając za \mathbf{u} wektor wirowości $\boldsymbol{\Omega}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\Omega} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \end{vmatrix} = \\ & \left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial \Omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial \Omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Ostatnim operatorem podwójnym jest gradient dywergencji $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$, który jest wektorem i występuje np. w równaniu Naviera-Stokesa (6.2). Gradient ten można obliczyć na podstawie wzoru (10.3), podstawiając za f dywergencją $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ze wzoru (10.4)

$$\begin{aligned} \nabla f &= \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \\ & \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

10.3. Pochodna substancjalna

Pochodna substancjalna obliczana jest z różniczki zupełnej funkcji f czterech zmiennych i odnoszona jest obustronnie do dt . Wykorzystuje się również definicje prędkości. Wynik końcowy można zapisać w krótszej postaci, wykorzystując powyższe symbole gradientu

$$df(t, x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad (10.14)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (10.15)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (10.16)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (10.17)$$

Przyspieszenie jest pochodną substancjalną wektora prędkości \mathbf{u}

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (10.18)$$

Przyspieszenie łatwiej obliczać dla poszczególnych składowych

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \hat{\mathbf{i}} \frac{du_x}{dt} + \hat{\mathbf{j}} \frac{du_y}{dt} + \hat{\mathbf{k}} \frac{du_z}{dt}. \quad (10.19)$$

Rozdział 11

Ćwiczenie 2. Kinematyka

11.1. Zadanie 1

Czy pole prędkości \mathbf{u} jest potencjalne? Jeżeli tak, to znaleźć potencjał φ .

1. $\mathbf{u} = (2xy^3 - 3y)\hat{\mathbf{i}} + 3(x^2y^2 - x + y^2)\hat{\mathbf{j}}$

2. $\mathbf{u} = \frac{ax}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{ay}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{j}}$

3. $\mathbf{u} = (ax^2 - ay^2)\hat{\mathbf{i}} - 2axy\hat{\mathbf{j}}$

4. $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}}e^{xy} \sin x + \hat{\mathbf{j}}(y^3 + z) - \hat{\mathbf{k}} \arctg zx$

5. $\mathbf{u} = yz\hat{\mathbf{i}} + xz\hat{\mathbf{j}} + xy\hat{\mathbf{k}}$

6. $\mathbf{u} = (3ax^2y - ay^3)\hat{\mathbf{i}} + 3(ax^3 - 3axy^2)\hat{\mathbf{j}}$

Pole prędkości \mathbf{u} jest potencjalne, jeżeli $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, a ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwirowe $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, co zapisuje się jako

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi \iff \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (11.1)$$

Trzeba najpierw sprawdzić, czy $\nabla \times \mathbf{u}$ jest zerowa. Dla trójwymiarowego przypadku mamy ze wzoru (10.5)

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}. \quad (11.2)$$

Z równania wektorowego (11.2) wynikają trzy warunki skalarne, które muszą być spełnione jednocześnie

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Sytuacja jest prostsza w przypadku dwuwymiarowym, jeżeli mamy tylko dwie składowe pola prędkości \mathbf{u} i obie zależą tylko od dwóch zmiennych x i y

$$\mathbf{u} = u_x(x, y)\hat{\mathbf{i}} + u_y(x, y)\hat{\mathbf{j}}. \quad (11.4)$$

Rotacja dla takiego pola prędkości liczona jest jako

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}, \quad (11.5)$$

gdyż $u_z = 0$ i $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Otrzymujemy wtedy tylko jeden warunek

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (11.6)$$

który jest taki sam, jak warunek trzeci w układzie (11.3), dla przypadku trójwymiarowego. Warunek (11.6) musi być spełniony, aby pole prędkości (11.4) było bezwzględnie i istniał potencjał φ .

1. Składowe prędkości wynoszą

$$\begin{aligned} u_x &= 2xy^3 - 3y, \\ u_y &= 3(x^2y^2 - x + y^2). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Sprawdzamy warunek (11.6)

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = 6xy^2 - 3 = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (11.8)$$

który jest spełniony. Wzór $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ odpowiada dwóm równaniom skalarnym

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Bierzemy pierwszą składową prędkości z (11.7) i wstawiamy do pierwszego równania (11.9)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy^3 - 3y \quad (11.10)$$

Całkujemy obustronnie względem x

$$\varphi(x, y) = \int (2xy^3 - 3y) dx \quad (11.11)$$

i mamy

$$\varphi(x, y) = x^2y^3 - 3xy + f(y). \quad (11.12)$$

Nieznana funkcja $f(y)$ pełni tu rolę stałej przy różniczkowaniu przez x . Wykorzystujemy drugie równanie układu (11.9). Za u_y podstawiamy ze wzoru (11.7) a $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ wyliczamy ze wzoru (11.12), otrzymując

$$3(x^2y^2 - x + y^2) = 3x^2y^2 - 3x + f'(y). \quad (11.13)$$

Upraszczając, widzimy, że pochodna f' wyraża się następującym wzorem

$$f'(y) = 3y^2. \quad (11.14)$$

Możemy ją znaleźć, całkując obustronnie względem y

$$f(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + c. \quad (11.15)$$

Znalezioną w ten sposób funkcją f wstawiamy do wzoru (11.12) i mamy ostatecznie potencjał φ w postaci

$$\varphi(x, y) = x^2y^3 - 3xy + y^3 + c. \quad (11.16)$$

2. Tak. $\varphi(x, y) = \frac{a}{2} \ln(x^2 + y^2) + c$
3. Tak. $\varphi(x, y) = \frac{ax^3}{3} - axy^2 + c$
4. Sprawdzamy pierwszy warunek z układu (11.3)

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}. \quad (11.17)$$

Widać, że

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 1, \quad (11.18)$$

a więc

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial z}. \quad (11.19)$$

Kolejnych warunków nie trzeba sprawdzać, bo już pierwszy nie jest spełniony. Zatem \mathbf{u} nie jest potencjalne.

5. Składowe prędkości wynoszą

$$\begin{aligned} u_x &= yz, \\ u_y &= xz, \\ u_z &= xy. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Spełnione są warunki (11.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial y} &= x = \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= y = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= z = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Wzór $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ odpowiada trzem równaniami skalarnym

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ u_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{11.22}$$

Bierzemy pierwsze równanie z układu (11.22) i składową u_x z układu (11.20)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz. \tag{11.23}$$

Całkujemy obustronnie po x

$$\varphi(x, y, z) = \int yz \, dx = xyz + f(y, z), \tag{11.24}$$

gdzie $f(y, z)$ pełni rolę stałej przy różniczkowaniu po x . Wykorzystujemy drugi warunek układu (11.22) w postaci $u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Za u_y podstawiamy podstawiamy składową z układu (11.20), a $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ liczymy ze wzoru (11.24), otrzymując

$$xz = xz + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}. \tag{11.25}$$

Czyli

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 0. \tag{11.26}$$

Całkujemy obustronnie powyższe równanie (11.26) po y , aby znaleźć funkcję f

$$f(y, z) = \int 0 \, dy = g(z), \tag{11.27}$$

gdzie nieznaną funkcję g pełni rolę stałej przy różniczkowaniu względem y . Funkcję f ze wzoru (11.27) wstawiamy do potencjału (11.24) i mamy

$$\varphi(x, y, z) = xyz + g(z). \tag{11.28}$$

Wykorzystujemy trzeci warunek (11.22) w postaci $u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Za u_z podstawiamy podstawiamy składową z układu (11.20), a $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ liczymy ze wzoru (11.28), otrzymując

$$xy = xy + g'(z). \tag{11.29}$$

czyli $g'(z) = 0$, a więc po całkowaniu obustronnym względem z , mamy

$$g(z) = \int 0 \, dz = c. \tag{11.30}$$

Otrzymaną funkcję g (11.30) wstawiamy do równania (11.28) i otrzymujemy ostatecznie potencjał φ

$$\varphi(x, y, z) = xyz + c. \tag{11.31}$$

6. Tak. $\varphi(x, y) = ax^3y - axy^3 + c$

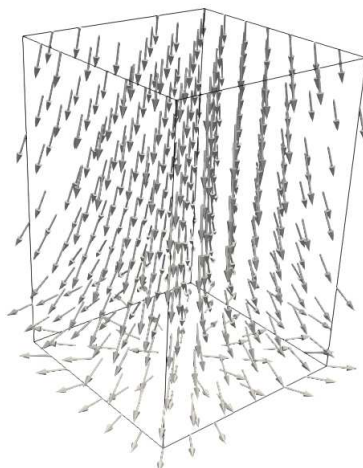
Rozdział 12

Ćwiczenie 3. Kinematyka

12.1. Zadanie 1

Dla danego pola prędkości $\mathbf{u} = ax\hat{\mathbf{i}} + ay\hat{\mathbf{j}} - 2az\hat{\mathbf{k}}$ obliczyć:

1. Dywergencję prędkości.
2. Wirowość prędkości.
3. Znaleźć potencjał.
4. Przyspieszenie.
5. Wyznaczyć linie prądu i powierzchnię prądu.
6. Wyznaczyć tory (trajektorie).
7. Wykazać, że linie prądu są tożsame z torami w tym przypadku.



Rys. 12.1: Pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{u}$ (12.1)

Składowe prędkości wynoszą

$$\begin{aligned}u_x &= ax, \\u_y &= ay, \\u_z &= -2az.\end{aligned}\tag{12.1}$$

i pokazane są na wykresie 12.1. Wektory prędkości są tam znormalizowane, tj. wykreślone jest pole prędkości \mathbf{u}/u .

1. Dywergencja liczona jest według wzoru (10.4)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = a + a - 2a = 0. \quad (12.2)$$

2. Wirowość, czyli rotacja liczona jest według wzoru (10.5)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Czyli pole prędkości jest bezwirowe, a więc istnieje potencjał φ .

3. Potencjał znajdujemy, posługując się metodami z rozdziału 11. Wykorzystujemy pierwsze równanie z układu (11.22), podstawiając za u_x wartość z układu (12.1)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ax. \quad (12.4)$$

Całkując obustronnie względem x , otrzymujemy

$$\varphi(x, y, z) = \frac{ax^2}{2} + f(y, z). \quad (12.5)$$

Następnie wykorzystujemy drugie równanie z układu (11.22) w ten sposób, że składową u_y bierzemy z układu (12.1), a $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ obliczamy na podstawie potencjału (12.5)

$$ay = \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}. \quad (12.6)$$

Z równania (12.6) znajdujemy funkcję f poprzez obustronne całkowanie względem y , co daje

$$f(y, z) = \frac{ay^2}{2} + g(z). \quad (12.7)$$

Wynik wstawiamy do potencjału (12.5)

$$\varphi(x, y, z) = \frac{ax^2}{2} + \frac{ay^2}{2} + g(z). \quad (12.8)$$

Na końcu wykorzystujemy trzeci wzór z układu (11.22) w ten sposób, że składową u_z bierzemy z układu (12.1), a $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ obliczamy na podstawie potencjału (12.8)

$$-2az = g'(z). \quad (12.9)$$

Funkcję g znajdujemy całkując obustronnie równanie (12.9) względem z

$$g(z) = -az^2 + c. \quad (12.10)$$

Otrzymany wynik (12.10) wstawiamy do potencjału (12.8) i otrzymujemy końcową postać szukanego potencjału

$$\varphi(x, y, z) = \frac{ax^2}{2} + \frac{ay^2}{2} - az^2 + c. \quad (12.11)$$

4. Przyspieszenie można wyliczyć ze wzoru (10.19)

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= 0 + a^2x + 0 + 0 = a^2x, \\ \frac{du_y}{dt} &= 0 + 0 + a^2y + 0 = a^2y, \\ \frac{du_z}{dt} &= 0 + 0 + 0 + 4a^2z. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Ostatecznie mamy

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = a^2x\hat{\mathbf{i}} + a^2y\hat{\mathbf{j}} + 4a^2z\hat{\mathbf{k}}. \quad (12.13)$$

5. Rzuty linii prądu wyznacza się z układu równań różniczkowych (2.2)

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (12.14)$$

Rozważmy pierwsze równanie z układu (12.14) w postaci

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}. \quad (12.15)$$

Podstawiamy składowe prędkości z układu (12.1)

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{ay}. \quad (12.16)$$

Ponieważ zmienne są rozdzielone, więc całkujemy obustronnie, opuszczamy logarytmy i otrzymujemy rzut linii prądu na płaszczyznę xy w postaci całki szczególnej

$$\frac{y}{x} = c_1. \quad (12.17)$$

Geometrycznie jest to rodzina linii prostych, przechodzących przez początek układu współrzędnych i pokazana na wykresie 12.2. Rozważmy drugie równanie z układu (12.14) w postaci

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dz}{u_z}. \quad (12.18)$$

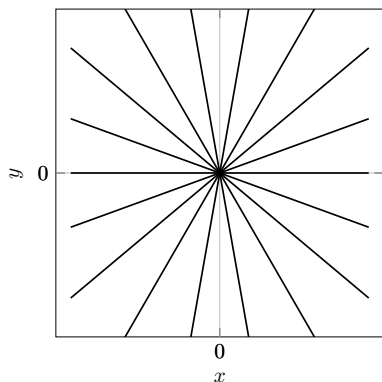
Podstawiamy składowe prędkości z układu (12.1)

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dz}{-2az}. \quad (12.19)$$

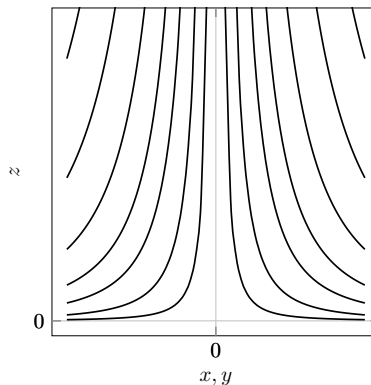
Ponieważ zmienne są znowu rozdzielone, więc całkujemy obustronnie, opuszczamy logarytmy i otrzymujemy rzut linii prądu na płaszczyznę xz w postaci całki szczególnej

$$zx^2 = c_2. \quad (12.20)$$

Geometrycznie są to hiperbole na płaszczyźnie xz .



Rys. 12.2: Rzut linii prądu (12.17) na płaszczyznę xy



Rys. 12.3: Rzuty linii prądu (12.20) i (12.22) na płaszczyznę xz i yz

Ostatnie, trzecie równanie z układu (12.14) w postaci

$$\frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (12.21)$$

daje analogiczny wynik do równania (12.20), gdyż wystarczy za x podstawić y

$$zy^2 = c_3. \quad (12.22)$$

Znowu mamy hiperbole, ale tym razem na płaszczyźnie yz . Układ trzech rzutów (całek ogólnych) wygląda następująco

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= c_1, \\ zx^2 &= c_2, \\ zy^2 &= c_3. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Stałe c_1 , c_2 i c_3 możemy wyznaczyć z warunku, który polega na tym, że mają one przechodzić przez punkt (x_0, y_0, z_0) . Wstawiając ten warunek do układu (12.23), możemy wyznaczyć stałe jako

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_0}{x_0}, \\ c_2 &= z_0 x_0^2, \\ c_3 &= z_0 y_0^2. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Powyższe stałe (12.24) wstawiamy do układu (12.23) i mamy rozwiązania szczególne, przechodzące przez punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{y_0}{x_0}, \\ zx^2 &= z_0 x_0^2, \\ zy^2 &= z_0 y_0^2. \end{aligned} \quad (12.25)$$

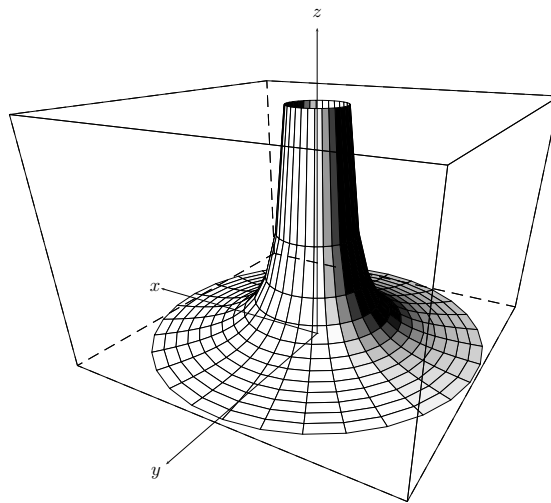
Powierzchnię prądu znajdujemy prowadząc linie prądu (12.25) przez okrąg o równaniu

$$x_0^2 + y_0^2 = r_0^2. \quad (12.26)$$

Jeżeli wstawimy x_0^2 z drugiego równania układu (12.25) i y_0^2 z trzeciego równania układu (12.25) do równania okręgu (12.26), to otrzymamy następujące równanie

$$z = \frac{z_0 r_0^2}{x^2 + y^2} = \frac{c_4}{x^2 + y^2}, \quad (12.27)$$

które geometrycznie jest hiperboloidą obrotową pokazaną na wykresie 12.4.



Rys. 12.4: Powierzchnia prądu (12.27)

6. Tory (trajektorie) wyznaczamy z równania (2.5)

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (12.28)$$

które odpowiada trzem równaniom skalarnym

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt}, \\ u_y &= \frac{dy}{dt}, \\ u_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Pierwsze równanie z układu (12.29), po podstawieniu za u_x wzoru z układu (12.1), wygląda następująco

$$\frac{dx}{dt} = ax. \quad (12.30)$$

Po rozdzieleniu zmiennych, mamy

$$\frac{dx}{x} = a dt. \quad (12.31)$$

Całkując obustronnie i pozbywając się logarytmów, możemy otrzymać następującą całkę ogólną.

$$x = c_{11}e^{at}. \quad (12.32)$$

Analogicznie postępujemy z drugim równaniem układu (12.29) o otrzymujemy

$$y = c_{22}e^{at}. \quad (12.33)$$

Nie inaczej jest z równaniem trzecim układu (12.29)

$$z = c_{33}e^{-2at}. \quad (12.34)$$

Zatem trzy całki ogólne wyglądają następująco

$$\begin{aligned} x &= c_{11}e^{at}, \\ y &= c_{22}e^{at}, \\ z &= c_{33}e^{-2at}. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Całki szczególne znajdujemy z układu (12.35) przy założeniu, że w chwili $t = t_0$ tory przechodzą przez punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} x_0 &= c_{11}e^{at_0}, \\ y_0 &= c_{22}e^{at_0}, \\ z_0 &= c_{33}e^{-2at_0}. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Z układu (12.36) wyznaczamy stałe c_{11} , c_{22} , c_{33} i wstawiamy do układu (12.35), otrzymując całki szczególne

$$\begin{aligned} x &= x_0e^{a(t-t_0)}, \\ y &= y_0e^{a(t-t_0)}, \\ z &= z_0e^{-2a(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (12.37)$$

7. Aby wykazać, że linie prądu (12.25) są tożsame z torami (12.37) w przypadku stacjonarnego pola prędkości (12.1), należy wyrugować t czas z układu (12.37). Dzieląc drugie równanie układu (12.37) przez pierwsze widać natychmiast, że otrzymamy pierwsze równanie układu (12.25)

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0e^{a(t-t_0)}}{x_0e^{a(t-t_0)}} = \frac{y_0}{x_0}. \quad (12.38)$$

Trzecie równanie układu (12.37) możemy zapisać w następującej postaci

$$z = z_0e^{-a(t-t_0)}e^{-a(t-t_0)}. \quad (12.39)$$

Najpierw wykorzystajmy dwukrotnie równanie drugie z układu (12.37)

$$z = z_0 \frac{y_0}{y} \frac{y_0}{y} = \frac{y_0^2}{y^2} \quad (12.40)$$

i otrzymamy równanie trzecie w układzie (12.25). W równaniu (12.39) możemy wykorzystać dwukrotnie równanie pierwsze z układu (12.37)

$$z = z_0 \frac{x_0}{x} \frac{x_0}{x} = \frac{x_0^2}{x^2} \quad (12.41)$$

i otrzymamy równanie drugie w układzie (12.25), co było do okazania.

12.2. Zadanie 2

Dla danego pola prędkości $\mathbf{u} = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} - 4z\hat{k}$ obliczyć:

1. Dywergencję prędkości.
2. Wirowość prędkości.
3. Znaleźć potencjał.
4. Przyspieszenie.
5. Wyznaczyć linie prądu i powierzchnię prądu (bez rysunków).
6. Wyznaczyć tory (bez rysunków).

Rozdział 13

Ćwiczenie 4. Kinematyka

13.1. Zadanie 1

Dla danego pola prędkości $\mathbf{u} = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - x^2 - y^2) \hat{\mathbf{k}}$ obliczyć:

1. Dywergencję prędkości.
2. Wirowość prędkości.
3. Moduł wektora wirowości.
4. Wyznaczyć linie wirowe.
5. Przyspieszenie.
6. Wyznaczyć składowe tensorów $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$, $\nabla \mathbf{u}$, \mathbf{D} , \mathbf{A} .

Składowe prędkości wynoszą

$$\begin{aligned} u_x &= u_y = 0, \\ u_z &= \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - x^2 - y^2) = u_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right). \end{aligned} \quad (13.1)$$

Pole prędkości (13.1) opisuje laminarny przepływ płynu nieściśliwego w rurociągu o przekroju kołowym i promieniu R . Przepływ wymuszony jest różnicą ciśnień Δp na długości L . Współczynnik lepkości dynamicznej oznaczony jest jako μ , a prędkość maksymalna w środku rurociągu przez u_0 . W układzie walcowym r , φ , z składowe prędkości (13.1) mają postać

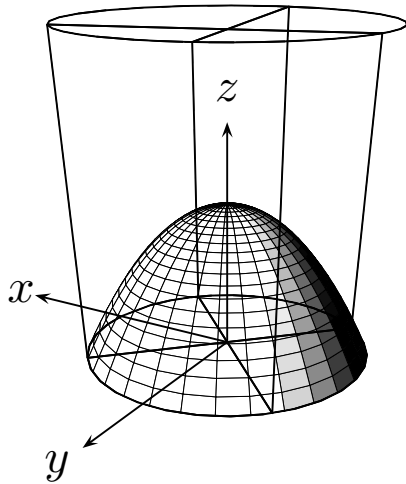
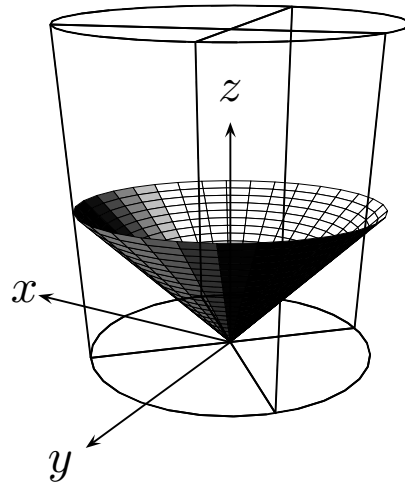
$$\begin{aligned} u_r &= u_\varphi = 0, \\ u_z &= \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Składowa u_z geometrycznie jest paraboloidą obrotową i pokazana jest na wykresie 13.1.

1. Dywergencja liczona jest według wzoru (10.4)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0. \quad (13.3)$$

Czyli pole prędkości (13.1) jest beźródłowe.

Rys. 13.1: Składowa u_z (13.2)Rys. 13.2: Moduł wektora wirowości Ω (13.5)

2. Wirowość, czyli rotacja liczona jest według wzoru (10.5)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= -\frac{2yu_0}{R^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{2xu_0}{R^2} \hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = \Omega. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Czyli pole prędkości jest wirowe albo wektor wirowości (13.4) ma niezerowe składowe Ω_x i Ω_y . Pole to pokazane jest na wykresie 13.4.

3. Moduł wektora wirowości znajdujemy w następujący sposób

$$\Omega = \sqrt{\Omega \cdot \Omega} = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} = \frac{2u_0}{R^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2u_0 r}{R^2}. \quad (13.5)$$

Oznacza to, że w środku rurociągu $r = 0$ moduł wektora wirowości jest zerowy $\Omega = 0$. Ponieważ zależność (13.5) jest liniowa, to moduł wektora wirowości przyjmuje największą wartość $\Omega = 2u_0 R^{-1}$ na ścianie rurociągu $r = R$, co pokazane jest na wykresie 13.2.

4. Linie wirowe wyznaczamy z układu (2.4), pamiętając o tym, że mamy tylko dwie składowe wektora wirowości, a więc jedno równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y}. \quad (13.6)$$

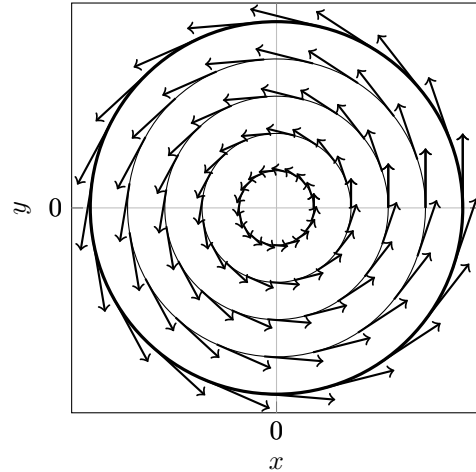
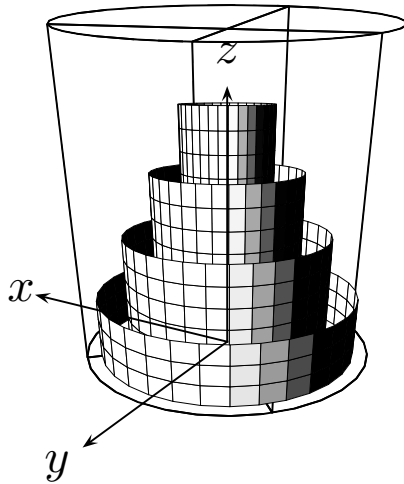
Podstawiając składowe wektora wirowości z równania (13.4), widać, że

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}. \quad (13.7)$$

Rozdzielając zmienne $x dx = -y dy$ i całkując obustronnie, otrzymamy równanie rzutu linii wirowych na płaszczyznę xy w postaci

$$x^2 + y^2 = c, \quad (13.8)$$

które geometrycznie są rodziną okręgów, jak jest to pokazane na wykresie 13.4. Powierzchnie wirowe będą zatem walcami i pokazane są na wykresie 13.3.



Rys. 13.3: Powierzchnie wirowe (12.27)

Rys. 13.4: Pole wirowości Ω (13.4) i linie wirowe (13.8)

5. Przyspieszenie można wyliczyć ze wzoru (10.19)

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= 0, \\ \frac{du_y}{dt} &= 0, \\ \frac{du_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Ostatecznie mamy

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0}. \quad (13.10)$$

6. Składowe tensora nierównomierności pola prędkości $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$ wyznaczamy ze wzoru (2.7)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2xu_0}{R^2} & -\frac{2yu_0}{R^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.11)$$

Składowe gradientu prędkości $\nabla \mathbf{u}$ wyznaczamy ze wzoru (2.6) lub transponując tensor (13.11)

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2xu_0}{R^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2yu_0}{R^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.12)$$

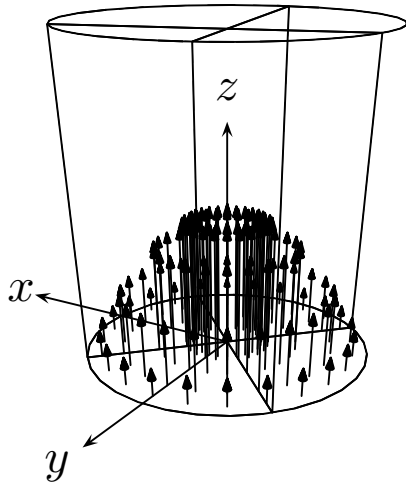
Składowe tensora prędkości deformacji \mathbf{D} wyznaczamy ze wzoru (2.10)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{xu_0}{R^2} \\ 0 & 0 & -\frac{yu_0}{R^2} \\ -\frac{xu_0}{R^2} & -\frac{yu_0}{R^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.13)$$

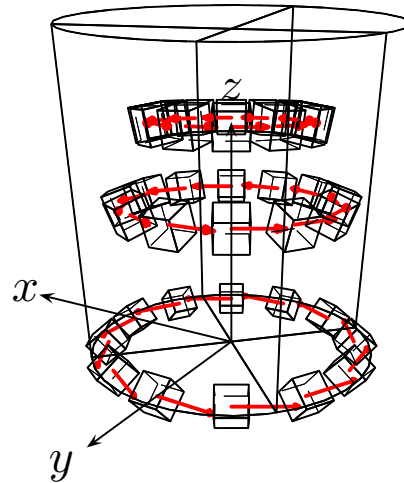
Zgodnie z interpretacją składowych tensora prędkości deformacji widać, że nie występują w tym przepływie deformacje liniowe (objętościowe) – elementy zerowe na diagonalu, natomiast występują niektóre deformacje postaciowe (kątowe) – elementy poza diagonalą. Składowe tensora spinu \mathbf{A} wyznaczamy ze wzoru (2.11)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{xu_0}{R^2} \\ 0 & 0 & \frac{yu_0}{R^2} \\ -\frac{xu_0}{R^2} & -\frac{yu_0}{R^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.14)$$

Zgodnie z interpretacją składowych tensora spinu (2.12) widać, że występują składowe ω_x i ω_y prędkości obrotowej.



Rys. 13.5: Pole wektorowe prędkości \mathbf{u} (13.2)



Rys. 13.6: Rotacja elementów płynu (bez deformacji)

W celu wyobrażenia sobie ruchu płynu, opisanego polem prędkości (13.1) lub (13.2), należy zdać sobie sprawę przynajmniej z dwóch rzeczy. Po pierwsze, elementy płynu, które znajdują się bliżej ściany rurociągu, będą poruszać się wolniej od elementów płynu znajdujących się bliżej osi rurociągu, co wynika z pola prędkości \mathbf{u} . Pole to na płaszczyźnie xy pokazane jest na rysunku 13.5. Po drugie, elementy płynu obracają się wokół wektorów wirowości $\boldsymbol{\Omega}$, które są zobrazowane na wykresie 13.4. Zgodnie ze wzorem (13.5) na moduł wektora wirowości Ω lub wykresem 13.4 widać, że elementy płynu tym szybciej obracają się wokół wektorów wirowości, im bliżej znajdują się ścianki. W samej osi rurociągu elementy nie obracają się, gdyż wektor wirowości i jego moduł są tam zerowe. Schematycznie pokazane jest to

na rysunku 13.6. Trzecia sprawa, pominięta tutaj ze względu na przejrzystość rysunku 13.6, to dodatkowa deformacja postaciowa (kątowna) elementów płynu zgodnie ze składowymi tensora prędkości deformacji \mathbf{D} (13.13).

Rozdział 14

Ćwiczenie 5. Kinematyka

14.1. Zadanie 1

Dla danego pola prędkości $\mathbf{u} = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - x^2 - y^2) \hat{\mathbf{k}}$ obliczyć:

1. Objętościowe natężenie przepływu.
2. Prędkość średnią.
3. Prędkość maksymalną.

Składowe prędkości wynoszą

$$\begin{aligned} u_x &= u_y = 0, \\ u_z &= \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (14.1)$$

Pole prędkości \mathbf{u} jest identyczne jak w zadaniu w rozdziale 13, gdzie wyjaśnione zostało znaczenie poszczególnych symboli.

1. Objętościowe natężenie przepływu \dot{V} oblicza się z następującego wzoru

$$\dot{V} = \iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (14.2)$$

gdzie S jest powierzchnią, przez którą obliczamy objętościowe natężenie przepływu, a $\hat{\mathbf{n}}$ wektorem normalnym do tej powierzchni. W przypadku rurociągu z poprzedniego zadania powierzchnia S jest kołem, które leży na płaszczyźnie xy i wektor normalny do powierzchni S jest wektorem $\hat{\mathbf{k}}$. Zatem całka powierzchniowa (14.2) redukuje się do całki podwójnej po obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Łatwiej będzie całkować we współrzędnych biegunowych po obszarze $\Delta = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Iloczyn skalarny $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ obliczamy następująco

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = u_z, \quad (14.3)$$

a objętościowe natężenie przepływu (14.2)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \iint_S u_z \, dS = \frac{\Delta p}{4\mu L} \iint_D (R^2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \\ &= \frac{\Delta p}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr \, d\varphi = \frac{\Delta p}{4\mu L} \varphi \Big|_0^{2\pi} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}.\end{aligned}\quad (14.4)$$

2. Prędkość średnia \bar{u} definiowana jest w następujący sposób

$$\bar{u} = \frac{1}{S} \iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS.\quad (14.5)$$

Porównując wzory (14.4) i (14.5), widać prostą zależność pomiędzy prędkością średnią i objętościowym natężeniem przepływu

$$\dot{V} = \bar{u} S.\quad (14.6)$$

Zatem prędkość średnią otrzymać można z objętościowego natężenia przepływu (14.4), dzieląc je przez pole powierzchni koła $S = \pi R^2$, co da

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L}.\quad (14.7)$$

3. Prędkość maksymalna u_0 możliwa jest do wyznaczenia ze wzoru (14.1) dla $r = 0$ (środek rurociągu)

$$u_0 = u_z(0) = \frac{R^2 \Delta p}{4\mu L}.\quad (14.8)$$

Porównując prędkość średnią (14.7) i maksymalną (14.8) dla przepływu laminarnego w rurociągu o przekroju kołowym, otrzymujemy

$$u_0 = 2\bar{u}.\quad (14.9)$$

14.2. Zadanie 2

Dla danego pola prędkości $\mathbf{u} = u_0 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right)^n \hat{\mathbf{k}}$ obliczyć:

1. Objętościowe natężenie przepływu.
2. Prędkość średnią.

Składowe prędkości wynoszą

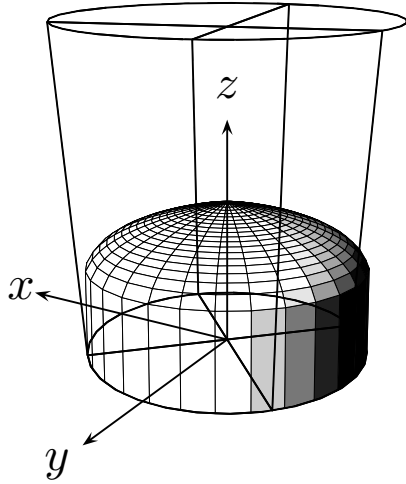
$$\begin{aligned}u_x &= u_y = 0, \\ u_z &= u_0 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right)^n.\end{aligned}\quad (14.10)$$

Pole prędkości \mathbf{u} ma empiryczny charakter i opisuje przybliżony rozkład turbulentny prędkości w zależności od liczby Reynoldsa. Np. dla $\text{Re} = 4 \cdot 10^3$ mamy $n = \frac{1}{6}$, dla

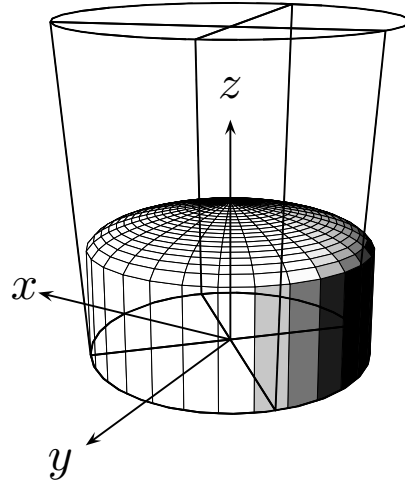
Re = 10^5 mamy $n = \frac{1}{7}$, dla Re = $43 \cdot 10^6$ mamy $n = \frac{1}{10}$. W układzie walcowym r, φ, z składowe prędkości (14.10) mają prostszą postać

$$\begin{aligned} u_r &= u_\varphi = 0, \\ u_z &= u_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Na rysunkach 14.1 i 14.2 pokazane są rozkłady składowej u_z według wzoru (14.11) dla różnych wykładników n .



Rys. 14.1: Składowa u_z (14.11) dla $n = \frac{1}{6}$



Rys. 14.2: Składowa u_z (14.11) dla $n = \frac{1}{10}$

1. Objętościowe natężenie przepływu można wyliczyć ze wzoru analogicznego do (14.4)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \iint_S u_z \, dS = u_0 \iint_D \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right)^n \, dx \, dy = \\ &= u_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n r \, dr \, d\varphi = u_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n r \, dr. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Całkę (14.12) obliczymy przez podstawienie $1 - r/R = x$ i zamianę granic. Jeżeli $r = 0$, to $x = 1$ i jeżeli $r = R$, to $x = 0$. Po przekształceniu otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{V} &= u_0 2\pi R^2 \int_0^1 x^n (1-x) \, dx = u_0 2\pi R^2 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= u_0 2\pi R^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{u_0 2\pi R^2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

2. Prędkość średnią obliczamy na podstawie wzorów (14.6) i (14.13), gdzie $S = \pi R^2$

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{2u_0}{(n+1)(n+2)}. \quad (14.14)$$

14.3. Zadanie 3

Dla danego tensora nierównomierności pola prędkości (14.15) wyznaczyć tensor prędkości deformacji \mathbf{D} , tensor spinu \mathbf{A} i narysować element płynu przed i po deformacji.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.15)$$

Dwuwymiarowa postać tensora nierównomierności pola prędkości $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$, na podstawie definicji (2.7), ma następującą postać

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (14.16)$$

Podobnie można napisać dwuwymiarową wersję tensora prędkości deformacji \mathbf{D} . Posługując się definicją (2.10), otrzymujemy

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (14.17)$$

Dwuwymiarowa postać tensora spinu \mathbf{A} , na podstawie definicji (2.11), przyjmuje następującą postać

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.18)$$

Na podstawie rozkładu (2.9) wiemy, że tensor nierównomierności pola prędkości dekomponuje się w następujący sposób

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{D} + \mathbf{A}. \quad (14.19)$$

Ponieważ tensor spinu \mathbf{A} według definicji (14.18) ma na diagonalu zera, więc na diagonalu tensora prędkości deformacji \mathbf{D} muszą znajdować się składowe tensora nierównomierności pola prędkości $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$. Składowe tensora prędkości deformacji w pierwszym wierszu i drugiej kolumnie wyznaczamy na podstawie definicji (14.17), gdzie poszczególne pochodne odczytujemy z definicji (14.16) i tensora, który jest treścią zadania (14.15)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (2 - 2) = 0. \quad (14.20)$$

Składowej w drugim wierszu i pierwszej kolumnie nie trzeba liczyć, gdyż tenor \mathbf{D} jest symetryczny. Składowa tensora spinu w pierwszym wierszu i drugiej kolumnie wyznaczamy na podstawie definicji (14.18), gdzie poszczególne pochodne odczytujemy z definicji (14.16) i tensora, który jest treścią zadania (14.15)

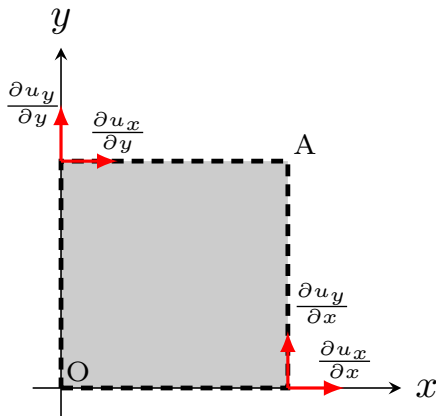
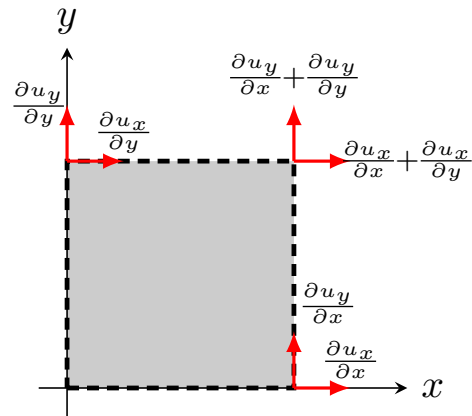
$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (2 + 2) = 2. \quad (14.21)$$

Składowej w drugim wierszu i pierwszej kolumnie nie trzeba liczyć, gdyż tenor \mathbf{A} jest antysymetryczny. Wystarczy zmienić znak liczby, który wynika z równania (14.21). W ten sposób wyznaczone zostały poszczególne składowe tensorów

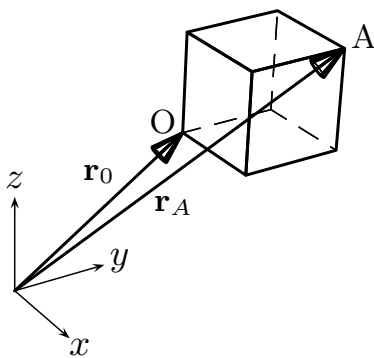
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.22)$$

Wynik łatwo sprawdzić, dodając do siebie poszczególne składowe tensorów \mathbf{D} i \mathbf{A} , które w rezultacie powinny dać składowe tensora $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$.

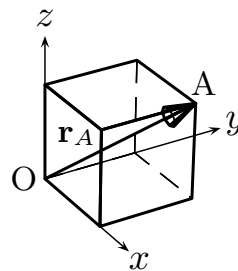
Do narysowania elementu płynu po deformacji potrzebny jest rysunek 14.3, gdzie pokazane są poszczególne cztery składowe tensora nierównomierności pola prędkości (14.16). Pochodne w prawym górnym rogu elementu płynu są sumą poszczególnych pochodnych i pokazane są na rysunku 14.4.

Rys. 14.3: Składowe tensora $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$ Rys. 14.4: Składowe tensora $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$

Rysunki 14.3 i 14.4 są szczególnymi przypadkami rysunku 2.1, który przedstawia dowolny element płynu. Jeżeli dowolny element płynu ma formę sześciangu, to taka sytuacja przedstawiona jest na rysunku 14.5. Jeżeli dodatkowo założymy, że nie ma składowej prędkości \mathbf{u}_0 ruchu postępowego, to mamy sytuację na rysunku 14.6. Jeżeli element płynu jest dwuwymiarowy, to otrzymamy rysunek 14.3 lub 14.4.

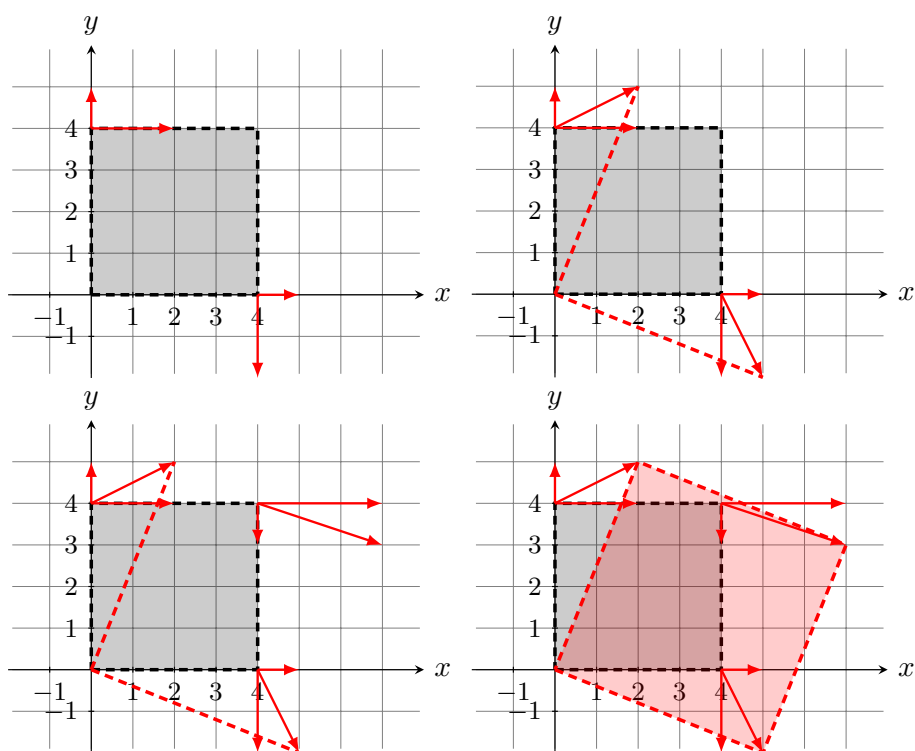


Rys. 14.5: Element płynu



Rys. 14.6: Element płynu

Schemat postępowania pokazany jest na rysunkach 14.7. Można podzielić go na kilka etapów. Najpierw rysujemy nieodkształcony element o dowolnych wymiarach (np. 4 na 4). Następnym krokiem, pokazanym na pierwszym rysunku 14.7, jest naniesienie odpowiednich składowym tensora $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$ według definicji (14.16) i treści zadania (14.15). Na podstawie pierwszego rysunku 14.7 wyznaczamy wypadkowe i łączymy początek układu współrzędnych z wypadkowymi, co pokazane jest na drugim rysunku 14.7 za pomocą czerwonej, przerywanej linii. Następnie przenosimy strzałki z lewego górnego i prawego dolnego rogu, sumując je, zgodnie z rysunkiem 14.4 i wyznaczamy wypadkową, co pokazane jest na trzecim rysunku 14.7. Ostatnim etapem jest połączenie wypadkowej z liniami przerywanymi z poprzedniego etapu, co pokazane jest na czwartym rysunku 14.7.



Rys. 14.7: Kolejne etapy postępowania

14.4. Zadanie 4

Dla danego tensora nierównomierności pola prędkości (14.23) wyznaczyć tensor prędkości deformacji \mathbf{D} , tensor spinu \mathbf{A} i narysować element płynu przed i po deformacji.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.23)$$

Graficzna odpowiedź pokazana jest na rysunku 14.8.

14.5. Zadanie 5

Dla danego tensora nierównomierności pola prędkości (14.24) wyznaczyć tensor prędkości deformacji \mathbf{D} , tensor spinu \mathbf{A} i narysować element płynu przed i po deformacji.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.24)$$

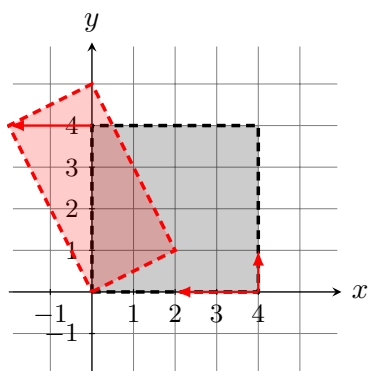
Graficzna odpowiedź pokazana jest na rysunku 14.9.

14.6. Zadanie 6

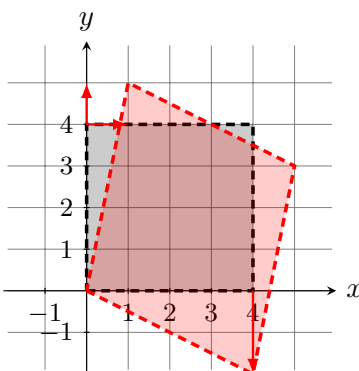
Dla danego tensora nierównomierności pola prędkości (14.25) wyznaczyć tensor prędkości deformacji \mathbf{D} , tensor spinu \mathbf{A} i narysować element płynu przed i po deformacji.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.25)$$

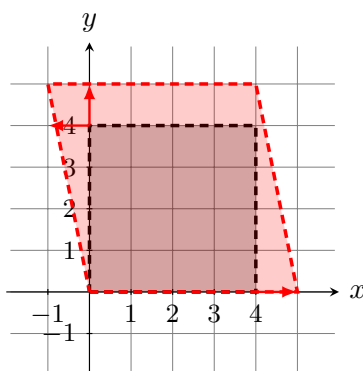
Graficzna odpowiedź pokazana jest na rysunku 14.10.



Rys. 14.8: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$ (14.23)



Rys. 14.9: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$ (14.24)



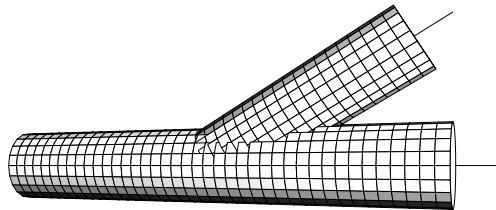
Rys. 14.10: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$ (14.25)

Rozdział 15

Ćwiczenie 6. Reakcje

15.1. Zadanie 1

Obliczyć oddziaływanie płynu na rurowiąg z rysunku 15.1. Kąt między osią x a odgałęzieniem rurowiągu wynosi α . Wlot do rurowiągu (\mathbf{u}_1) jest z lewej strony.

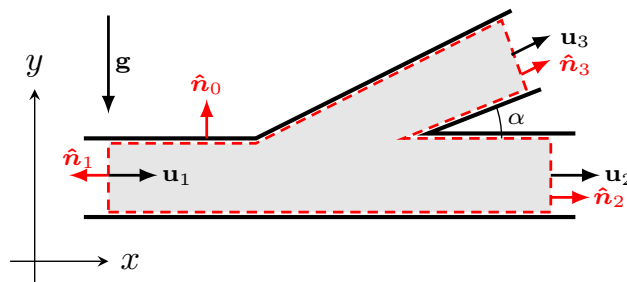


Rys. 15.1: Rurowiąg

Do rozwiązania zadania potrzebna będzie całkowa postać równania zachowania pędu (3.9), która przy założeniu stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ uprasza się do następującej postaci

$$\iint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV + \iint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n \, dS. \quad (15.1)$$

Dodatkowo zakładamy, że siły masowe sprowadzają się wyłącznie do grawitacji $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ i wykorzystujemy zależność Cauchy'ego (3.6). Przekrój rurowiągu pokazany jest na rysunku 15.2 z zaznaczonymi prędkościami, wektorem grawitacji i wersorami normalnymi, które muszą być skierowane na zewnątrz!



Rys. 15.2: Przekrój rurowiągu

We wzorze (15.1) przez V oznaczono objętość kontrolną rurociągu, zaznaczoną czerwoną przerywaną linią na rysunku 15.2. Jest to ta część rurociągu, na którą liczone jest oddziaływanie płynu. Przez ∂V^+ oznaczono zamkniętą i dodatnio zorientowaną (na zewnątrz) powierzchnię, która jest brzegiem objętości V . Powierzchnia ∂V^+ składa się z powierzchni wlotowej (koło) S_1 , dwóch powierzchni wylotowych (kół) S_2 i S_3 oraz pobocznic rurociągu S_0 . Na rysunku 15.2 przez \mathbf{u}_1 oznaczono wektor prędkości na wlocie. Prędkości wylotowe to \mathbf{u}_2 i \mathbf{u}_3 , gdzie kąt między tymi wektorami, lub kąt między rurami wylotowymi, wynosi α .

Pierwszą całkę we wzorze (15.1) rozkładamy na sumę całek po poszczególnych powierzchniach

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V^+} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \iint_{S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{S_0} \rho_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 \, dS + \\ &\iint_{S_1} \rho_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS + \iint_{S_2} \rho_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, dS + \iint_{S_3} \rho_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 \, dS. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Oczywiście poszczególne całki nie są całkami po powierzchni zamkniętej. Całka po pobocznic S_0 jest zerowa, gdyż albo prędkość na ścianie równa jest zero, albo prędkość \mathbf{u}_0 jest prostopadła do wektora normalnego $\hat{\mathbf{n}}_0$, a więc ich iloczyn skalarny $\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}_0$ jest zerowy, co zapisujemy

$$\iint_{S_0} \rho_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 \, dS = \mathbf{0}. \quad (15.3)$$

Całka (15.3) jest wektorem, więc wynik równy jest wektorowi zerowemu. Całkę po powierzchni wlotowej S_1 liczymy w następujący sposób

$$\iint_{S_1} \rho_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS = - \iint_{S_1} \rho_1 \mathbf{u}_1 u_{1n} \, dS = -\bar{\mathbf{u}}_1 \iint_{S_1} \rho_1 u_{1n} \, dS = -\dot{m}_1 \bar{\mathbf{u}}_1. \quad (15.4)$$

Iloczyn skalarny $\mathbf{u}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1$ jest rzutem wektora \mathbf{u}_1 na kierunek wektora $\hat{\mathbf{n}}_1$ ze znakiem ujemnym, tj. $\mathbf{u}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = -u_{1n}$, gdyż wektor \mathbf{u}_1 i wektor $\hat{\mathbf{n}}_1$ są skierowane przeciwnie, a więc ich kąt jest większy niż 90° . Ponieważ wektor prędkości \mathbf{u}_1 nie jest stały, więc nie można go zapisać przed całką (15.4) bezpośrednio. Można natomiast zdefiniować jego wartość średnią w następujący sposób

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\iint_S \rho \mathbf{u} u_n \, dS}{\iint_S \rho u_n \, dS} = \frac{\iint_S \rho \mathbf{u} u_n \, dS}{\dot{m}}, \quad (15.5)$$

gdzie mianownik definicji (15.5) jest masowym natężeniem przepływu, które definiuje się jako

$$\dot{m} = \iint_S \rho u_n \, dS. \quad (15.6)$$

Zatem wykorzystanie definicji (15.5) i (15.6) daje ostatecznie wartość całki (15.4). Analogicznie wyliczyć można całki (15.2) po powierzchniach wylotowych S_2 i S_3 . Pamiętać należy o tym, że w tych przypadkach wyniki będą z przeciwnym znakiem

do całki (15.4), gdyż tym razem wektory prędkości i wersory skierowane są tak samo, tj. $\mathbf{u}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = u_{2n}$ i $\mathbf{u}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = u_{3n}$. Ostatecznie można zapisać, że

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \rho_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS &= \dot{m}_2 \bar{\mathbf{u}}_2, \\ \iint_{S_3} \rho_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 dS &= \dot{m}_3 \bar{\mathbf{u}}_3. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Druga całka w równaniu (15.1) jest ciężarem płynu znajdującego się w rozważanej części rurociągu i zapisywana jest jako

$$\iiint_V \rho \mathbf{g} dV = \mathbf{g} \iiint_V \rho dV = M \mathbf{g}, \quad (15.8)$$

gdzie M oznacza masę płynu w rozważanej objętości kontrolnej rurociągu. Oczywiście wektor grawitacji można zapisać przed całką (15.8), gdyż jego wartość nie zmieni się w objętości kontrolnej V .

Trzecią całkę w równaniu (15.1) zapisujemy podobnie jak pierwszą, zastępując ją sumą całek po poszczególnych powierzchniach

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{\sigma}_n dS &= \oiint_{S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3} \boldsymbol{\sigma}_n dS = \\ &= \iint_{S_0} \boldsymbol{\sigma}_{n0} dS + \iint_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_{n1} dS + \iint_{S_2} \boldsymbol{\sigma}_{n2} dS + \iint_{S_3} \boldsymbol{\sigma}_{n3} dS. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Całkę po poboczniczy S_0 definiuje się jako oddziaływanie rurociągu na płyn (nie płynu na rurociąg) i oznacza się jako \mathbf{R}_0

$$\mathbf{R}_0 = \iint_{S_0} \boldsymbol{\sigma}_{n0} dS. \quad (15.10)$$

W całce po powierzchni wlotowej S_1 wykorzystuje się dekompozycję wektora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_n$ na składową normalną $\boldsymbol{\sigma}_{nn}$ i styczną $\boldsymbol{\sigma}_{nt}$. Składowa styczna na powierzchniach wlotowych i wylotowych jest pomijalna w porównaniu ze składową normalną. Składowa wektora naprężenia normalna do powierzchni rozkładana jest na jego moduł σ_{nn1} i wersor $\hat{\mathbf{n}}_1$ ze znakiem przeciwnym. Znak minus bierze się stąd, że naprężenie normalne działa na rozważaną powierzchnię, a wersor normalny do powierzchni jest skierowany przeciwnie do wektora naprężenia normalnego. Samo naprężenie normalne (moduł składowej normalnej wektora naprężenia) jest ciśnieniem, co zapisuje się w następujący sposób

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_{n1} dS &= \iint_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_{nn1} dS + \iint_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_{nt1} dS \approx \\ &= \iint_{S_1} \boldsymbol{\sigma}_{nn1} dS = - \iint_{S_1} \hat{\mathbf{n}}_1 \sigma_{nn1} dS = - \hat{\mathbf{n}}_1 \iint_{S_1} p_1 dS = - \hat{\mathbf{n}}_1 \bar{p}_1 S_1. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Ponieważ rozkład ciśnienia na powierzchni S_1 nie musi być stały, więc nie można ciśnienia p_1 zapisać przed całką. Z tego powodu definiuje się średnie ciśnienie jako

$$\bar{p} = \frac{\iint_S p dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_S p dS}{S}. \quad (15.12)$$

Wersor normalny $\hat{\mathbf{n}}_1$ można zapisać przed całką, gdyż jego wartość i kierunek nie zmienia się na powierzchni wlotowej i wylotowych. Pozostałe całki po powierzchniach wylotowych S_2 i S_3 liczy się dokładnie tak samo, jak całkę po powierzchni wlotowej S_1 i otrzymuje się analogiczne wyniki

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \boldsymbol{\sigma}_{n_2} dS &= -\hat{\mathbf{n}}_2 \bar{p}_2 S_2, \\ \iint_{S_3} \boldsymbol{\sigma}_{n_3} dS &= -\hat{\mathbf{n}}_3 \bar{p}_3 S_3.\end{aligned}\quad (15.13)$$

Po wykorzystaniu przekształconych całek (15.3), (15.4), (15.7), (15.8), (15.10), (15.11), (15.13) i wstawieniu ich do równania (15.1), otrzymamy

$$-\dot{m}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \dot{m}_2 \bar{\mathbf{u}}_2 + \dot{m}_3 \bar{\mathbf{u}}_3 = M \mathbf{g} + \mathbf{R}_0 - \hat{\mathbf{n}}_1 \bar{p}_1 S_1 - \hat{\mathbf{n}}_2 \bar{p}_2 S_2 - \hat{\mathbf{n}}_3 \bar{p}_3 S_3. \quad (15.14)$$

Kolejnym krokiem jest rozkład poszczególnych wektorów w równaniu (15.14) na składowe, które są zgodne z układem współrzędnych z rysunku 15.2, co robi się w następujący sposób

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_1 &= \bar{u}_1 \hat{\mathbf{i}}, \\ \bar{\mathbf{u}}_2 &= \bar{u}_2 \hat{\mathbf{i}}, \\ \bar{\mathbf{u}}_3 &= \hat{\mathbf{i}} \bar{u}_3 \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \bar{u}_3 \sin \alpha, \\ \hat{\mathbf{n}}_1 &= -\hat{\mathbf{i}}, \\ \hat{\mathbf{n}}_2 &= \hat{\mathbf{i}}, \\ \hat{\mathbf{n}}_3 &= \hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha, \\ \mathbf{R}_0 &= R_{0x} \hat{\mathbf{i}} + R_{0y} \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{g} &= -g \hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}\quad (15.15)$$

Podstawiając rozkłady (15.15) do równania (15.14), otrzymamy następujące równanie wektorowe

$$\begin{aligned}-\dot{m}_1 \bar{u}_1 \hat{\mathbf{i}} + \dot{m}_2 \bar{u}_2 \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{i}} \dot{m}_3 \bar{u}_3 \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \dot{m}_3 \bar{u}_3 \sin \alpha = \\ -Mg \hat{\mathbf{j}} + R_{0x} \hat{\mathbf{i}} + R_{0y} \hat{\mathbf{j}} + \bar{p}_1 S_1 \hat{\mathbf{i}} - \bar{p}_2 S_2 \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{i}} \bar{p}_3 S_3 \cos \alpha - \hat{\mathbf{j}} \bar{p}_3 S_3 \sin \alpha,\end{aligned}\quad (15.16)$$

które można zastąpić dwoma równaniami skalarnymi

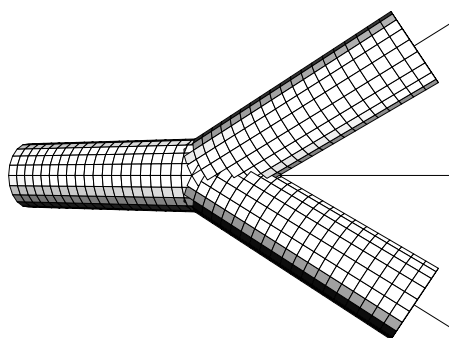
$$\begin{aligned}-\dot{m}_1 \bar{u}_1 + \dot{m}_2 \bar{u}_2 + \dot{m}_3 \bar{u}_3 \cos \alpha &= R_{0x} + \bar{p}_1 S_1 - \bar{p}_2 S_2 - \bar{p}_3 S_3 \cos \alpha, \\ \dot{m}_3 \bar{u}_3 \sin \alpha &= -Mg + R_{0y} - \bar{p}_3 S_3 \sin \alpha.\end{aligned}\quad (15.17)$$

Z układu równań (15.17) wyznaczamy składowe oddziaływania rurociągu na płyn R_{0x} , R_{0y} i zamieniamy ich znaki na przeciwne, aby otrzymać składowe oddziaływania płynu na rurociąg w postaci

$$\begin{aligned}R_x = -R_{0x} &= \dot{m}_1 \bar{u}_1 - \dot{m}_2 \bar{u}_2 - \dot{m}_3 \bar{u}_3 \cos \alpha + \bar{p}_1 S_1 - \bar{p}_2 S_2 - \bar{p}_3 S_3 \cos \alpha, \\ R_y = -R_{0y} &= -\dot{m}_3 \bar{u}_3 \sin \alpha - Mg - \bar{p}_3 S_3 \sin \alpha.\end{aligned}\quad (15.18)$$

15.2. Zadanie 2

Obliczyć oddziaływanie płynu na rurociąg z rysunku 15.3. Kąt między osią x a wylotem (\mathbf{u}_3) górnym wynosi α , a kąt między osią x a wylotem (\mathbf{u}_2) dolnym β . Wlot (\mathbf{u}_1) do rurociągu znajduje się z lewej strony. Układ współrzędnych należy przyjąć tak, jak w zadaniu pierwszym.



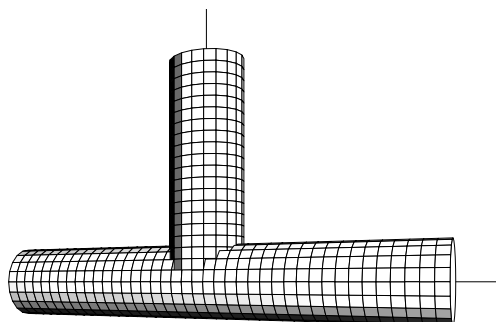
Rys. 15.3: Rurociąg

Odpowiedź

$$\begin{aligned} R_x &= \dot{m}_1 \bar{u}_1 - \dot{m}_2 \bar{u}_2 \cos \beta - \dot{m}_3 \bar{u}_3 \cos \alpha + \bar{p}_1 S_1 - \bar{p}_2 S_2 \cos \beta - \bar{p}_3 S_3 \cos \alpha, \\ R_y &= \dot{m}_2 \bar{u}_2 \sin \beta - \dot{m}_3 \bar{u}_3 \sin \alpha - Mg + \bar{p}_2 S_2 \sin \beta - \bar{p}_3 S_3 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (15.19)$$

15.3. Zadanie 3

Obliczyć oddziaływanie płynu na rurociąg z rysunku 15.4. Rurociąg odgałęzia się pod kątem prostym. Wlot (\mathbf{u}_1) do rurociągu znajduje się z lewej strony, po prawej (\mathbf{u}_2) i u góry (\mathbf{u}_3) znajdują się wyloty. Układ współrzędnych należy przyjąć tak, jak w zadaniu pierwszym.



Rys. 15.4: Rurociąg

Odpowiedź

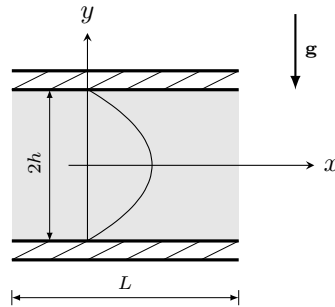
$$\begin{aligned} R_x &= \dot{m}_1 \bar{u}_1 - \dot{m}_2 \bar{u}_2 + \bar{p}_1 S_1 - \bar{p}_2 S_2, \\ R_y &= -\dot{m}_3 \bar{u}_3 - Mg - \bar{p}_3 S_3. \end{aligned} \quad (15.20)$$

Rozdział 16

Ćwiczenie 7. Równanie N-S

16.1. Zadanie 1

Wyznaczyć rozkład prędkości przepływu laminarnego pomiędzy dwiema płaskimi płytkami, przedstawionymi na rysunku 16.1. Płytki znajdują się od siebie w odległości $2h$. Płytki są nieskończenie długie wzdłuż osi x i nieskończenie szerokie wzdłuż osi z . Przepływ wymuszony jest różnicą ciśnień Δp na długości L . Początek układu współrzędnych znajduje się w połowie wysokości pomiędzy płytkami. Przepływ płynu nieściśliwego jest stacjonarny i gęstość rozkładu sił masowych $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.



Rys. 16.1: Płaskie płytki

Do rozwiązania zadania wykorzystujemy domknięty układ równań (6.5), który po rozpisaniu składa się z czterech równań skalarnych w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \tag{16.1}$$

Jest to układ czterech równań różniczkowych cząstkowych. Równania Naviera-Stokesa są dodatkowo równaniami nieliniowymi drugiego rzędu. Przepływ z rysunku 16.1 jest co najwyżej dwuwymiarowy (płaski), co wiąże się z tym, że prędkość $u_z = 0$ i brak jest jakichkolwiek zmian w kierunku osi z , co oznacza $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Ostatnie założenie wynika z treści zadania, gdyż przepływ jest nieskończenie szeroki wzdłuż osi z . Dodatkowo przy założeniu stacjonarności $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ układ równań (16.1) upraszcza się do następującej postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0, \\ \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \\ \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (16.2)$$

Układ równań (16.2) jest prostszy niż układ (16.1), ale nadal mamy do czynienia z równaniami nieliniowymi. Ostatnie założenie, wynikające z treści zadania, polega na tym, że pole prędkości nie zmienia się wzdłuż osi y , gdyż płytki są nieskończenie długie, a więc mamy do czynienia tylko z jedną składową prędkości u_x , a druga składowa $u_y = 0$. Zatem układ (16.2) przyjmuje jeszcze prostszą postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0, \\ \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \\ 0 &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Z pierwszego równania w powyższym układzie wynika, że prędkość u_x nie może być zmienną x , a więc i druga pochodna u_x względem x również jest zerowa, co prowadzi do kolejnej, prostszej postaci układu równań

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2}, \\ 0 &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Pochodna cząstkowa prędkości u_x przechodzi w pochodną zwyczajną, gdyż u_x zależy tylko od jednej zmiennej y . Z drugiego równania układu (16.4) można wyznaczyć rozkład ciśnienia wzdłuż osi y . W tym zadaniu wyznaczać będziemy tylko rozkład prędkości u_x , a więc interesuje nas tylko równanie pierwsze układu (16.4)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2}. \quad (16.5)$$

Zauważmy, że w równaniu (16.5) mamy do czynienia z pochodnymi dwóch różnych funkcji. Po lewej stronie znajduje się pochodna ciśnienia p względem x , a po prawej

druga pochodna prędkości u_x względem y . Jest to tylko możliwe, gdy obie pochodne równe są stałej wartości, co można zapisać jako

$$\begin{aligned}\mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} &= \text{const}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \text{const}.\end{aligned}\tag{16.6}$$

Z drugiego równania układu (16.6) można wywnioskować, że skoro pochodna ciśnienia względem x jest stała, to ciśnienie jest funkcją liniową. Skoro mamy do czynienia z funkcją liniową, to jej stałą pochodną możemy zastąpić przyrostem, a dokładnie spadkiem ciśnienia Δp na długości L . Ponieważ mówimy o spadku, więc pochodna ma znak ujemny. Zatem układ (16.6) przyjmuje postać

$$\mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{L}.\tag{16.7}$$

Dzieląc obustronnie zależność (16.7) przez współczynnik lepkości μ i całkując obustronnie względem y , otrzymamy

$$\frac{du_x}{dy} = c_1 - \frac{\Delta p}{\mu L} y.\tag{16.8}$$

Prędkość u_x z równania (16.8) wyznaczmy przez ponowne obustronne całkowanie względem y , co daje

$$u_x(y) = c_2 + c_1 y - \frac{\Delta p}{2\mu L} y^2.\tag{16.9}$$

Rozkład prędkości (16.9) jest całką ogólną, zależną od dwóch stałych całkowania c_1 i c_2 , które wyznaczamy z warunków brzegowych. Warunki te wymagają, aby prędkość na płytkach zerowała się, co zapisujemy jako $u_x(h) = u_x(-h) = 0$. Po wstawieniu obu warunków do równania (16.9) otrzymamy układ następujących równań

$$\begin{aligned}c_2 - c_1 h - \frac{\Delta p}{2\mu L} h^2 &= 0, \\ c_2 + c_1 h - \frac{\Delta p}{2\mu L} h^2 &= 0,\end{aligned}\tag{16.10}$$

które pozwalają na wyznaczenie stałych c_1 i c_2 w postaci

$$\begin{aligned}c_1 &= 0, \\ c_2 &= \frac{h^2 \Delta p}{2\mu L}.\end{aligned}\tag{16.11}$$

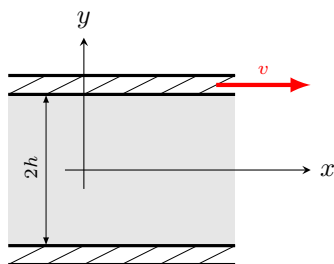
Wstawiając wyznaczone stałe (16.11) do całki ogólnej (16.9), otrzymujemy całkę szczególną, która jest rozwiązaniem zadania i przedstawia rozkład (pole) prędkości przepływu między płaskimi płytkami.

$$u_x(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} (h^2 - y^2).\tag{16.12}$$

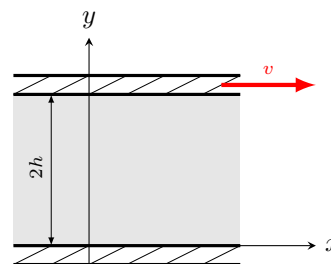
Rozwiązanie (16.12) geometrycznie jest parabolą, która pokazana jest na rysunku 16.1. Poprawność wyniku łatwo sprawdzić chociażby w ten sposób, że spełnia warunku brzegowe.

16.2. Zadanie 2

Wyznaczyć rozkład prędkości przepływu laminarnego pomiędzy dwiema płaskimi płytkami przedstawionymi na rysunkach 16.2 i 16.3. Przepływ wymuszony jest wyłącznie ruchem górnej płytki wzdłuż osi x z prędkością v . Reszta założeń jest identyczna jak w zadaniu pierwszym. Brak jest jedynie gradientu ciśnienia. Rysunki 16.2 i 16.3 różnią się jedynie przyjętymi układami współrzędnych.



Rys. 16.2: Płaskie płytki



Rys. 16.3: Płaskie płytki

Rozumowanie jest identyczne, jak miało to miejsce w zadaniu pierwszym. Zamiast równania (16.5) otrzymujemy jeszcze prostszą jego postać, gdyż brak jest gradientu ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

$$\mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = 0. \quad (16.13)$$

Rozwiązaniem (całąką ogólną) równania (16.13) jest funkcja liniowa w postaci

$$u_x(y) = c_1 y + c_2, \quad (16.14)$$

gdzie c_1 i c_2 są stałymi całkowania, które wyznaczamy z warunków brzegowych. Warunki te mają różną postać w zależności od przyjętego układu współrzędnych. Dla układu z rysunku 16.2 warunki brzegowe przyjmujemy identycznie jak w zagadnieniu pierwszym $u_x(h) = u_x(-h) = 0$. Otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} -c_1 h + c_2 &= 0, \\ c_1 h + c_2 &= v, \end{aligned} \quad (16.15)$$

którego rozwiązaniami są

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{v}{2h}, \\ c_2 &= \frac{v}{2}. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Wstawiając stałe (16.16) do całki szczególnej (16.14), otrzymamy ostatecznie wzór na rozkład prędkości, który jest liniowy

$$u_x(y) = \frac{v}{2} \left(\frac{y}{h} + 1 \right). \quad (16.17)$$

Dla układu z rysunku 16.3 warunki brzegowe mają natomiast postać $u_x(0) = u_x(2h) = 0$. Otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} c_2 &= 0, \\ c_1 2h + c_2 &= v, \end{aligned} \quad (16.18)$$

którego rozwiązaniami są

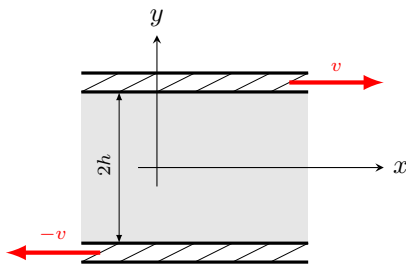
$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{v}{2h}, \\ c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Wstawiając stałe (16.19) do całki ogólnej (16.14), otrzymamy znowu wzór na rozkład prędkości, który jest również liniowy

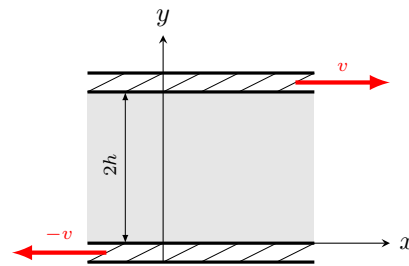
$$u_x(y) = \frac{v}{2h}y. \quad (16.20)$$

16.3. Zadanie 3

Wyznaczyć rozkład prędkości przepływu laminarnego pomiędzy dwiema płaskimi płytkami przedstawionymi na rysunkach 16.4 i 16.5. Przepływ wymuszony jest wyłącznie ruchem górnej i dolnej płytki wzdłuż osi x z prędkościami v i $-v$. Reszta założeń jest identyczna jak w zadaniu pierwszym. Brak jest jedynie gradientu ciśnienia. Rysunki 16.4 i 16.5 różnią się jedynie przyjętymi układami współrzędnych.



Rys. 16.4: Płaskie płytki



Rys. 16.5: Płaskie płytki

Rozwiązanie dla układu współrzędnych z rysunku 16.4 wynosi

$$u_x(y) = \frac{v}{h}y. \quad (16.21)$$

Rozwiązanie dla układu współrzędnych z rysunku 16.5 wynosi

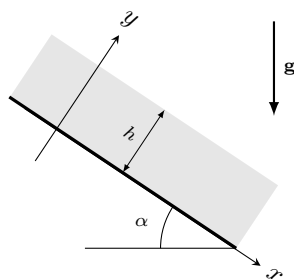
$$u_x(y) = v \left(\frac{y}{h} - 1 \right). \quad (16.22)$$

Rozdział 17

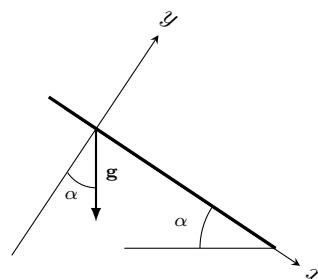
Ćwiczenie 8. Równanie N-S

17.1. Zadanie 1

Wyznaczyć rozkład prędkości przepływu laminarnego na równi pochyłej, przedstawionej na rysunku 17.1. Wysokość powierzchni opadającej wody wynosi h . Równia nachylona jest do poziomu pod kątem α i jest nieskończenie długa wzdłuż osi x i nieskończenie szeroka wzdłuż osi z . Przepływ wymuszony jest wyłącznie grawitacją. Układ współrzędnych przyjęto w ten sposób, że oś x znajduje się na powierzchni równi. Przepływ płynu nieściśliwego jest stacjonarny i gęstość rozkładu sił masowych $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.



Rys. 17.1: Równia pochyła



Rys. 17.2: Zależności między kątami

Rozwiązanie zacząć można od układu równań (16.2), który opisuje przepływ dwuwymiarowy i stacjonarny

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0, \\ \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \\ \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (17.1)$$

Pole prędkości nie zmienia się wzdłuż osi y , gdyż równia jest nieskończenie długa, a więc mamy do czynienia tylko z jedną składową prędkości u_x , a druga składowa

$u_y = 0$. Zatem układ (17.1) przyjmuje jeszcze prostszą postać

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0, \\ \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \\ 0 &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\tag{17.2}$$

Z pierwszego równania w powyższym układzie wynika, że prędkość u_x nie może być zmienną x , a więc i druga pochodna u_x względem x również jest zerowa, co prowadzi do kolejnej, prostszej postaci układu równań

$$\begin{aligned}0 &= \rho g_x + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2}, \\ 0 &= \rho g_y - \frac{dp}{dy}.\end{aligned}\tag{17.3}$$

Rzuty wektora \mathbf{g} znajdujemy na podstawie rysunku 17.2 jako

$$\begin{aligned}g_x &= g \sin \alpha, \\ g_y &= -g \cos \alpha.\end{aligned}\tag{17.4}$$

Ponieważ przepływ wymuszony jest wyłącznie przez grawitację, więc w drugim równaniu układu (17.2) nie ma składowej gradientu ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial x}$. Pochodna cząstkowa prędkości u_x przechodzi w pochodną zwyczajną, gdyż u_x zależy tylko od jednej zmiennej y . Podobnie jest z pochodną ciśnienia względem y . Z drugiego równania układu (17.3) można wyznaczyć rozkład ciśnienia wzdłuż osi y , ale wyznaczamy tylko rozkład prędkości u_x , a więc interesuje nas tylko równanie pierwsze układu (17.3). Dzielimy je obustronnie przez współczynnik lepkości μ i wykorzystując rozkład (17.4), otrzymamy

$$\frac{d^2 u_x}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu}.\tag{17.5}$$

Rozkład prędkości u_x znajdujemy z równania (17.5) poprzez dwukrotne całkowanie względem zmiennej y , co prowadzi do całki ogólnej

$$u_x(y) = c_2 + c_1 y - \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y^2.\tag{17.6}$$

Dysponujemy tylko jednym warunkiem brzegowym w postaci zerowania się prędkości na powierzchni równi w postaci $u_x(0) = 0$. Pozwala to wyznaczyć wartość stałej $c_2 = 0$. Rozwiązanie (17.6) ma teraz nieco prostszą postać

$$u_x(y) = c_1 y - \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y^2.\tag{17.7}$$

Maksymalna prędkość u_x osiągana jest przez przepływ na równi na lustrze ciecży, czyli $u_0 = u_x(h)$. Jest tak dlatego, że ciecz na lustrze, czyli na powierzchni styku

wody i powietrza, napotyka na najmniejszy opór, gdyż współczynnik lepkości powietrza jest dużo mniejszy niż współczynnik lepkości wody. Skoro na lustrze wody prędkość jest największa, więc rozkład prędkości (17.7) ma tam ekstremum i pochodna prędkości u_x musi się zerować. Pochodną wyznaczamy jako

$$\frac{du_x}{dy} = c_1 - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} y. \quad (17.8)$$

Z warunku $\frac{du_x(h)}{dy} = 0$ można wyznaczyć stałą c_1 , która wynosi

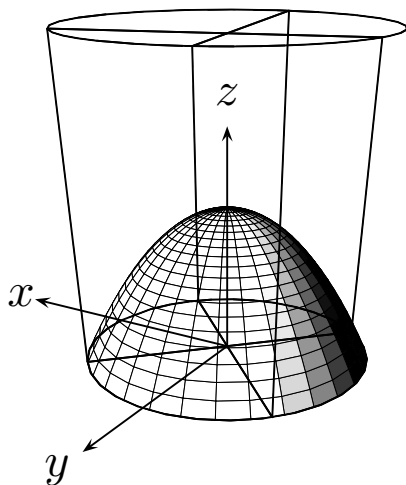
$$c_1 = \frac{\rho g h \sin \alpha}{\mu}. \quad (17.9)$$

Stałą c_1 należy wstawić do rozwiązania (17.7) i ostatecznie można otrzymać paraboliczny rozkład prędkości u_x w postaci

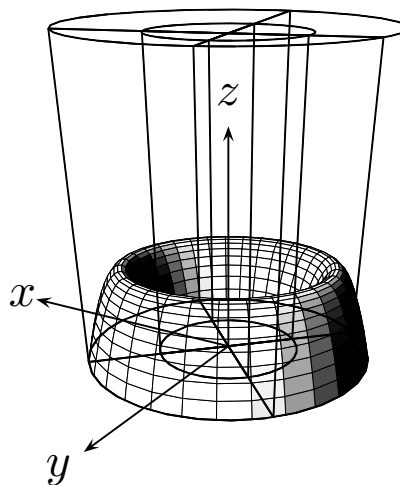
$$u_x(y) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right). \quad (17.10)$$

17.2. Zadanie 2

Wyznaczyć rozkład prędkości przepływu w rurze o promieniu R , który wymuszony jest wyłącznie spadkiem ciśnienia Δp na długości L . Przepływ płynu nieściśliwego jest laminarny i stacjonarny. Fragment rury i poszukiwany rozkład prędkości pokazany jest na rysunku 17.3.



Rys. 17.3: Przepływ w rurze



Rys. 17.4: Przepływ typu rura w rurze

Stacjonarny przepływ w rurze o przekroju kołowym opisany jest układem równań (17.1). Jednak nie da się tego układu uprościć, a rozwiązywanie go w układzie kartezjańskim jest bardzo trudne. Najłatwiej rozwiązać zadanie przez zmianę układu

współrzędnych na walcowy, gdyż wewnętrzna powierzchnia rury jest walcem kołowym. Układ równań (6.5) w układzie walcowym r, φ, z ma następującą postać

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\
\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right) = \\
& \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\
\rho \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} \right) = \\
& -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right), \\
\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\
& \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned} \tag{17.11}$$

W powyższej formie układ ten jest bardziej rozbudowany niż rozpisany układ równań w układzie kartezjańskim (16.1), co w pierwszej chwili może budzić wątpliwości, gdyż zamiast upraszczać, komplikujemy. Jednakże w układzie walcowym, ze względu na jego osiową symetrię, mamy następujące uproszczenie $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Jediną niezerową składową wektora prędkości jest składowa wzdłuż osi rurociągu u_z . Pozostałe składowe $u_r = u_\varphi = 0$, gdyż laminarny przepływ w rurze jest wyłącznie osiowy. Po uwzględnieniu powyższych stwierdzeń możemy uprościć układ równań (17.11) do następującej postaci

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\
0 &= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} \\
\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned} \tag{17.12}$$

Równanie drugie w układzie (17.12) pozwala na wyznaczenie rozkładu ciśnień, co nie jest treścią zadania. Równanie pierwsze, które mówi, że nie ma zmian prędkości osiowej wzdłuż osi, pozwala na dalsze uproszczenie układu (17.12). Rozkład prędkości u_z ma więc następującą postać

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \tag{17.13}$$

Równanie (17.13) opisuje niestacjonarny przepływ w rurociągu o przekroju kołowym z uwzględnieniem grawitacji i gradientu ciśnienia. Równanie jest liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym, rzędu drugiego. Z treści zadania wynika, że przepływ jest stacjonarny i wymuszony wyłącznie gradientem ciśnienia, więc równanie

(17.13) przechodzi w liniowe równanie różniczkowe zwyczajne, rzędu drugiego

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (17.14)$$

Rozkład prędkości u_r zależy wyłącznie od promienia r . Podobnie jak w zadaniu z rozdziału 16 o przepływie między płaskimi płytkami, tak i teraz możemy stwierdzić, że gradient ciśnienia $\frac{\partial p}{\partial z}$ wzdłuż osi rurociągu jest stały. Skoro gradient jest stały, to jego pochodna jest liniowa, a więc może być zastąpiona spadkiem ciśnienia Δp na długości L ze znakiem ujemnym (spadek)

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{L}. \quad (17.15)$$

Równanie (17.15) dzielimy obustronnie przez współczynnik lepkości μ i mnożymy przez r , aby rozdzielić zmienne i następnie obustronnie całkujemy. W wyniku otrzymujemy

$$r \frac{du_z}{dr} = c_1 - \frac{\Delta p}{2\mu L} r^2. \quad (17.16)$$

Dzieląc obustronnie przez r , ponownie rozdzielamy zmienne i otrzymujemy

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{c_1}{r} - \frac{\Delta p}{2\mu L} r. \quad (17.17)$$

Po obustronnym całkowaniu otrzymamy rozwiązanie w postaci ogólnej, które zależy od dwóch stałych

$$u_z(r) = c_2 + c_1 \ln r - \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2. \quad (17.18)$$

Mamy jednak tylko jeden warunek brzegowy w postaci $u_z(R) = 0$, który pozwoli na wyznaczenie tylko jednej stałej całkowania. Drugą stałą można wyznaczyć na dwa sposoby. Po pierwsze, w środku rurociągu prędkość $u_z(0)$ musi mieć skończoną wartość a logarytm w zerze dąży do minus nieskończoności, a więc stała c_1 musi być równa 0, aby uniknąć tej osobliwości. Po drugie, ze względu na osiową symetrię prędkość u_z osiągnie największą wartość w środku rurociągu. Zatem pochodna u_z dla $r = 0$ musi się zerować. Pochodna u_z określona jest wzorem (17.16), który dla $r = 0$ da wartość stałej $c_1 = 0$. Skoro tak, to rozwiązanie (17.18) przechodzi w następującą postać

$$u_z(r) = c_2 - \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2. \quad (17.19)$$

Stałą c_2 wyznaczamy ze wspomnianego wcześniej warunku brzegowego $u_z(R) = 0$. Wstawiając ten warunek do równania (17.19), znajdujemy wartość stałej jako

$$c_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L} R^2 \quad (17.20)$$

i wstawiamy do równania (17.19). W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie szczególne, które spełnia warunek brzegowy i jest poszukiwanym rozkładem prędkości w rurociągu o przekroju kołowym

$$u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - x^2 - y^2). \quad (17.21)$$

Rozwiązanie (17.21) jest geometrycznie paraboloidą obrotową, której wykres pokazany jest na rysunku 17.3.

17.3. Zadanie 3

Wyznaczyć rozkład prędkości przepływu typu rura w rurze, który wymuszony jest wyłącznie spadkiem ciśnienia Δp na długości L . Fragment układu rura w rurze i poszukiwany rozkład prędkości pokazany jest na rysunku 17.4. Promień zewnętrznej rury wynosi R_2 , a promień wewnętrznej R_1 .

Korzystamy z całki ogólnej (17.18) i dwóch warunków brzegowych $u_z(R_1) = u_z(R_2) = 0$, skąd znajdujemy stałe c_1 i c_2 . Ostatecznie odpowiedź ma postać

$$U_z = \frac{\Delta p}{4\mu L} \left(R_2^2 - r^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2} \right). \quad (17.22)$$

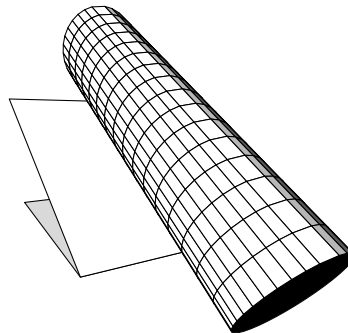
Warto zauważyć, że rozwiązanie (17.22) nie jest paraboloidą obrotową, gdyż oprócz części parabolicznej $-r^2$ występują jeszcze logarytm $\ln r$.

Rozdział 18

Ćwiczenie 9. Równanie N-S

18.1. Zadanie 1

Wyznaczyć rozkład prędkości przepływu w rurze o promieniu R , który wymuszony jest wyłącznie grawitacją. Rura znajduje się na równi pochyłej, która nachylona jest do poziomu pod kątem α i jest nieskończenie długa wzdłuż osi rurowości. Przepływ płynu nieściśliwego jest laminarny i stacjonarny. Fragment rury pokazany jest na rysunku 18.1.



Rys. 18.1: Pochyły rurowciąg

Do rozwiązania zadania wykorzystujemy gotowe równanie (17.13), które opisuje niestacjonarny i laminarny przepływ w rurowciągu o przekroju kołowym z uwzględnieniem gradientu ciśnienia i sił grawitacji

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (18.1)$$

Zgodnie z treścią zadania przepływ w rurze jest stacjonarny i brak jest gradientu ciśnienia, więc równania (18.1) upraszcza się do postaci

$$0 = \rho g_z + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right). \quad (18.2)$$

Pochodna cząstkowa przechodzi w pochodną zwyczajną, gdyż prędkość u_z jest wyłącznie zależna od promienia r . Rzuty wektora \mathbf{g} na poszczególne osie są analogiczne

jak te, które przedstawione są wzorem (17.4), tyle że osi y odpowiada oś r w układzie walcowym, a osi x odpowiada oś rurociągu z

$$\begin{aligned} g_z &= g \sin \alpha, \\ g_r &= -g \cos \alpha. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Wykorzystując rozkład (18.3), możemy otrzymać następującą postać równania (18.2)

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = -\rho g \sin \alpha. \quad (18.4)$$

Następnie należy rozdzielić zmienne. W tym celu mnożymy obustronnie przez promień r i dzielimy przez współczynnik lepkości μ

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = -\frac{r \rho g \sin \alpha}{\mu}. \quad (18.5)$$

Obustronne całkowanie prowadzi do następującego równania

$$r \frac{du_z}{dr} = c_1 - \frac{r^2 \rho g \sin \alpha}{2\mu}. \quad (18.6)$$

Ponownie rozdzielamy zmienne. W tym celu dzielimy obustronnie przez r

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{c_1}{r} - \frac{r \rho g \sin \alpha}{2\mu}. \quad (18.7)$$

Kolejne obustronne całkowanie daje rozwiązanie ogólne, zależne od dwóch stałych całkowania

$$u_z(r) = c_2 + c_1 \ln r - \frac{r^2 \rho g \sin \alpha}{4\mu}. \quad (18.8)$$

Podobnie jak w zadaniu z rurociągiem, w którym przepływ wymuszany był spadkiem ciśnienia, tak i teraz stała c_1 musi przyjąć wartość $c_1 = 0$, aby uniknąć osobliwości w środku rurociągu $u_z(0)$. Wartość stałej c_2 znajdujemy z warunku brzegowego $u_z(R) = 0$, co daje w wyniku

$$c_2 = \frac{R^2 \rho g \sin \alpha}{4\mu}. \quad (18.9)$$

Wstawiając powyższą stałą (18.9) do równania (18.8) i pamiętając, że $c_1 = 0$, otrzymujemy rozwiązanie szczególne w postaci

$$u_z(r) = \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} (R^2 - r^2). \quad (18.10)$$

Poprawność rozwiązania (18.10) łatwo sprawdzić w ten sposób, że spełnia warunek brzegowy $u_z(R) = 0$ oraz dla kąta $\alpha = 0$ brak jest przepływu, gdyż rurociąg wtedy znajduje się na płaszczyźnie poziomej, która jest prostopadła do wektora grawitacji \mathbf{g} .

18.2. Zadanie 2

Wyznaczyć rozkład prędkości przepływu w rurze o promieniu R , który wymuszony jest wyłącznie pulsującym gradientem ciśnienia. Rura jest nieskończenie długa wzdłuż swej osi. Przepływ płynu nieściśliwego jest laminarny. Niestacjonarny gradient ciśnienia ma postać

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -Ae^{i\omega t}, \quad (18.11)$$

gdzie A jest stałą, ω – częstością kołową, i – jednostką urojoną.

Do rozwiązania zadania wykorzystujemy równanie (17.13) lub (18.1), które opisuje niestacjonarny i laminarny przepływ w rurociągu o przekroju kołowym z uwzględnieniem gradientu ciśnienia i sił grawitacji

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (18.12)$$

Ponieważ przepływ wymuszony jest jedynie gradientem ciśnienia, więc równanie powyższe przyjmie postać

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}. \quad (18.13)$$

Postać (18.13) wynika również z pochodnej iloczynu, który znajduje się po prawej stronie wzoru (18.12). Równanie (18.13) jest równaniem różniczkowym cząstkowym, rzędu drugiego. Składowa prędkości u_z zależy od promienia i czasu. Równanie to można sprowadzić do równania różniczkowego zwyczajnego przez następującą dekompozycję składowej prędkości u_z

$$u_z(t, r) = f(r)e^{i\omega t}, \quad (18.14)$$

gdzie f jest nieznaną funkcją, która zależy tylko od promienia. Po wstawieniu dekompozycji (18.14) i gradientu ciśnienia (18.11) do równania (18.13), otrzymamy

$$\rho i \omega f e^{i\omega t} = A e^{i\omega t} + \frac{\mu}{r} f' e^{i\omega t} + \mu f'' e^{i\omega t}. \quad (18.15)$$

Dzieląc obustronnie równanie (18.15) przez $\mu e^{i\omega t}$, otrzymamy niejednorodne równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{\rho i \omega}{\mu} f = -\frac{A}{\mu}. \quad (18.16)$$

Równanie niejednorodne (18.16) można sprowadzić do równania jednorodnego przez podstawienie

$$f = f_0 + c, \quad (18.17)$$

gdzie stała c dobierana jest w ten sposób, że po podstawieniu do równania (18.16) zamieni to równanie w równanie jednorodne

$$f_0'' + \frac{1}{r} f_0' - \frac{\rho i \omega}{\mu} f_0 - \frac{\rho i \omega}{\mu} c = -\frac{A}{\mu}. \quad (18.18)$$

Jeżeli w równaniu (18.18) za c przyjmiemy

$$c = \frac{A}{\rho i \omega}, \quad (18.19)$$

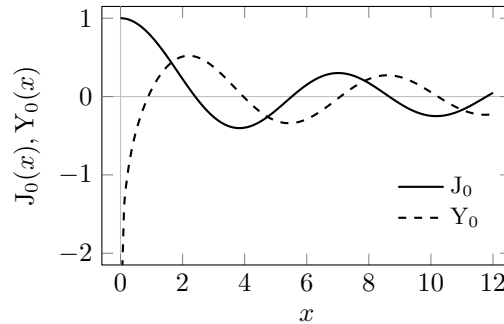
to równanie (18.18) stanie się równaniem jednorodnym w postaci

$$f_0'' + \frac{1}{r} f_0' - \frac{\rho i \omega}{\mu} f_0 = 0. \quad (18.20)$$

Jest to równanie Bessela, którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$f_0(r) = c_1 J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} r \sqrt{\rho i \omega \mu^{-1}} \right) + c_2 Y_0 \left(-i^{\frac{3}{2}} r \sqrt{\rho i \omega \mu^{-1}} \right), \quad (18.21)$$

gdzie J_0 i Y_0 są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, zerowego rzędu, pokazanymi na wykresie 18.2.



Rys. 18.2: Funkcje Bessela

Ponieważ funkcja Bessela drugiego rodzaju dąży do minus nieskończoności, gdy promień r dąży do zera, więc stała c_2 musi być się zerować $c_2 = 0$, aby uniknąć osobliwości w środku rurociągu. Zatem rozwiązanie równania jednorodnego (18.21) przybiera prostszą postać

$$f_0(r) = c_1 J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} r R^{-1} \alpha \right), \quad (18.22)$$

gdzie α jest liczbą Womersleya

$$\alpha = R \sqrt{\rho i \omega \mu^{-1}}. \quad (18.23)$$

Funkcja f , która jest rozwiązaniem równania niejednorodnego, według równania (18.17) i (18.19) ma postać

$$f(r) = c_1 J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} r R^{-1} \alpha \right) + \frac{A}{\rho i \omega}. \quad (18.24)$$

Znając funkcję f z równania (18.24), można znaleźć rozkład prędkości z dekompozycji (18.14)

$$u_z(t, r) = e^{i\omega t} \left(c_1 J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} r R^{-1} \alpha \right) + \frac{A}{\rho i \omega} \right). \quad (18.25)$$

Rozwiązanie (18.25) jest rozwiązaniem ogólnym, które zależy od stałej całkowania c_1 . Wartość stałej można wyznaczyć z warunku brzegowego $u_z(t, R) = 0$. Warunek ten po wstawieniu do równania (18.25) daje stałą c_1 w postaci

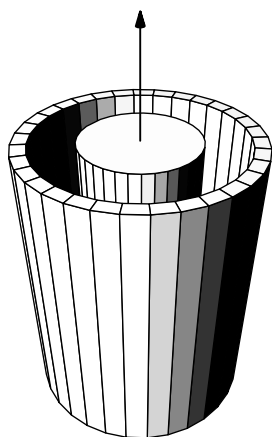
$$c_1 = -\frac{A}{\rho i \omega J_0\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha\right)}. \quad (18.26)$$

Po wstawieniu stałej c_1 ze wzoru (18.26) do rozwiązania ogólnego (18.25) otrzymujemy poszukiwany rozkład prędkości w postaci, który nazywany jest rozwiązaniem Womersleya

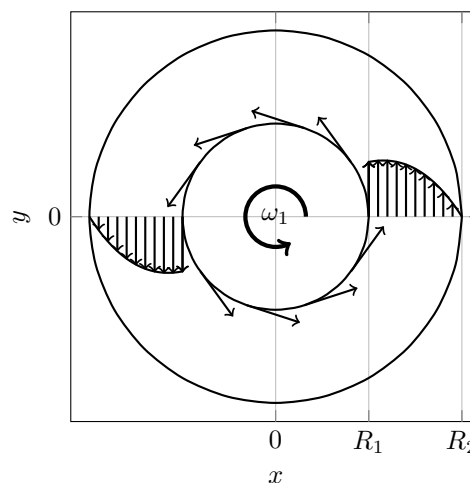
$$u_z(t, r) = \frac{Ae^{i\omega t}}{\rho i \omega} \left(1 - \frac{J_0\left(i^{\frac{3}{2}} r R^{-1} \alpha\right)}{J_0\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha\right)} \right). \quad (18.27)$$

18.3. Zadanie 3

Wyznaczyć rozkład prędkości w szczelinie pomiędzy dwoma nieskończenie długimi cylindrami z rysunków 18.3 i 18.4. Cylinder zewnętrzny o promieniu R_2 jest nieruchomy, a cylinder wewnętrzny o promieniu R_1 wiruje wokół własnej osi z z prędkością kątową ω_1 . Przepływ płynu nieściśliwego jest stacjonarny i laminarny. Ruch między cylindrami spowodowany jest wyłącznie wirowaniem cylindra wewnętrznego.



Rys. 18.3: Cylinder w cylindrze



Rys. 18.4: Rozkład prędkości w szczelinie

Rozwiązania szukamy w układzie cylindrycznym r, φ, z . Układ równań dany jest w postaci (17.11). Ponieważ cylindry są nieskończenie długie, a ruch odbywa się tylko wzdłuż współrzędnej kątowej φ , to składowe prędkości promieniowej i osiowej zerują się $u_r = u_z = 0$. Nie ma również zmian wzdłuż osi $\frac{\partial}{\partial z}$ i wzdłuż kąta $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ ze względu na osiową symetrię. Jediną składową prędkości, która się nie zeruje, jest składowa kątowa u_φ , która zależy wyłącznie od promienia. Przy tych założeniach

układ równań (17.11) uprości się do postaci

$$\begin{aligned}\rho \frac{u_\varphi^2}{r} &= \frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\varphi}{dr} \right) - \frac{u_\varphi}{r^2}.\end{aligned}\quad (18.28)$$

Pierwsze równanie powyższego układu (18.28) pozwala na wyznaczenie ciśnienia, co nie jest treścią zadania. Drugie równanie układu związane jest z rozkładem prędkości. Pochodne cząstkowe przechodzą w pochodne zwyczajne, gdyż składowa prędkości u_φ jest funkcją jedynie promienia r . Po wyliczeniu pochodnej iloczynu i pomnożeniu obustronnym przez r^2 , drugie równanie układu (18.28) przyjmie postać

$$r^2 \frac{d^2 u_\varphi}{dr^2} + r \frac{du_\varphi}{dr} - u_\varphi = 0. \quad (18.29)$$

Równanie (18.29) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu. Równanie to nazywane jest również równaniem Eulera drugiego rzędu w ogólnej postaci

$$r^2 u_\varphi'' + p r u_\varphi' + q u_\varphi = 0, \quad (18.30)$$

gdzie w tym przypadku $p = 1$ i $q = -1$. Równanie Eulera (18.30) może zostać sprowadzone do postaci równania o stałych współczynnikach przy następujących podstawieniach

$$\begin{aligned}r &= e^v, \\ v &= e^{\ln r}.\end{aligned}\quad (18.31)$$

Zatem z równania (18.30) otrzymujemy następujące równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach względem nowej zmiennej v

$$\frac{d^2 u_\varphi}{dv^2} + (p-1) \frac{du_\varphi}{dv} + q u_\varphi = 0. \quad (18.32)$$

W rozważanym przypadku $p = 1$ i $q = -1$, więc równanie (18.32) przyjmie prostszą postać

$$\frac{d^2 u_\varphi}{dv^2} - u_\varphi = 0. \quad (18.33)$$

Dla równania o stałych współczynnikach (18.33) równanie charakterystyczne ma postać

$$r^2 - 1 = 0, \quad (18.34)$$

gdzie r tym razem nie oznacza promienia. Rozwiązanie równania charakterystycznego (18.34) ma postać $r = \pm 1$, a całka ogólna równania (18.33) wygląda następująco

$$u_\varphi = c_1 e^{rv} + c_2 e^{-rv}. \quad (18.35)$$

Zatem

$$u_\varphi = c_1 e^v + c_2 e^{-v}. \quad (18.36)$$

Mając na uwadze podstawienia (18.31), otrzymujemy następujące rozwiązanie ogólne, które przedstawia rozkład prędkości w zależności od dwóch stałych

$$u_\varphi = c_1 e^{\ln r} + c_2 e^{-\ln r} = c_1 r + \frac{c_2}{r}. \quad (18.37)$$

Tym razem r oznacza promień. Stałe c_1 i c_2 wyznaczamy z warunków brzegowych $u_\varphi(R_2) = 0$ i $u_\varphi(R_1) = \omega_1 R_1$, co daje następujący układ równań

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 R_2 + \frac{c_2}{R_2}, \\ \omega_1 R_1 &= c_1 R_1 + \frac{c_2}{R_1}. \end{aligned} \quad (18.38)$$

Rozwiązaniem układu (18.38) są stałe c_1 i c_2 w postaci

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \\ c_2 &= \frac{\omega_1 R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \end{aligned} \quad (18.39)$$

które po wstawieniu do całki ogólnej (18.37), dają rozwiązanie szczególne, będące poszukiwanym rozkładem prędkości

$$u_\varphi(r) = \frac{\omega_1 R_1^2 (R_2^2 - r^2)}{r (R_2^2 - R_1^2)}. \quad (18.40)$$

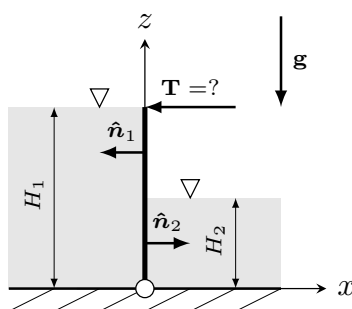
Rozkład prędkości (18.40) pokazany jest na wykresie 18.4. Przepływy takiego typu często spotykane są w łożyskach ślizgowych. O ile szczelina $R_2 - R_1$ jest mała, to nawet przy dużych prędkościach kątowych przepływ w szczelinie pozostaje laminarny.

Rozdział 19

Ćwiczenie 10. Hydrostatyka

19.1. Zadanie 1

Obliczyć siłę T utrzymującą przegrodę z rysunku 19.1 w równowadze.



Rys. 19.1: Ilustracja do zadania 19.1

Powierzchnię swobodną na rysunkach oznacza się trójkątem. Wersory normalne do powierzchni zwrócone powinny być w stronę cieczy. Układ współrzędnych najlepiej przyjmować w punkcie obrotu przegrody i jedna z osi, na przykład oś z , powinna być równoległa do wektora grawitacji.

Do rozwiązywania tego typu zadań potrzebne są dwa wzory. Pierwszym jest wzór na ciśnienie słupa wody, który bierze się z całkowanie wzorów (8.2). Najczęściej spotykamy dwie sytuacje. Jeżeli początek osi z układu współrzędnych znajduje się na powierzchni swobodnej i skierowany jest w dół, to ciśnienie słupa wody przyjmuje postać (8.3). Jeżeli oś z układu współrzędnych znajduje się poniżej powierzchni swobodnej cieczy na głębokości h i skierowana jest ku górze (jak na rysunku 19.1), to ciśnienie słupa wody określone jest następującym równaniem

$$p = p_0 + \rho g(h - z), \quad (19.1)$$

gdzie p_0 jest ciśnieniem atmosferycznym nad powierzchnią swobodną. Drugim wzorem jest wzór (8.5) na momencie siły naporu hydrostatycznego, który dalej w skrócie nazywany będzie momentem

$$\mathbf{M} = - \iint_S \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} p \, dS. \quad (19.2)$$

Ponieważ ciśnienie atmosferyczne działa z obu stron przegrody, więc zwykle pomija się je we wzorze (19.1), a ciśnienie słupa wody bez ciśnienia atmosferycznego oznacza się jako

$$p'' = \rho g(h - z). \quad (19.3)$$

Oczywiście mamy $p = p_0 + p''$. Moment, w którym nie uwzględniamy ciśnienia atmosferycznego, oznacza się jako

$$\mathbf{M}'' = - \iint_S \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} p'' dS. \quad (19.4)$$

W dalszej części tego rozdziału posługiwać się będziemy wyłącznie wzorami (19.3) i (19.4). Rozkłady ciśnień po lewej stronie przegrody p_1'' i po prawej stronie p_2'' , na podstawie wzoru (19.3), wynoszą

$$\begin{aligned} p_1'' &= \rho g(H_1 - z), \\ p_2'' &= \rho g(H_2 - z). \end{aligned} \quad (19.5)$$

Momenty według równania (19.4) mają postać

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1'' &= - \iint_{S_1} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_1 p_1'' dS, \\ \mathbf{M}_2'' &= - \iint_{S_2} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_2 p_2'' dS. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Wektor wodzący \mathbf{r} , którego początek znajduje się w punkcie, względem którego liczony jest moment siły naporu dla obu stron przegrody, jest taki sam

$$\mathbf{r} = z \hat{\mathbf{k}} \quad (19.7)$$

i zależy od współrzędnej z . Gdy $z = 0$, to mamy do czynienia z początkiem układu współrzędnych. Maksymalna wartość z zależy od tego, po której stronie przegrody wektor \mathbf{r} jest rozważany. Po lewej będzie to H_1 , a po prawej H_2 . Wzór (19.7) powinien być tak określony, aby wektor \mathbf{r} łączył początek układu współrzędnych (punkt obrotu) z każdym punktem przegrody, który znajduje się poniżej lustra wody. Wersory normalne do przegrody, które znajdują się we wzorach (19.6), należy zorientować w kierunku cieczy. Według rysunku 19.1 wyniosą one odpowiednio

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_1 &= -\hat{\mathbf{i}}, \\ \hat{\mathbf{n}}_2 &= \hat{\mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (19.8)$$

Powierzchnie, na których określone są całki powierzchniowe we wzorach (19.6), definiowane są w następujący sposób

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(y, z) : 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq H_1\}, \\ S_2 &= \{(y, z) : 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq H_2\}, \end{aligned} \quad (19.9)$$

gdzie współrzędna y jest prostopadła do rysunku 19.1. Ponieważ powierzchnie (19.9) są fragmentami płaszczyzny yz , to całki powierzchniowe (19.6) są całkami podwójnymi. Pierwsza całka z układu (19.6) zamieniana jest na całkę iterowaną w następujący sposób

$$\mathbf{M}_1'' = - \iint_{S_1} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_1 p_1'' dS = - \int_0^b \int_0^{H_1} z \hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) \rho g (H_1 - z) dz dy. \quad (19.10)$$

Iloczyny wektorowe poszczególnych wersorów oblicza się w następujący sposób

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{k}}, & \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{i}}, & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{j}}, \\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} &= -\hat{\mathbf{k}}, & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} &= -\hat{\mathbf{i}}, & \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} &= -\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Każdy inny iloczyn wektorowy wersorów $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ i $\hat{\mathbf{k}}$ daje wektor zerowy. Ponieważ funkcja podcałkowa w całce (19.10) nie zależy od y , więc można ją scałkować jako pierwszą i w wyniku otrzymać b . Wniosek z tego jest taki, że jeżeli przegrody znajdują się na płaszczyźnie yz , to element powierzchniowy dS sprowadza się do następującej postaci

$$dS = b dz \quad (19.12)$$

i każda całka powierzchniowa sprowadzana jest do pojedynczej przemnożonej przez szerokość wzdłuż osi y . Posługując się mnożeniami według schematu (19.11), można całkę (19.10) zapisać jako

$$\mathbf{M}_1'' = b \rho g \hat{\mathbf{j}} \int_0^{H_1} z (H_1 - z) dz = b \rho g \hat{\mathbf{j}} \left(H_1 \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right)_0^{H_1}. \quad (19.13)$$

Po podstawieniu granic całkowania otrzymamy następującą wartość momentu siły naporu cieczy z lewej strony przegrody, który starał się będzie przewrócić przegrodę w kierunku zgodnym z kierunkiem wskazówek zegara

$$\mathbf{M}_1'' = \frac{1}{6} b \rho g H_1^3 \hat{\mathbf{j}}. \quad (19.14)$$

Należy powtórzyć identyczne rozumowanie dla prawej strony przegrody, co doprowadzi do wartości momentu siły naporu cieczy z prawej strony

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2'' &= - \iint_{S_2} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_2 p_2'' dS = -b \int_0^{H_2} z \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} \rho g (H_2 - z) dz = \\ &= -b \rho g \hat{\mathbf{j}} \int_0^{H_2} z (H_2 - z) dz = -b \rho g \hat{\mathbf{j}} \left(H_2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right)_0^{H_2} = -\frac{1}{6} b \rho g H_2^3 \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (19.15)$$

Wartość całki (19.15) jest prawie identyczna z wartością całki (19.14). Oprócz innych indeksów mamy również inny znak. Tym razem jest to znak ujemny, co jest oczywiste, gdyż moment (19.15) stara się przewrócić przegrodę w kierunku przeciwnym do kierunku wskazówek zegara. Oczywistym jest również, że moment o kierunku

zgodnym z kierunkiem wskazówek zegara jest większy. Aby utrzymać przegrodę w równowadze należy przyłożyć siłę \mathbf{T} , które według rysunku 19.1 znajduje się na wysokości H_1 . Moment siły \mathbf{T} równy jest iloczynowi wektorowemu ramienia (wektora wodzącego) \mathbf{r}_T , na którym działa siła, i siły \mathbf{T} , co zapisujemy jako

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{r}_T \times \mathbf{T}. \quad (19.16)$$

Ramię siły \mathbf{r}_T równe jest wysokości H_1 i wersorowi, wzdłuż którego ramię jest ułożone, a siła \mathbf{T} równa jest swojemu modułowi T i wersorowi, który pokrywa się ze zwrotem \mathbf{T} . Zatem moment siły \mathbf{M}_T (19.16) równy jest

$$\mathbf{M}_T = H_1 \hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}})T = -H_1 T \hat{\mathbf{j}}, \quad (19.17)$$

gdzie mnożenie wektorowe wersorów wykonywane jest według schematu (19.11). Skoro przegroda z rysunku 19.1 jest w równowadze, to suma wszystkich momentów musi się zerować, co zapisujemy jako

$$\mathbf{M}_1'' + \mathbf{M}_2'' + \mathbf{M}_T = \mathbf{0}. \quad (19.18)$$

W warunku (19.18) piszemy wszystkie momenty ze znakiem dodatnim! Poszczególne znaki znajdują się pod wyliczonymi wartościami momentów zgodnie ze wzorami (19.14), (19.15) i (19.17), co daje

$$\frac{1}{6} b \rho g \hat{\mathbf{j}} H_1^3 - \frac{1}{6} b \rho g \hat{\mathbf{j}} H_2^3 - H_1 T \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}. \quad (19.19)$$

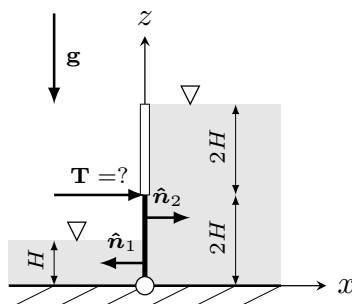
Z powyższego równania (19.19) można wyliczyć moduł siły T , która utrzyma przegrodę z rysunku 19.1 w równowadze

$$T = \frac{\rho g b (H_1^3 - H_2^3)}{6H_1}. \quad (19.20)$$

Oczywiście możemy również podać siłę jako wektor $\mathbf{T} = -T \hat{\mathbf{i}}$.

19.2. Zadanie 2

Obliczyć siłę T utrzymującą przegrodę z rysunku 19.1 w równowadze.



Rys. 19.2: Ilustracja do zadania 19.2

Schemat postępowania jest identyczne, jak miało to miejsce w przypadku zadania pierwszego. Istnieją jednak dwie różnice, na które należy zwrócić uwagę. Różnice te będą wskazane w dalszej części zadania. Na początku można wyznaczyć ciśnienia słupa wody w postaci

$$\begin{aligned} p_1'' &= \rho g(H - z), \\ p_2'' &= \rho g(4H - z). \end{aligned} \quad (19.21)$$

Pierwszą różnicą jest to, że ciśnienie po prawej stronie przegrody zależy od wysokości $4H$, a nie od wysokości przegrody $2H$. Następnie zapisujemy oba moment w następującej postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1'' &= - \iint_{S_1} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_1 p_1'' dS, \\ \mathbf{M}_2'' &= - \iint_{S_2} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_2 p_2'' dS. \end{aligned} \quad (19.22)$$

Powyższe równania są identyczne jak w zadaniu pierwszym. Wektor wodzący \mathbf{r} , którego początek znajduje się w punkcie, względem którego liczony jest moment siły naporu dla obu stron przegrody, również jest identyczny

$$\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{k}}. \quad (19.23)$$

Wersory normalne do przegrody, które znajdują się we wzorach (19.22) należy zorientować w kierunku cieczy. Według rysunku 19.2 wyniosą one tyle samo, jak w zadaniu pierwszym

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_1 &= -\hat{\mathbf{i}}, \\ \hat{\mathbf{n}}_2 &= \hat{\mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (19.24)$$

Powierzchnie S_1 i S_2 , na których określone są całki powierzchniowe we wzorach (19.22), definiowane są jednak inaczej, niż miało to miejsce w zadaniu pierwszym

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(y, z) : 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq H\}, \\ S_2 &= \{(y, z) : 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq 2H\}. \end{aligned} \quad (19.25)$$

Różnica polega na tym, że powierzchnia S_2 , czyli powierzchnia przegrody po prawej stronie, zmienia się tylko do wysokości $2H$, a nie $4H$. Jest to o tyle istotne, że dotyczy granic całkowania i może prowadzić do błędnych wyników. Całki powierzchniowe we wzorach (19.22) zamieniamy bezpośrednio na pojedyncze zgodnie ze wzorem (19.12). Pierwszy moment liczymy analogicznie, jak miało to miejsce w poprzednim zadaniu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1'' &= - \iint_{S_1} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_1 p_1'' dS = -b \int_0^H z\hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) \rho g(H - z) dz = \\ &= b\rho g\hat{\mathbf{j}} \int_0^H z(H - z) dz = \frac{1}{6}b\rho gH^3\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (19.26)$$

W przypadku drugiego momentu pamiętamy, że ciśnienie jest dane innym wzorem i

inne są granice całkowania!

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2'' &= - \iint_{S_2} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_2 p_2'' dS = -b \int_0^{2H} z \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} \rho g (4H - z) dz = \\ &= -b \rho g \hat{\mathbf{j}} \int_0^{2H} z(4H - z) dz = -\frac{16}{3} b \rho g H^3 \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (19.27)$$

Siła \mathbf{T} według rysunku 19.2 znajduje się na wysokości $2H$. Moment siły \mathbf{M}_T równy jest

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{r}_T \times \mathbf{T} = 2H \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} T = 2HT \hat{\mathbf{j}}. \quad (19.28)$$

Znak momentu \mathbf{M}_T jest identyczne jak momentu \mathbf{M}_1'' , gdyż działają w tym samym kierunku. Warunek równowagi

$$\mathbf{M}_1'' + \mathbf{M}_2'' + \mathbf{M}_T = \mathbf{0} \quad (19.29)$$

przyjmuje postać

$$\frac{1}{6} b \rho g H^3 \hat{\mathbf{j}} - \frac{16}{3} b \rho g H^3 \hat{\mathbf{j}} + 2HT \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}, \quad (19.30)$$

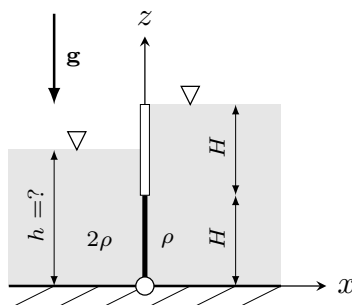
skąd wynika wartość siły T

$$T = \frac{31}{12} \rho g b H^2, \quad (19.31)$$

będącej rozwiązaniem zadania.

19.3. Zadanie 3

Jaka powinna być wysokość h powierzchni swobodnej cieczy o gęstości 2ρ po lewej stronie przegrody, aby przegroda na rysunku 19.2 była w równowadze? Gęstość cieczy po prawej stronie przegrody wynosi ρ .



Rys. 19.3: Ilustracja do zadania 19.3

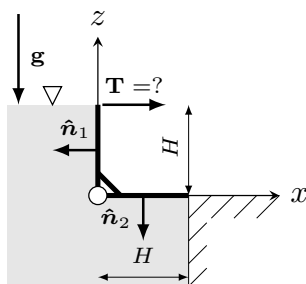
Odpowiedź: $h = \frac{4}{3}H$.

Rozdział 20

Ćwiczenie 11. Hydrostatyka

20.1. Zadanie 1

Obliczyć siłę T utrzymującą przegrodę z rysunku 20.1 w równowadze. Ciężar przegrody pomijamy.



Rys. 20.1: Ilustracja do zadania 20.1

Pomimo, że ciśnienie wody działa na przegrodę tylko z jednej strony, to i tak należy rozważać jej dwie części: pionową i poziomą. Co prawda ciśnienie określone jest tylko jednym wzorem

$$p'' = \rho g(H - z), \quad (20.1)$$

ale innymi wzorami określone są momenty, gdyż całkuje się po innych zmiennych

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1'' &= - \iint_{S_1} \mathbf{r}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_1 p'' dS_1, \\ \mathbf{M}_2'' &= - \iint_{S_2} \mathbf{r}_2 \times \hat{\mathbf{n}}_2 p'' dS_2. \end{aligned} \quad (20.2)$$

W przypadku przegrody pionowej jest to zmienna z , a w przypadku przegrody poziomej zmienna x . Elementarne powierzchnie dS zapisywane są jako

$$\begin{aligned} dS_1 &= b dz, \\ dS_2 &= b dx. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Również wektory wodzące \mathbf{r} , których początek znajduje się w punkcie, względem którego liczony jest moment siły naporu dla obu stron przegrody, określone są innymi

wzorami

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= z\hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{r}_2 &= x\hat{\mathbf{i}}.\end{aligned}\tag{20.4}$$

Wersory normalne do poszczególnych części przegrody mają postać

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}_1 &= -\hat{\mathbf{i}}, \\ \hat{\mathbf{n}}_2 &= -\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\tag{20.5}$$

Ostatnią rzeczą, którą trzeba określić przed wyliczeniem momentów, są powierzchnie S , które są niezbędne dla określenia granic całkowania

$$\begin{aligned}S_1 &= \{(y, z) : 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq H\}, \\ S_2 &= \{(y, z) : 0 \leq x \leq H, 0 \leq y \leq b\}.\end{aligned}\tag{20.6}$$

Zatem pierwszy moment z układu (20.2) wyliczany jest w sposób analogiczny do poprzedniego ćwiczenia

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1'' &= - \iint_{S_1} \mathbf{r}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_1 p'' dS_1 = -b \int_0^H z\hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) \rho g(H-z) dz = \\ &= b\rho g\hat{\mathbf{j}} \int_0^H z(H-z) dz = \frac{1}{6}b\rho gH^3\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}\tag{20.7}$$

Drugi moment z układu (20.2) wylicza się podobnie, ale ciśnienie określone wzorem (20.1) jest stałe $p'' = \rho gH$, gdyż cała pozioma część przegrody znajduje się na tej samej głębokości $z = 0$. Zatem mamy

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_2'' &= - \iint_{S_2} \mathbf{r}_2 \times \hat{\mathbf{n}}_2 p'' dS_2 = -b \int_0^H x\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{k}}) \rho gH dx = \\ &= -b\rho g\hat{\mathbf{j}} \int_0^H x dx = -\frac{1}{2}b\rho gH^3\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}\tag{20.8}$$

Widać, że co do wartości bezwzględnej moment M_2 jest większy od momentu M_1 , co oznacza, że przegroda z rysunku 20.1 będzie miała tendencję to przewracania się w kierunku przeciwnym do kierunku wskazówek zegara. Być może jest to sprzeczne z intuicją, ale jeżeli wyobrazimy sobie, że na przegrodzie pionowej rozkład ciśnienia jest trójkątny, a na przegrodzie poziomej prostokątny o tej samej wysokości co maksymalna wysokość trójkąta, to widać, że napór i moment naporu są większe na poziomej części przegrody, gdyż ich wymiary są takie same H . Trzeci moment od siły \mathbf{T} , który utrzyma przegrodę w równowadze, określany jest wzorem

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{r}_T \times \mathbf{T} = H\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}T = HT\hat{\mathbf{j}}\tag{20.9}$$

i ma znak identyczny jak moment \mathbf{M}_1'' . Równanie równowagi ma postać

$$\mathbf{M}_1'' + \mathbf{M}_2'' + \mathbf{M}_T = \mathbf{0},\tag{20.10}$$

lub po wstawieniu wzorów (20.7), (20.8) i (20.9)

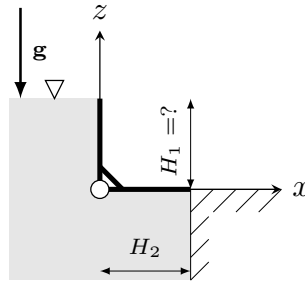
$$\frac{1}{6}b\rho gH^3\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{2}b\rho gH^3\hat{\mathbf{j}} + HT\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0} \quad (20.11)$$

pozwała na wyliczenie siły T , która utrzyma przegrodę w równowadze

$$T = \frac{1}{3}\rho gbH^2. \quad (20.12)$$

20.2. Zadanie 2

Jak powinna być wysokość przegrody H_1 , aby przegroda z rysunku 20.2 była w równowadze? Ciężar przegrody pomijamy.

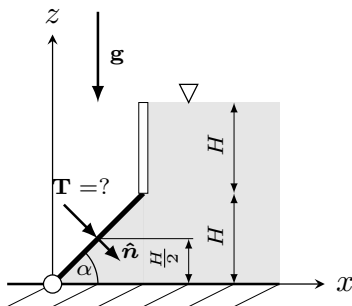


Rys. 20.2: Ilustracja do zadania 20.2

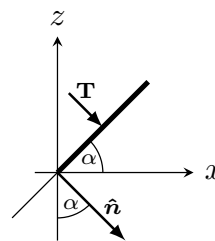
Odpowiedź: $H_1 = \sqrt{3}H_2$.

20.3. Zadanie 3

Obliczyć siłę T utrzymującą przegrodę z rysunku 20.3 w równowadze. Ciężar przegrody pomijamy.



Rys. 20.3: Ilustracja do zadania 20.3



Rys. 20.4: Ilustracja do zadania 20.3

Ciśnienie słupa wody według rysunku (20.3) wynosi

$$p'' = \rho g(2H - z). \quad (20.13)$$

Momentu siły naporu hydrostatycznego określony jest wzorem

$$\mathbf{M}'' = - \iint_S \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} p'' dS. \quad (20.14)$$

Ponieważ przegroda nie leży na żadnej płaszczyźnie układu współrzędnych, to element powierzchniowy wyraża się wzorem $dS = b dL$, gdzie elementarny odcinek dL leży na przegrodzie. Ponieważ ciśnienie (20.13) określone jest jako funkcja współrzędnej z , to i elementarny odcinek dL również musi być wyrażony za pomocą dz . Zależność pomiędzy dL i dz wyrażona jest za pomocą sinusa kąta α , który równy jest dz/dL . Zatem elementarna powierzchnia określona jest wzorem

$$dS = b dL = \frac{b dz}{\sin \alpha}. \quad (20.15)$$

Jeżeli kąt α równy jest kątowi prostemu, to dS przechodzi w $b dz$. Dla zerowego kąta α wzór (20.15) traci sens, gdyż nie da się całkować wzdłuż osi z powierzchni leżącej na osi x . Wektor wodzący (ramię) \mathbf{r} również nie jest określone wzorem (20.4), gdyż \mathbf{r} nie leży na żadnej osi układu współrzędnych. W takim przypadku wektor wodzący wyraża się następującym wzorem

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + z \hat{\mathbf{k}}. \quad (20.16)$$

Ponownie, jak w przypadku elementarnej powierzchni, należy zauważyć, że ciśnienie jest funkcją wyłącznie współrzędnej z , co oznacza, że współrzędną x we wzorze (20.16) należy przedstawić jako funkcję współrzędnej z . Zależność między nimi wynika z tangensa kąta α , który równy jest z/x . Zatem współrzędna x może być zapisana jako $z \operatorname{ctg} \alpha$, czyli wektor wodzący (20.16) przyjmie postać

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} z \operatorname{ctg} \alpha + z \hat{\mathbf{k}}. \quad (20.17)$$

Składowe wektora $\hat{\mathbf{n}}$ możemy ustalić na podstawie rysunku 20.4 jako

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}} \sin \alpha - \hat{\mathbf{k}} \cos \alpha. \quad (20.18)$$

Moment \mathbf{M} ze wzoru (20.14) może być teraz zapisany jako

$$\mathbf{M}'' = - \int_0^H z (\hat{\mathbf{i}} \operatorname{ctg} \alpha + \hat{\mathbf{k}}) \times (\hat{\mathbf{i}} \sin \alpha - \hat{\mathbf{k}} \cos \alpha) \rho g (2H - z) \frac{b dz}{\sin \alpha}. \quad (20.19)$$

Po wykonaniu mnożeń według schematu (19.11) otrzymamy

$$\mathbf{M}'' = - \frac{b \rho g \hat{\mathbf{j}}}{\sin \alpha} (\operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha + z \sin \alpha) \int_0^H (2Hz - z^2) dz. \quad (20.20)$$

Nawias zawierający trzy funkcje trygonometryczne można sprowadzić do jedynki trygonometrycznej

$$\mathbf{M}'' = - \frac{b \rho g \hat{\mathbf{j}}}{\sin \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) \left(Hz^2 - \frac{z^3}{3} \right)_0^H = - \frac{2b \rho g H^3 \hat{\mathbf{j}}}{3 \sin^2 \alpha}. \quad (20.21)$$

Moment od siły \mathbf{T} wyliczamy na podstawie wzoru

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{r}_T \times \mathbf{T}. \quad (20.22)$$

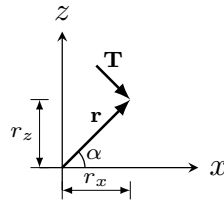
Wektor wodzący (ramię) \mathbf{r}_T wyznaczamy na podstawie rysunku 20.5 i 20.4 jako

$$\mathbf{r}_T = r_x \hat{\mathbf{i}} + r_z \hat{\mathbf{k}}. \quad (20.23)$$

Po wyznaczeniu poszczególnych współrzędnych mamy

$$\mathbf{r}_T = \hat{\mathbf{i}} \frac{H}{2} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{H}{2} \hat{\mathbf{k}}, \quad (20.24)$$

gdyż tangens kąta α równy jest ilorazowi r_z/r_x .



Rys. 20.5: Siła i ramię siły

Siłę \mathbf{T} rozkładamy na składowe identycznie jak wersor $\hat{\mathbf{n}}$ według wzoru (20.18) i rysunku 20.4

$$\mathbf{T} = T \hat{\mathbf{i}} \sin \alpha - T \hat{\mathbf{k}} \cos \alpha. \quad (20.25)$$

Ostatecznie moment \mathbf{M}_T od siły \mathbf{T} wynosi

$$\mathbf{M}_T = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{H}{2} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{H}{2} \hat{\mathbf{k}} \right) \times \left(T \hat{\mathbf{i}} \sin \alpha - T \hat{\mathbf{k}} \cos \alpha \right) = \frac{HT \hat{\mathbf{j}}}{2 \sin \alpha}. \quad (20.26)$$

W powyższym wzorze wykorzystano schematy (19.11) i jedynek trygonometryczną podobnie, jak miało to miejsce w przypadku wzoru (20.21). Warunek równowagi ma postać

$$\mathbf{M}'' + \mathbf{M}_T = \mathbf{0}. \quad (20.27)$$

Po wykorzystaniu wzorów (20.21) i (20.26) możemy zapisać, że

$$-\frac{2b\rho g H^3 \hat{\mathbf{j}}}{3 \sin^2 \alpha} + \frac{HT \hat{\mathbf{j}}}{2 \sin \alpha} = \mathbf{0}. \quad (20.28)$$

Z powyższego równania można wyznaczyć wartość siły T , która utrzyma przegrodę w równowadze.

$$T = \frac{4b\rho g H^2}{3 \sin \alpha}. \quad (20.29)$$

Rozdział 21

Ćwiczenie 12. Analiza wymiarowa

21.1. Zadanie 1

Eksperymentalnie stwierdzono, że spadek ciśnienia Δp w rurociągu zależy od jego długości L , średnicy D , chropowatości bezwzględnej k , gęstości ρ , współczynnika lepkości dynamicznej μ i prędkości średniej \bar{u} . Przetworzyć strukturę zależności funkcyjnej od zmiennych bezwymiarowych.

Dla przypomnienia w tabeli 21.1 podano cztery z siedmiu jednostek podstawowych układu SI. W tabeli 21.2 podano wybrane jednostki pochodne, które posiadają nazwy własne, a w tabeli 21.3 jednostki pochodne, które nie posiadają nazwy własnej.

Tab. 21.1: Wybrane jednostki podstawowe [3]

Wielkość	jednostka
kilogram	kg
metr	m
sekunda	s
kelwin	K

Tab. 21.2: Wybrane jednostki pochodne o nazwach własnych [3]

Wielkość	symbol	jednostka
Siła	N	kg m s^{-2}
Energia	J	$\text{kg m}^2\text{s}^{-2}$
Moc	W	$\text{kg m}^2\text{s}^{-3}$
Ciśnienie	Pa	$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$

Tab. 21.3: Wybrane jednostki pochodne bez nazw własnych [3]

Wielkość	jednostka
Powierzchnia	m^2
Objętość	m^3
Gęstość	kg m^{-3}
Prędkość	m s^{-1}
Przyspieszenie	m s^{-2}
Lepkość dynamiczna	$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$
Lepkość kinematyczna	m^2s^{-1}
Prędkość kątowna	rad s^{-1}

Struktura zależności funkcyjnej f w postaci uwikłanej, na podstawie treści zadania, ma postać

$$f(\Delta p, L, D, k, \rho, \mu, \bar{u}) = 0. \quad (21.1)$$

Mamy zatem siedem zmiennych wymiarowych $n = 7$ i trzy jednostki podstawowe $k = 3$, mianowicie kg, m, s. Zgodnie z twierdzeniem Buckinghama możemy funkcję f , w postaci uwikłanej $f(\Delta p, L, D, k, \rho, \mu, \bar{u}) = 0$, zapisać w innej postaci bezwymiarowej $f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0$, która zależy od czterech zmiennych ($n - k = 4$). Do grupy zmiennych podstawowych wybrać można np. D, ρ, \bar{u} . Można dokonać innego wyboru pod warunkiem, że zmienne o jednostkach podstawowych są liniowo niezależne. Nie można wybrać np. zmiennych podstawowych D, L i k , gdyż wszystkie trzy mają tę samą jednostkę m. Nie można również wybrać np. zmiennych podstawowych w postaci D, L i μ . Co prawda przy takim wyborze mamy trzy jednostki podstawowe kg, m, s, ale dwie pierwsze zmienne są liniowo zależne, a dokładniej mają taką samą jednostkę m. Wybór zmiennych o jednostkach podstawowych D, ρ, \bar{u} jest prawdopodobnie najprostszy i jednostki zmiennych są liniowo niezależne, więc układy równań będą stosunkowo proste do rozwiązania.

Postaci zmiennych bezwymiarowych Π_i znajdujemy w ten sposób, że jednostki inne niż jednostki podstawowe wyrażamy przez wybrane jednostki podstawowe, które są podniesione do nieznanych potęg. Jednostki inne niż podstawowe w naszym przykładzie to $\Delta p, L, k, \mu$. Pierwszą z nich, spadek ciśnienia Δp , wyrażamy w następujący sposób

$$[\Delta p] = [D]^{a_1} [\rho]^{a_2} [\bar{u}]^{a_3}. \quad (21.2)$$

Zapis ten odpowiada następującemu

$$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} = \text{m}^{a_1} (\text{kg m}^{-3})^{a_2} (\text{m s}^{-1})^{a_3} = \text{kg}^{a_2} \text{m}^{a_1 - 3a_2 + a_3} \text{s}^{-a_3}. \quad (21.3)$$

Ponieważ lewa strona równa się prawej, więc otrzymujemy następujący układ równań, odpowiednio dla kg, m, s

$$\begin{aligned} 1 &= a_2, \\ -1 &= a_1 - 3a_2 + a_3, \\ -2 &= -a_3. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Rozwiązaniami powyższego układu są

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 1, \\ a_3 &= 2, \end{aligned} \quad (21.5)$$

co daje według zależności (21.2)

$$[\Delta p] = [D]^0 [\rho]^1 [\bar{u}]^2 = [\rho] [\bar{u}]^2. \quad (21.6)$$

Zatem zmienna bezwymiarowa Π_1 , która wyraża Δp przez trzy wybrane zmienne podstawowe, ma postać

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \bar{u}^2}. \quad (21.7)$$

Drugą z jednostek wymiarowych, która nie jest jednostką z wybranej grupy jednostek podstawowych, jest długość L . Jednostkę długości wyrażamy w następujący sposób

$$[L] = [D]^{a_1} [\rho]^{a_2} [\bar{u}]^{a_3}. \quad (21.8)$$

Zapis ten odpowiada następującemu

$$\text{kg}^0 \text{m s}^0 = \text{m}^{a_1} (\text{kg m}^{-3})^{a_2} (\text{m s}^{-1})^{a_3}. \quad (21.9)$$

W zależności (21.9) zmienia się tylko lewa strona w porównaniu z zależnością (21.3). A więc układ równań, który odpowiada zależności (21.9) jest podobny do układu (21.4) z wyjątkiem lewej strony

$$\begin{aligned} 0 &= a_2, \\ 1 &= a_1 - 3a_2 + a_3, \\ 0 &= -a_3. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Rozwiązaniem powyższego układu są

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= 0, \end{aligned} \quad (21.11)$$

co daje według zależności (21.8)

$$[L] = [D]^1 [\rho]^0 [\bar{u}]^0 = [D]. \quad (21.12)$$

Zatem zmienna bezwymiarowa Π_2 ma postać

$$\Pi_2 = \frac{L}{D}. \quad (21.13)$$

Trzecia jednostka wymiarowa, którą jest chropowatość bezwzględna k , ma jednostkę identyczną jak średnica D . Zatem wynik rozumowania jest identyczny, jak miało to miejsce wyżej i wynik ma postać

$$\Pi_3 = \frac{k}{D}. \quad (21.14)$$

Czwartą z jednostek wymiarowych, która nie jest jednostką z wybranej grupy jednostek podstawowych, jest współczynnik lepkości dynamicznej μ . Jednostkę tego współczynnika wyrażamy w następujący sposób

$$[\mu] = [D]^{a_1} [\rho]^{a_2} [\bar{u}]^{a_3}. \quad (21.15)$$

Zapis ten odpowiada następującemu

$$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1} = \text{m}^{a_1} (\text{kg m}^{-3})^{a_2} (\text{m s}^{-1})^{a_3}. \quad (21.16)$$

Układ równań, który odpowiada zależności (21.16) wygląda następująco

$$\begin{aligned} 1 &= a_2, \\ -1 &= a_1 - 3a_2 + a_3, \\ -1 &= -a_3. \end{aligned} \quad (21.17)$$

Rozwiązaniami powyższego układu są

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_3 &= 1, \end{aligned} \quad (21.18)$$

co daje według zależności (21.15)

$$[\mu] = [D][\rho][\bar{u}]. \quad (21.19)$$

Zatem czwarta zmienna bezwymiarowa Π_4 ma postać

$$\Pi_4 = \frac{\mu}{D\rho\bar{u}}. \quad (21.20)$$

Strukturę zależności funkcyjnej od zmiennych bezwymiarowych ma następującą postać

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0, \quad (21.21)$$

lub po podstawieniu wzorów (21.7), (21.13), (21.14) i (21.20)

$$f\left(\frac{\Delta p}{\rho\bar{u}^2}, \frac{L}{D}, \frac{k}{D}, \frac{\mu}{D\rho\bar{u}}\right) = 0, \quad (21.22)$$

co jest odpowiedzią do zadania.

21.2. Zadanie 2

Eksperymentalnie stwierdzono, że siła F w pewnym zjawisku zależy od prędkości u , średnicy D , gęstości ρ , współczynnika lepkości dynamicznej μ i prędkości kątowej ω . Przetawić strukturę zależności funkcyjnej od zmiennych bezwymiarowych.

W zadaniu tym $n = 6$ i $k = 3$. Zatem można przetawić strukturę zależności funkcyjnej od trzech ($n - k = 3$) zmiennych bezwymiarowych $f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$ na wiele sposobów. Cztery z nich to:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{F}{u^4\omega^{-2}\rho}, \frac{D}{u\omega^{-1}}, \frac{\mu}{u^2\omega^{-1}\rho}\right) &= 0, \\ f\left(\frac{F}{u^2D^2\rho}, \frac{\omega}{uD^{-1}}, \frac{\mu}{uD\rho}\right) &= 0, \\ f\left(\frac{F}{D^4\omega^2\rho}, \frac{u}{D\omega}, \frac{\mu}{D^2\omega\rho}\right) &= 0, \\ f\left(\frac{F}{D^2\omega\mu}, \frac{u}{D\omega}, \frac{\rho}{D^{-2}\omega^{-1}\mu}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (21.23)$$

21.3. Zadanie 3

Eksperymentalnie stwierdzono, że moc pobierana przez łożysko N zależy od jego długości L , średnicy D , szerokości szczeliny δ , gęstości ρ , współczynnika lepkości dynamicznej μ , prędkości kątovej ω i obciążenia (siły) F . Przetawić strukturę zależności funkcyjnej od zmiennych bezwymiarowych.

Przyjmując za wielkości podstawowe ($n = 8$, $k = 3$) D , ρ i ω , otrzymamy następującą strukturę zależności funkcyjnej od zmiennych bezwymiarowych ($n - k = 5$)

$$f\left(\frac{N}{D^5\rho\omega^3}, \frac{F}{D^4\rho\omega^2}, \frac{\mu}{D^2\rho\omega}, \frac{L}{D}, \frac{\delta}{D}\right) = 0. \quad (21.24)$$

21.4. Zadanie 4

Eksperymentalnie stwierdzono, że siła oporu F_D poruszającego się obiektu zależy od jego prędkości u , gęstości płynu ρ , współczynnika lepkości dynamicznej μ i jego wymiaru charakterystycznego L . Przetawić strukturę zależności funkcyjnej od zmiennych bezwymiarowych.

Przyjmując za wielkości podstawowe ($n = 5$, $k = 3$) ρ , u i L , otrzymamy następującą strukturę zależności funkcyjnej od zmiennych bezwymiarowych ($n - k = 2$)

$$f\left(\frac{F_D}{\rho u^2 L^2}, \frac{\mu}{\rho u L}\right) = 0. \quad (21.25)$$

Druga liczba bezwymiarowa, to liczba Reynoldsa Re (lub jej odwrotność). Jeżeli pierwszą liczbę bezwymiarową można wyrazić w sposób jawny przez drugą, to z powyższej zależności otrzymamy

$$\frac{F_D}{\rho u^2 L^2} = f(Re). \quad (21.26)$$

Lewa strona podzielona przez 2 jest współczynnikiem oporu c_D , a więc

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u^2 L^2} = f(Re). \quad (21.27)$$

Zależności na współczynnik oporu powinniśmy eksperymentalnie poszukiwać jako funkcję liczby Reynoldsa. Co istotne poszukujemy bezwymiarowego współczynnika oporu c_D jako funkcję tylko jednej bezwymiarowej liczby Reynoldsa, zamiast poszukiwać siły jako funkcji czterech zmiennych wymiarowych

$$F_D = f(u, \rho, \mu, L), \quad (21.28)$$

co jest znacznie trudniejsze i zależy od przyjętego układu jednostek. Wyznaczanie c_D w funkcji Re w postaci (21.27) jest standardową procedurą eksperymentalną lub numeryczną. Dodatkowo funkcją dwóch zmiennych można przedstawić w postaci wykresu, co nie jest możliwe w przypadku funkcji czterech zmiennych. Okazuje się również, że w pewnych zakresach liczby Reynoldsa współczynnik oporu zachowuje stałą wartość. Dlatego np. współczynniki oporu samochodu podawane są w postaci stałej wartości.

Rozdział 22

Ćwiczenie 13. Potencjał zespolony

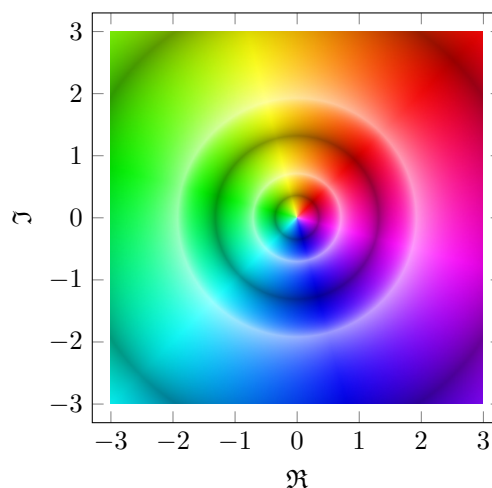
22.1. Zadanie 1. Przepływ jednorodny

Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = (a - ib)z, \quad (22.1)$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

Funkcja w określona wzorem (22.1) jest funkcją zespoloną argumentu zespolonego i nie da się łatwo przedstawić graficznie tradycyjnymi metodami, gdyż mamy do czynienia z czterema wymiarami. Jedną z metod przedstawiania funkcji w jest metoda kolorowania dziedziny. Za pomocą tej metody można przedstawić potencjał w (22.1) na wykresie 22.1 dla $a = b = 1$. Punktom płaszczyzny zespolonej, która jest dziedziną w , przyporządkowane są kolory w ten sposób, że wartość funkcji zespolonej, będącej liczbą zespoloną, reprezentowana jest odcieniem koloru z koła barw, a moduł tej liczby przedstawiany jest za pomocą jasności.



Rys. 22.1: Wykres funkcji (22.1)

W celu zbadania potencjału zespolonego (22.1) wykorzystujemy postać argumentu zespolonego $z = x + iy$ i rozdzielamy część rzeczywistą od urojonej, aby

otrzymać postać potencjału w według zapisu (7.15) $w(z) = \varphi + i\psi$. W przypadku wzoru (22.1) jest to szczególnie proste, gdyż wystarczy przemnożyć dwie funkcje zespolone

$$w(z) = (a - ib)(x + iy) = ax + iay - ibx - byi^2 = ax + by + i(ay - bx). \quad (22.2)$$

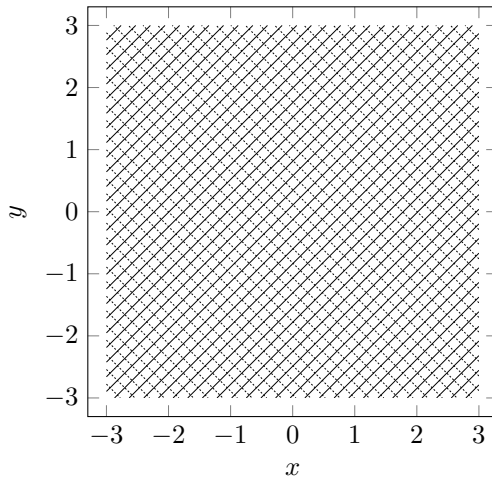
Część rzeczywista funkcji (22.2) jest potencjałem rzeczywistym φ , który zapisujemy jako

$$\varphi(x, y) = ax + by, \quad (22.3)$$

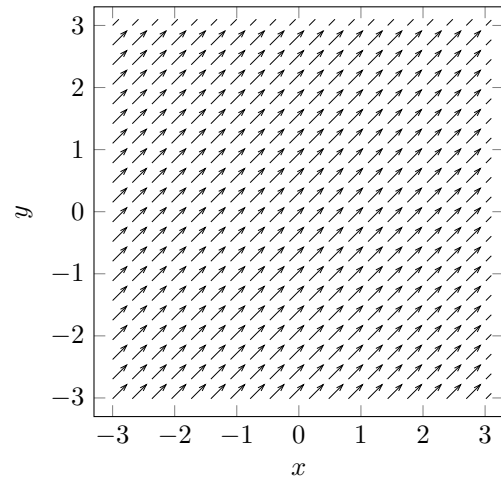
a część urojona funkcji (22.2) jest funkcją prądu ψ , która ma następującą postać

$$\psi(x, y) = ay - bx. \quad (22.4)$$

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ dla $a = b = 1$ pokazane są jako izoliny na wykresie 22.2 w ten sposób, że linie prądu oznaczane są liniami ciągłymi, a izoliny potencjału rzeczywistego liniami przerywanymi.



Rys. 22.2: Izoliny φ (22.3) i ψ (22.4)



Rys. 22.3: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.6)

Pole prędkości sprzężonej, zgodnie ze wzorem (7.16), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.1)

$$\frac{dw}{dz} = a - ib = u_x - iu_y. \quad (22.5)$$

Pamiętając, że pochodna potencjału $\frac{dw}{dz}$ przedstawia prędkość sprzężoną, możemy przedstawić składowe prędkości jako

$$u_x = a, \quad u_y = b. \quad (22.6)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ pokazane jest na wykresie 22.3 dla $a = b = 1$ w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.1) opisuje właśnie przepływ jednorodny.

Dużo prościej można analizować potencjały zespolone przy użyciu komputera. Nie trzeba nawet dekomponować potencjału (22.1) na część rzeczywistą i urojoną (22.2). Do wizualizacji potencjału rzeczywistego, funkcji prądu i pola prędkości można wykorzystać wolne oprogramowanie, na przykład GNU Octave [1]. Minimalny skrypt, który wykreśla izoliny potencjału rzeczywistego i linie prądu, pokazany jest na listingu 22.4. Natomiast minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.5. Jednak bezmyślne wykreślanie dowolnych potencjałów zespolonych narażone jest często na niepowodzenie, gdyż funkcje zespolone są często wielowartościowe, co może prowadzić do rezultatów, które nie są zgodne z oczekiwaniami. Przykłady takich potencjałów podane będą w dalszej części tego ćwiczenia.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=(1-1i).*z;
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.4: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ (22.3) i ψ (22.4)

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=(1-1i);
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

Rys. 22.5: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.6)

22.2. Zadanie 2. Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{2}$

Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = \frac{\beta}{\pi} z^{\frac{\pi}{\beta}}, \quad (22.7)$$

gdzie kąt $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Przyjmując za β wartość $\frac{\pi}{2}$, można zapisać wzór (22.7) w prostszej postaci

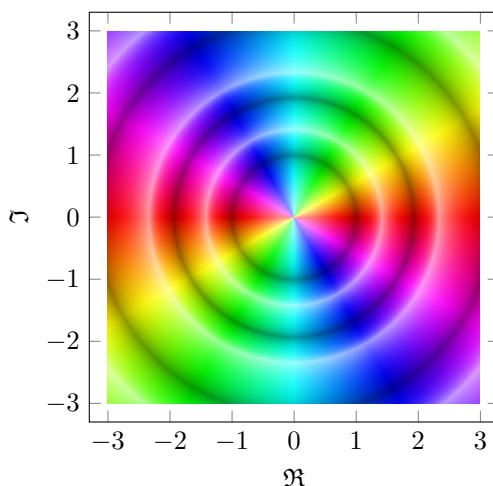
$$w(z) = \frac{1}{2} z^2. \quad (22.8)$$

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.8), przedstawiona jest na wykresie 22.6 metodą kolorowania dziedziny.

W celu zbadania potencjału zespolonego (22.8) wykorzystujemy postać argumentu zespolonego $z = x + iy$ i rozdzielamy część rzeczywistą od urojonej, aby

otrzywać postać potencjału w według zapisu (7.15) $w(z) = \varphi + i\psi$. We wzorze (22.8) podnosimy $x + iy$ do kwadratu, otrzymując

$$w(z) = \frac{1}{2}(x + iy)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + i2xy + i^2y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + ixy. \quad (22.9)$$



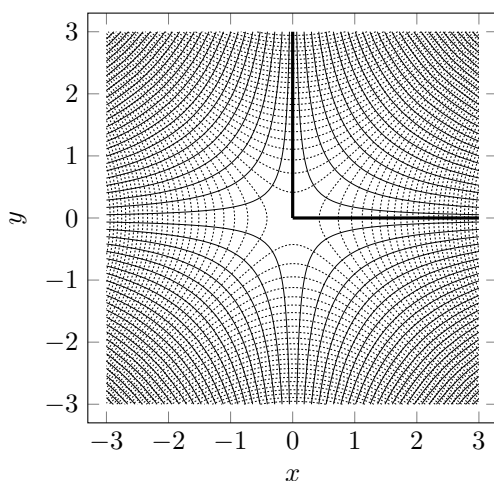
Rys. 22.6: Wykres funkcji (22.8)

Część rzeczywista funkcji (22.9) jest potencjałem rzeczywistym φ , który zapisujemy jako

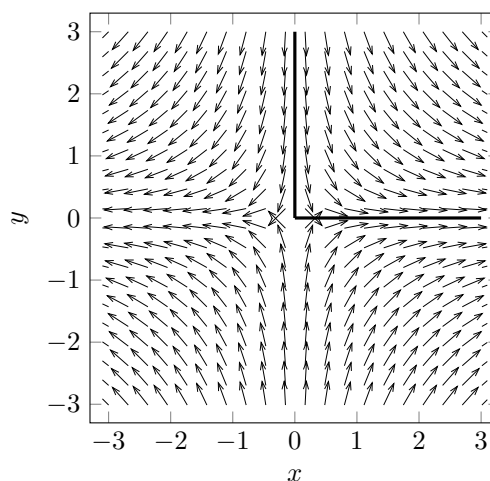
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad (22.10)$$

a część urojona funkcji (22.9) jest funkcją prądu ψ , która ma następującą postać

$$\psi(x, y) = xy. \quad (22.11)$$



Rys. 22.7: Izolinie φ (22.10) i ψ (22.11)



Rys. 22.8: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.13)

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ pokazane są jako izolacje na wykresie 22.7. Linie ciągłe związane są z liniami prądu, a izolacje potencjału rzeczywistego związane są z liniami przerywanymi.

Pole prędkości sprzężonej, zgodnie ze wzorem (7.16), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.8)

$$\frac{dw}{dz} = z = x + iy = u_x - iu_y. \quad (22.12)$$

Pamiętając, że pochodna potencjału $\frac{dw}{dz}$ przedstawia prędkość sprzężoną, możemy przedstawić składowe prędkości jako

$$u_x = x, \quad u_y = -y. \quad (22.13)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ pokazane jest na wykresie 22.8 w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.8) opisuje opływ naroża o kącie prostym.

Za pomocą komputera nie trzeba dekomponować potencjału zespolonego (22.8) na część rzeczywistą (22.10) i urojoną (22.11). Minimalny skrypt GNU Octave[1], który wykreśla izolinie potencjału rzeczywistego i linie prądu, pokazany jest na listingu 22.9. Minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.10.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=1/2*z.^2;
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.9: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ (22.10) i ψ (22.11)

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=z;
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

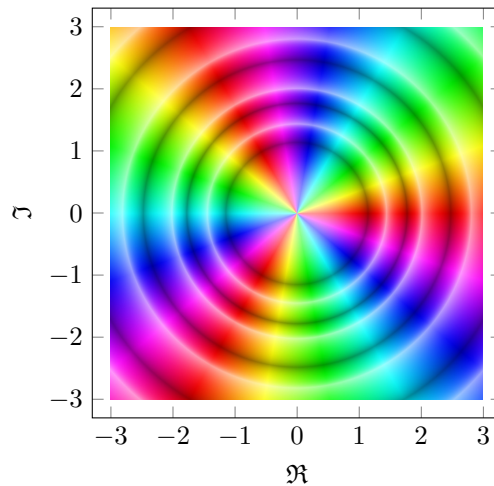
Rys. 22.10: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.13)

22.3. Zadanie 3. Opływ naroża o kącie $\frac{\pi}{3}$

Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = \frac{\beta}{\pi} z^{\frac{\pi}{\beta}}, \quad (22.14)$$

gdzie kąt $\beta = \frac{\pi}{3}$.



Rys. 22.11: Wykres funkcji (22.15)

Przyjmując za β wartość $\frac{\pi}{3}$, można zapisać wzór (22.14) w prostszej postaci

$$w(z) = \frac{1}{3}z^3. \quad (22.15)$$

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.15), przedstawiona jest na wykresie 22.11 metodą kolorowania dziedziny.

W celu zbadania potencjału zespolonego (22.15) wykorzystujemy postać argumentu zespolonego $z = x + iy$ i rozdzielamy część rzeczywistą od urojonej, aby otrzymać postać potencjału w według zapisu (7.15) $w(z) = \varphi + i\psi$. We wzorze (22.15) podnosimy $x + iy$ do sześcianu, otrzymując

$$w(z) = \frac{1}{3}(x + iy)^3 = \frac{1}{3}(x^3 + i3x^2y + i^23xy^2 + i^3y^3) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + i(x^2y - \frac{1}{3}y^3). \quad (22.16)$$

Część rzeczywista funkcji (22.16) jest potencjałem rzeczywistym φ , który zapisujemy jako

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2, \quad (22.17)$$

a część urojona funkcji (22.16) jest funkcją prądu ψ , która ma następującą postać

$$\psi(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (22.18)$$

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ pokazane są jako izoliny na wykresie 22.12. Linie ciągłe związane są z liniami prądu, a izoliny potencjału rzeczywistego związane są z liniami przerywanymi.

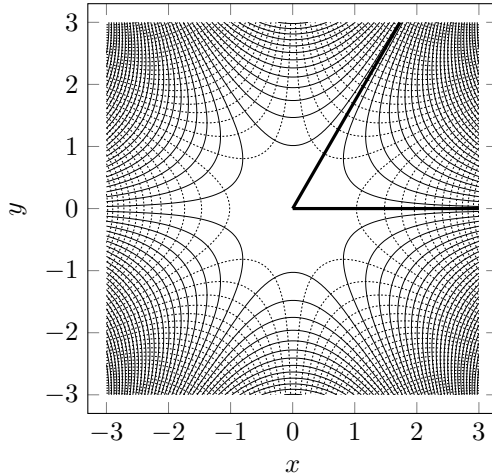
Pole prędkości sprzężonej, zgodnie ze wzorem (7.16), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.15)

$$\frac{dw}{dz} = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u_x - iu_y. \quad (22.19)$$

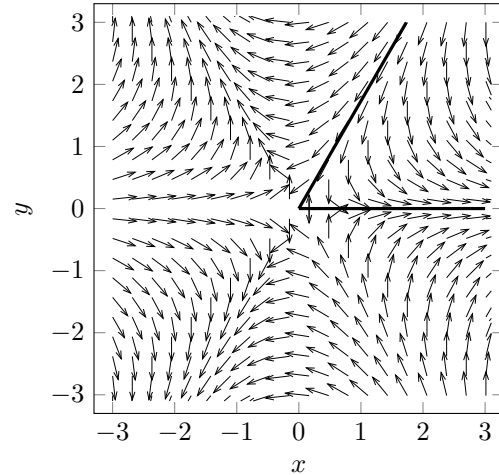
Pamiętając, że pochodna potencjału $\frac{dw}{dz}$ przedstawia prędkość sprzężoną, możemy przedstawić składowe prędkości jako

$$u_x = x^2 - y^2, \quad u_y = -2xy. \quad (22.20)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ pokazane jest na wykresie 22.13 w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.15) opisuje opływ naroża o kącie sześćdziesięciu stopni.



Rys. 22.12: Izolinie φ (22.17) i ψ (22.18)



Rys. 22.13: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.20)

Za pomocą komputera nie trzeba dekomponować potencjału zespolonego (22.15) na część rzeczywistą (22.17) i urojoną (22.18). Minimalny skrypt GNU Octave[1], który wykreśla izolinie potencjału rzeczywistego i linie prądu, pokazany jest na listingu 22.14. Minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.15.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=1/3*z.^3;
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.14: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ (22.17) i ψ (22.18)

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=z.^2;
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

Rys. 22.15: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.20)

22.4. Zadanie 4. Przepływ zawracający

Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

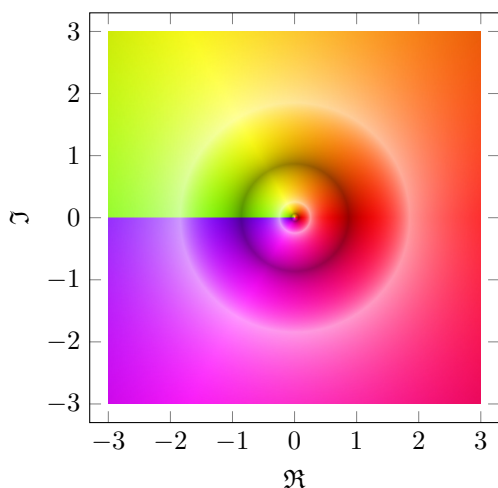
$$w(z) = \frac{\beta}{\pi} z^{\frac{\pi}{\beta}}, \quad (22.21)$$

gdzie kąt $\beta = 2\pi$.

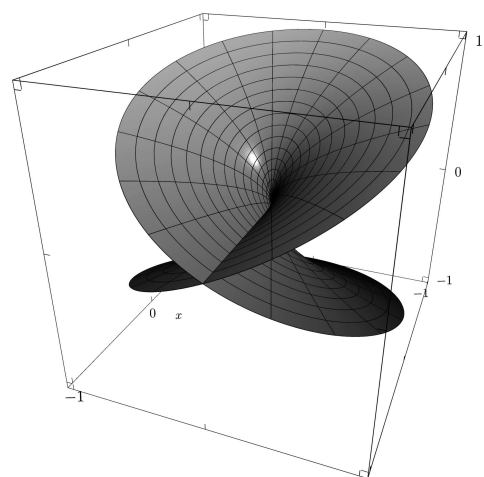
Przyjmując za β wartość 2π , można zapisać wzór (22.21) w prostszej postaci

$$w(z) = 2\sqrt{z}. \quad (22.22)$$

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.22), przedstawiona jest na wykresie 22.16 metodą kolorowania dziedziny. Na ujemnej części osi rzeczywistej widać nieciągłość. Jest to tak zwany zbiór punktów rozgałęzienia, który widoczny jest na wykresie 22.17 powierzchni Riemanna dla funkcji $w(z) = \sqrt{z}$.



Rys. 22.16: Wykres funkcji (22.22)



Rys. 22.17: Powierzchnia Riemanna dla funkcji \sqrt{z}

Badanie potencjału zespolonego (22.22) we współrzędnych kartezjańskich jest trudne. Dużo łatwiejsza analiza możliwa jest w układzie biegunowym. W tym celu do badania potencjału zespolonego (22.22) wykorzystujemy postać wykładniczą liczby zespolonej $z = re^{i\alpha}$ i tożsamości Eulera $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, aby zgodnie ze wzorem (7.17) zapisać potencjał zespolony we współrzędnych biegunowych

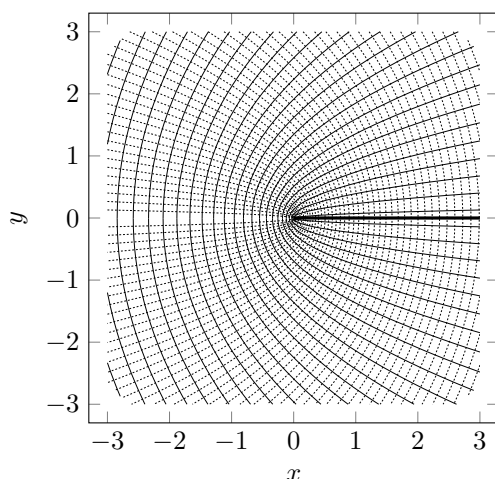
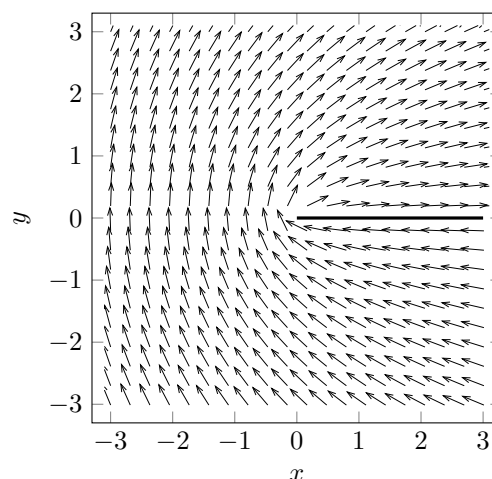
$$w(z) = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{r} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (22.23)$$

Dzięki powyższemu zapisowi możliwe jest podanie wzoru na potencjał rzeczywisty φ , którym jest częścią rzeczywistą wzoru (22.23), w układzie biegunowym

$$\varphi(r, \alpha) = 2\sqrt{r} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (22.24)$$

a część urojona funkcji (22.23) jest funkcją prądu ψ w układzie biegunowym, która ma następującą postać

$$\psi(r, \alpha) = 2\sqrt{r} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (22.25)$$

Rys. 22.18: Izolinie φ (22.24) i ψ (22.25)Rys. 22.19: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.27)

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ pokazane są jako izolinie na wykresie 22.18. Linie ciągłe związane są z liniami prądu, a izolinie potencjału rzeczywistego związane są z liniami przerywanymi.

Pole prędkości sprzężonej w układzie biegunowym, zgodnie ze wzorem (7.18), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.23)

$$e^{i\alpha} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\alpha}{2} + i \frac{1}{\sqrt{r}} \sin \frac{\alpha}{2} = u_r - i u_\alpha. \quad (22.26)$$

Pamiętając, że pochodna potencjału $e^{i\alpha} \frac{dw}{dz}$ przedstawia prędkość sprzężoną, możemy przedstawić składowe prędkości w układzie biegunowym jako

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad u_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (22.27)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ pokazane jest na wykresie 22.19 w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.22) opisuje przepływ zawracający wokół dodatniej półosi liczb rzeczywistych.

Za pomocą komputera nie trzeba dekomponować potencjału zespolonego (22.22) na część rzeczywistą (22.24) i urojoną (22.25), aby wykreślić izolinie potencjału rzeczywistego i linie prądu. Minimalny skrypt GNU Octave[1], który wykreśla izolinie w układzie kartezjańskim, pokazany jest na listingu 22.20.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=2*sqrt(z);
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.20: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ i ψ z potencjału (22.22)

Bezmyślne wykreślenie prędkości w postaci $\frac{dw}{dz} = 1/\sqrt{z}$ da rezultaty niezgodne z oczekiwaniami ze względu na to, że funkcja \sqrt{z} jest wielowartościowa i pole prędkości będzie tylko w połowie zwrócone we właściwą stronę. Dokładniej mówiąc, oś x będzie rozgraniczała pole prędkości poprawne od niepoprawnego.

Minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.21. W porównaniu z poprzednimi wersjami mamy tu do czynienia z dodatkową konwersją na współrzędne biegunowe.

```
[r,alpha]=meshgrid(linspace(0.2,3,20),linspace(0,2*pi,60));
[X,Y]=pol2cart(alpha,r);
w=1./sqrt(r).*cos(alpha/2)+1i./sqrt(r).*sin(alpha/2);
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
ur=real(w).*cos(alpha)+imag(w).*sin(alpha);
ua=real(w).*sin(alpha)-imag(w).*cos(alpha);
quiver(X,Y,ur,ua)
```

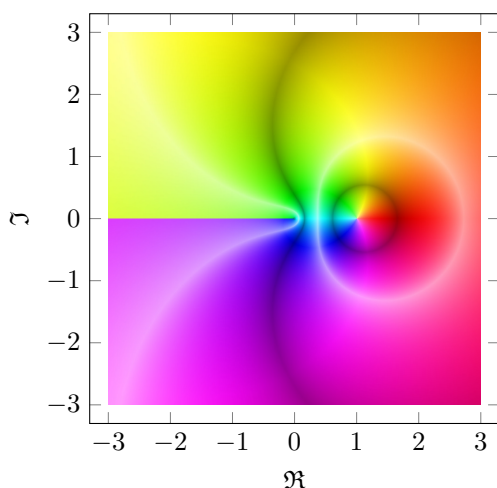
Rys. 22.21: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{u}{|u|}$ (22.27) w układzie biegunowym

22.5. Zadanie 5. Źródła i upusty

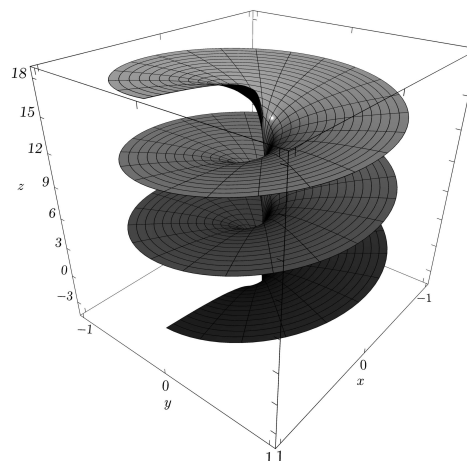
Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \text{Ln } z, \quad (22.28)$$

gdzie \dot{V} jest natężenie przepływu.



Rys. 22.22: Wykres funkcji (22.28)



Rys. 22.23: Fragment powierzchni Riemanna dla funkcji $\text{Ln } z$

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.28), przedstawiona jest na wykresie 22.22 metodą kolorowania dziedziny. Na ujemnej części osi rzeczywistej widać nieciągłość. Jest to tak zwany zbiór punktów rozgałęzienia, który

widoczny jest na wykresie 22.23 powierzchni Riemanna dla funkcji $w(z) = \text{Ln } z$. Logarytm zespolony jest funkcją wielowartościową, co szczególnie widoczne jest przy wykorzystaniu postaci wykładniczej liczby zespolonej

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \text{Ln } z = \frac{\dot{V}}{2\pi} \text{Ln} \left(r e^{i(\alpha + 2\pi k)} \right) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln r + i \frac{\dot{V}}{2\pi} (\alpha + 2\pi k), \quad (22.29)$$

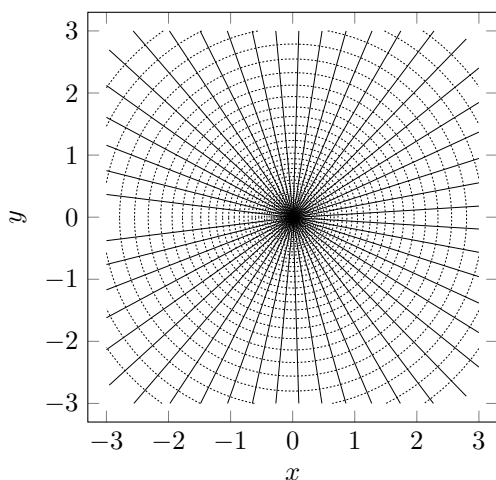
gdzie k jest liczbą całkowitą. Analityczne badanie potencjału zespolonego (22.28) jest szczególnie proste we współrzędnych biegunowych. Dzięki zapisowi (22.29) możliwe jest podanie wzoru na potencjał rzeczywisty φ , którym jest częścią rzeczywistą powyższego wzoru, w układzie biegunowym

$$\varphi(r, \alpha) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln r. \quad (22.30)$$

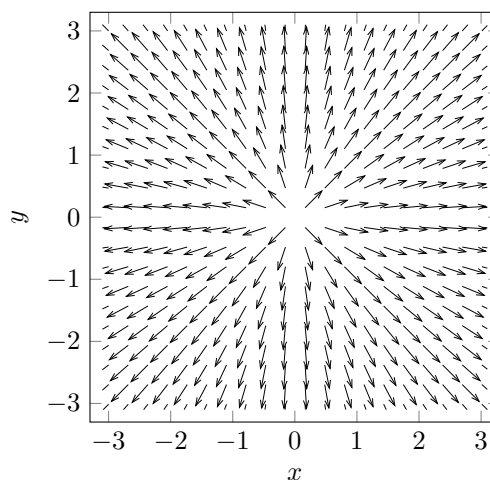
Część urojona potencjału (22.29) jest funkcją prądu ψ w układzie biegunowym, która ma następującą postać

$$\psi(r, \alpha) = \frac{\dot{V}}{2\pi} (\alpha + 2\pi k). \quad (22.31)$$

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ pokazane są jako izoliny na wykresie 22.24 dla $\dot{V} = 2\pi$. Linie ciągle związane są z liniami prądu, a izoliny potencjału rzeczywistego związane są z liniami przerywanymi.



Rys. 22.24: Izoliny φ (22.30) i ψ (22.31)



Rys. 22.25: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.33) lub (22.35)

Pole prędkości sprzężonej w układzie biegunowym, zgodnie ze wzorem (7.18), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.29)

$$e^{i\alpha} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\dot{V}}{2\pi r} = u_r - i u_\alpha. \quad (22.32)$$

Prędkość sprzężona ma tylko jedną niezerową składową w układzie biegunowym

$$u_r = \frac{\dot{V}}{2\pi r}, \quad u_\alpha = 0. \quad (22.33)$$

O ile przedstawienie potencjału zespolonego (22.28) w układzie kartezjańskim jest trudne, o tyle prędkość zespolona w postaci

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\dot{V}}{2\pi z}, \quad (22.34)$$

może być zapisana jako

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\dot{V}\bar{z}}{2\pi z\bar{z}} = \frac{\dot{V}}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{\dot{V}}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = u_x - iu_y. \quad (22.35)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi)$ lub $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ dla $\dot{V} = 2\pi$ pokazane jest na wykresie 22.25 w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.28) opisuje wypływ ze źródła. Upust różni się od źródła wyłącznie znakiem przy potencjale (22.28).

Za pomocą komputera nie trzeba dekomponować potencjału zespolonego (22.28) na część rzeczywistą (22.30) i urojoną (22.31), aby wykreślić izoliny potencjału rzeczywistego i linie prądu. Minimalny skrypt GNU Octave[1], który wykreśla izoliny w układzie kartezjańskim, pokazany jest na listingu 22.26. Minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości w układzie kartezjańskim, pokazany jest na listingu 22.27.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=log(z);
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

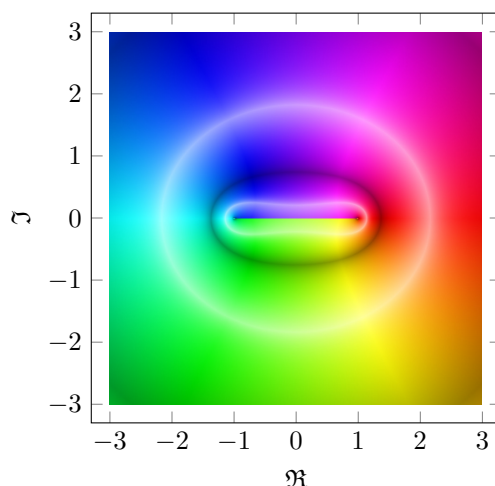
Rys. 22.26: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ i ψ z potencjału (22.28)

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=1./z;
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

Rys. 22.27: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.35)

Ponieważ potencjały rzeczywiste i funkcja prądu opisane są równaniami różniczkowymi liniowymi, więc można rozważać ich superpozycję. Prostym przykładem jest połączenie dodatniego potencjału (źródła) (22.28) z jego wartością ujemną (upustem). Oba potencjały zostają oddalone od początku układu wzdłuż osi liczb rzeczywistych o -1 i 1

$$w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \text{Ln}(z+1) - \frac{\dot{V}}{2\pi} \text{Ln}(z-1) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \text{Ln} \frac{z+1}{z-1}. \quad (22.36)$$

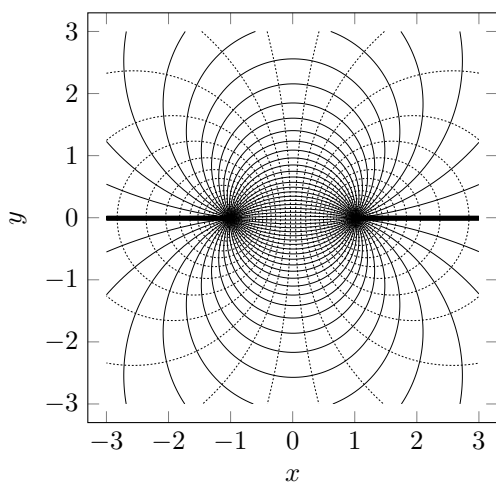
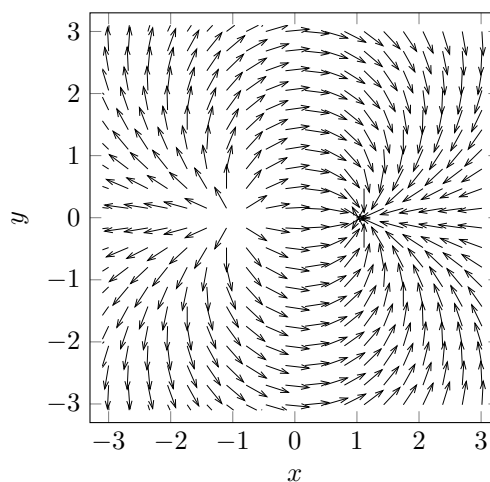


Rys. 22.28: Wykres funkcji (22.36)

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.36), przedstawiona jest na wykresie 22.28 metodą kolorowania dziedzi.

Pole prędkości sprzężonej, zgodnie ze wzorem (7.16), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.36)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\dot{V}}{2\pi} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} \right) = -\frac{\dot{V}}{\pi} \frac{1}{z^2-1}. \quad (22.37)$$

Rys. 22.29: Izolinie φ i ψ dla potencjału zespolonego (22.36)Rys. 22.30: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.37)

Za pomocą komputera nie trzeba dekomponować potencjału zespolonego (22.36) na część rzeczywistą, aby wykreślić izolinie potencjału rzeczywistego i linie prądu. Minimalny skrypt GNU Octave[1], który wykreśla izolinie w układzie kartezjańskim, pokazany jest na listingu 22.31. Wykreślony potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ pokazane są jako izolinie na wykresie 22.29 dla $\dot{V} = 2\pi$. Linie ciągłe związane są z liniami prądu, a izolinie potencjału rzeczywistego związane są z liniami

przerzywanymi. Minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości w układzie kartezjańskim dla $\dot{V} = 2\pi$, pokazany jest na listingu 22.32. Znormalizowane pole prędkości (22.37) pokazane jest na wykresie 22.30.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=log((z+1)./(z-1));
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.31: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ i ψ z potencjału (22.36)

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=-2./(z.^2-1);
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

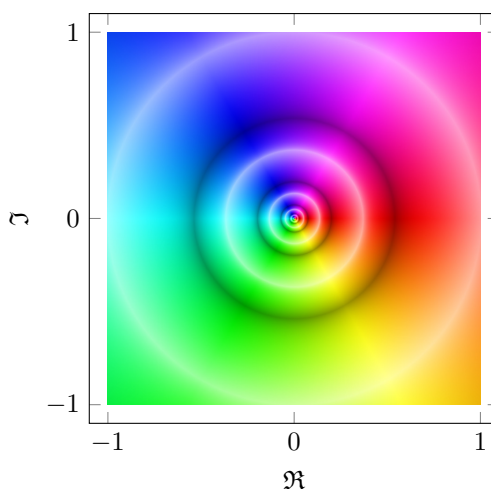
Rys. 22.32: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.37)

22.6. Zadanie 6. Dipol

Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = \frac{M}{2\pi z}, \quad (22.38)$$

gdzie M jest momentem dipola.



Rys. 22.33: Wykres funkcji (22.38)

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.38), przedstawiona jest na wykresie 22.33 metodą kolorowania dziedzin. Wzór (22.38) otrzymujemy z superpozycji źródła i upustu danego wzorem (22.36), gdy wzajemna odległość źródła i upustu dąży do zera, a natężenie przepływu \dot{V} dąży do nieskończoności.

Analityczne badanie potencjału zespolonego (22.38) jest możliwe zarówno we współrzędnych biegunowych, jak i współrzędnych kartezjańskich. We współrzędnych kartezjańskich wykorzystujemy postać argumentu zespolonego $z = x + iy$ i rozdzielamy część rzeczywistą od urojonej, aby otrzymać postać potencjału w według zapisu (7.15) $w(z) = \varphi + i\psi$. Wzór (22.38) mnożymy i dzielimy przez liczbę zespoloną sprzężoną \bar{z} , otrzymując

$$w(z) = \frac{M\bar{z}}{2\pi z\bar{z}} = \frac{M}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right). \quad (22.39)$$

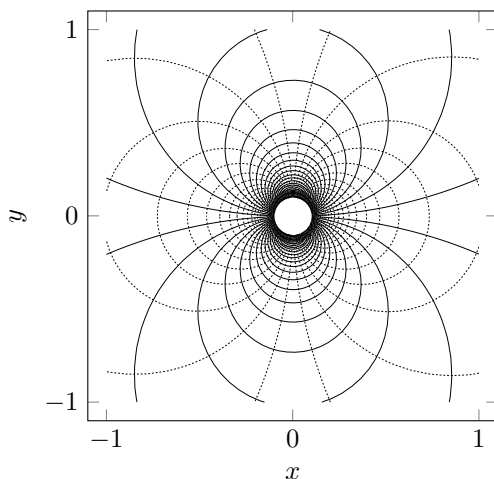
Część rzeczywista funkcji (22.39) jest potencjałem rzeczywistym φ , który zapisujemy jako

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (22.40)$$

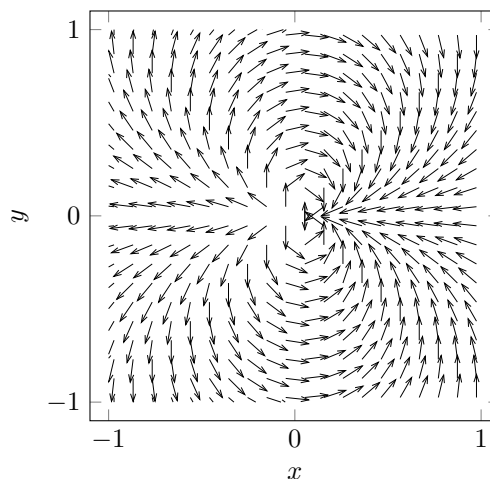
a część urojona funkcji (22.39) jest funkcją prądu ψ , która ma następującą postać

$$\psi(x, y) = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (22.41)$$

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ dla $M = 2\pi$ pokazane są jako izoliny na wykresie 22.34 w ten sposób, że linie prądu oznaczane są liniami ciągłymi, a izoliny potencjału rzeczywistego liniami przerywanymi.



Rys. 22.34: Izoliny φ i ψ dla potencjału zespolonego (22.39)



Rys. 22.35: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.42)

Pole prędkości sprzężonej, zgodnie ze wzorem (7.16), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.38)

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{M}{2\pi z^2} = -\frac{M\bar{z}^2}{2\pi(z\bar{z})^2} = -\frac{M(x^2 - y^2)}{2\pi(x^2 + y^2)^2} + i \frac{Mxy}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \quad (22.42)$$

Pamiętając, że pochodna potencjału $\frac{dw}{dz}$ przedstawia prędkość sprzężoną, możemy przedstawić składowe prędkości jako

$$u_x = -\frac{M(x^2 - y^2)}{2\pi(x^2 + y^2)^2}, \quad u_y = -\frac{Mxy}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \quad (22.43)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ pokazane jest na wykresie 22.35 dla $M = 2\pi$ w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.38) opisuje przepływ typu dipol, który wynika z połączenia źródła i upustu, które znajdują się w tym samym miejscu. Warto porównać pole prędkości z wykresu 22.30 z polem z wykresu 22.35.

Analizowanie potencjału zespolonego (22.38) przy użyciu komputera jest prostsze, gdyż nie trzeba nawet dekomponować tego potencjału na część rzeczywistą i urojoną. Minimalny skrypt GNU Octave [1], który wykreśla izoliny potencjału rzeczywistego i linie prądu, pokazany jest na listingu 22.36. Natomiast minimalny skrypt GNU Octave [1] umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.37.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-1,1,100));
z=complex(x,y);
w=1./z;
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.36: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ i ψ z potencjału (22.38)

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-1,1,20));
z=complex(x,y);
w=-1./(z.^2);
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

Rys. 22.37: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.42)

22.7. Zadanie 7. Wir

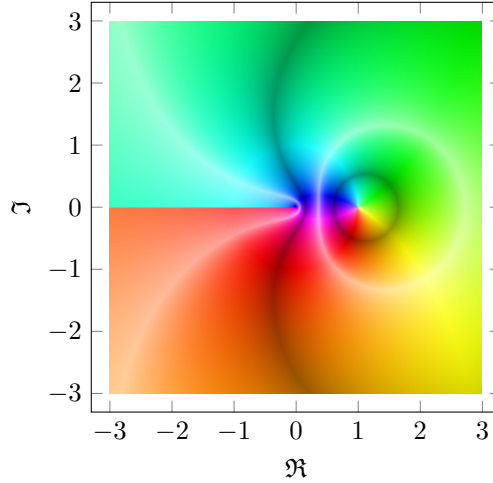
Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = i\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z, \quad (22.44)$$

gdzie Γ jest cyrkulacją, która charakteryzuje intensywność krążenia prędkości wokół wiru.

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.44), przedstawiona jest na wykresie 22.38 metodą kolorowania dziedziny. Porównanie wykresu

22.38 i wykresu 22.22 wskazują na duże podobieństwo. Podobnie jest z wzorami definiującymi oba potencjały (22.44) i (22.28). Poza stałymi oba wzory różnią się tylko jednostką urojoną, która pojawiła się we wzorze (22.44).

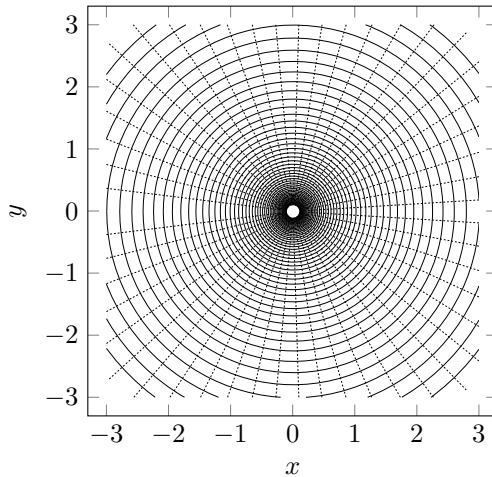


Rys. 22.38: Wykres funkcji (22.44)

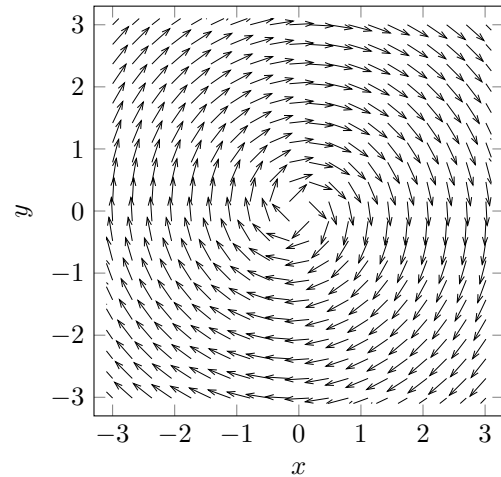
W przypadku analizy potencjału (22.44), podobnie jak miało to miejsce dla potencjału zespolonego źródła, również można wykorzystać postać wykładniczą liczby zespolonej

$$w(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z = i \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} \left(r e^{i(\alpha + 2\pi k)} \right) = -\frac{\Gamma}{2\pi} (\alpha + 2\pi k) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad (22.45)$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.



Rys. 22.39: Izolinie φ i ψ dla potencjału zespolonego (22.44)



Rys. 22.40: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.48)

Dzięki zapisowi (22.45) możliwe jest podanie wzoru na potencjał rzeczywisty φ , którym jest część rzeczywista powyższego wzoru, w układzie biegunowym

$$\varphi(r, \alpha) = -\frac{\Gamma}{2\pi} (\alpha + 2\pi k). \quad (22.46)$$

Część urojona potencjału (22.45) jest funkcją prądu ψ w układzie biegunowym, która ma następującą postać

$$\psi(r, \alpha) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (22.47)$$

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ pokazane są jako izolinie na wykresie 22.39 dla $\Gamma = 2\pi$. Linie ciągłe związane są z liniami prądu, a izolinie potencjału rzeczywistego związane są z liniami przerywanymi. Wzory (22.46) i (22.47) można porównać ze wzorami (22.30) i (22.31). Widać, że potencjały rzeczywiste i funkcje prądu zamienione są miejscami.

Pole prędkości sprzężonej w układzie biegunowym, zgodnie ze wzorem (7.18), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.45)

$$e^{i\alpha} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + i \frac{\partial\psi}{\partial r} = i \frac{\Gamma}{2\pi r} = u_r - iu_\alpha. \quad (22.48)$$

Prędkość sprzężona ma tylko jedną niezerową składową w układzie biegunowym

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (22.49)$$

Przedstawienie potencjału zespolonego (22.44) w układzie kartezjańskim jest trudne, ale prędkość zespolona w postaci

$$\frac{dw}{dz} = i \frac{\Gamma}{2\pi z}, \quad (22.50)$$

może być zapisana jako

$$\frac{dw}{dz} = i \frac{\Gamma \bar{z}}{2\pi z \bar{z}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = u_x - iu_y. \quad (22.51)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi)$ lub $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ dla $\Gamma = 2\pi$ pokazane jest na wykresie 22.40 w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.44) opisuje wir. Wir różni się od źródła zamianą miejscami funkcji prądu z potencjałem rzeczywistym.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=i.*log(z);
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.41: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ i ψ z potencjału (22.44)

Analiza potencjału zespolonego (22.44) przy użyciu komputera jest prostsza, gdyż nie trzeba dekomponować tego potencjału na część rzeczywistą i urojoną. Do wizualizacji potencjału rzeczywistego, funkcji prądu i pola prędkości można wykorzystać GNU Octave [1]. Minimalny skrypt, który wykreśla izolinie potencjału rzeczywistego i linie prądu, pokazany jest na listingu 22.41. Natomiast minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.42.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=i./z;
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

Rys. 22.42: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.48)

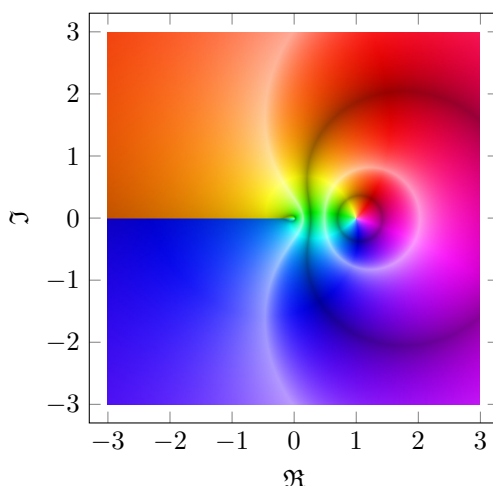
22.8. Zadanie 8. Źródło wirowe

Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = \frac{\dot{V}-i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z, \quad (22.52)$$

gdzie \dot{V} jest natężenie przepływu, a Γ jest cyrkulacją.

Potencjał zespolony (22.52) jest różnicą potencjału źródła (22.28) i potencjału wiru (22.44). Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.52), przedstawiona jest na wykresie 22.43 metodą kolorowania dziedziny.



Rys. 22.43: Wykres funkcji (22.52)

Badanie potencjału zespolonego (22.52) we współrzędnych kartezjańskich jest trudne. Łatwiej można to zrobić w układzie biegunowym. W tym celu wykorzystujemy postać wykładniczą liczby zespolonej i tożsamości Eulera, aby zgodnie ze wzorem (7.17) zapisać potencjał zespolony we współrzędnych biegunowych

$$w(z) = \frac{\dot{V}-i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z = \frac{\dot{V}-i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} (re^{i(\alpha+2\pi k)}) = \frac{\dot{V}-i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i(\alpha + 2\pi k)) = \frac{1}{2\pi} (\dot{V} \ln r + \Gamma(\alpha + 2\pi k)) + i \frac{1}{2\pi} (\dot{V}(\alpha + 2\pi k) - \Gamma \ln r). \quad (22.53)$$

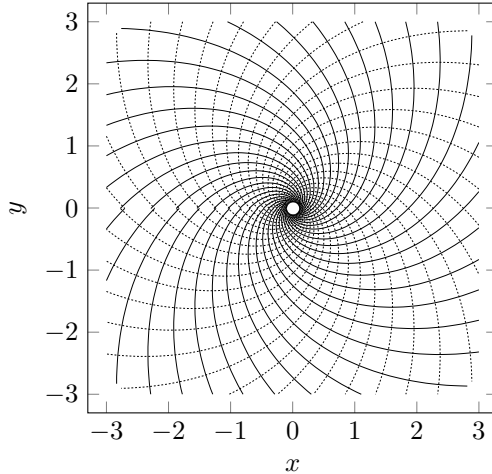
Dzięki zapisowi (22.53) możliwe jest podanie wzoru na potencjał rzeczywisty φ , którym jest częścią rzeczywistą powyższego wzoru, w układzie biegunowym

$$\varphi(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} (\dot{V} \ln r + \Gamma(\alpha + 2\pi k)). \quad (22.54)$$

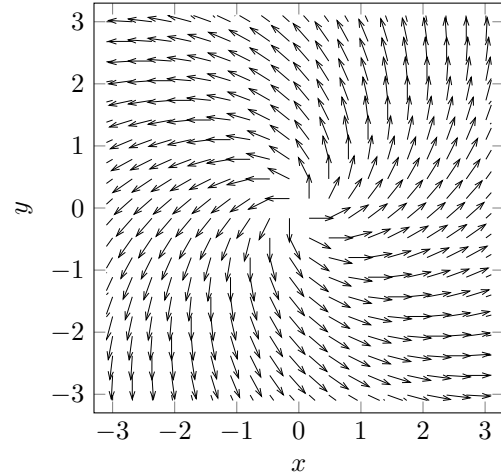
Część urojona potencjału (22.53) jest funkcją prądu ψ w układzie biegunowym, która ma następującą postać

$$\psi(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \left(\dot{V}(\alpha + 2\pi k) - \Gamma \ln r \right). \quad (22.55)$$

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ pokazane są jako izoliny na wykresie 22.44 dla $\dot{V} = \Gamma = 2\pi$. Linie ciągłe związane są z liniami prądu, a izoliny potencjału rzeczywistego związane są z liniami przerywanymi.



Rys. 22.44: Izolinie φ i ψ dla potencjału zespolonego (22.52)



Rys. 22.45: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.56)

Pole prędkości sprzężonej w układzie biegunowym ma szczególnie prostą postać. Zgodnie ze wzorem (7.18) prędkość liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.53)

$$e^{i\alpha} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\dot{V}}{2\pi r} - i \frac{\Gamma}{2\pi r} = u_r - i u_\alpha. \quad (22.56)$$

Pamiętając, że pochodna potencjału przedstawia prędkość sprzężoną, możemy przedstawić składowe prędkości jako

$$u_r = \frac{\dot{V}}{2\pi r}, \quad u_\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (22.57)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ lub $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ pokazane jest na wykresie 22.45 w postaci znormalizowanej dla $\dot{V} = \Gamma = 2\pi$.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=(1-i).*log(z);
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.46: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ i ψ z potencjału (22.52)

Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.52) opisuje źródło wirowe, gdyż jest liniową kombinacją źródła i wiru. Łatwo można sobie również wyobrazić upust wirowy, zmieniając jedynie znak przy \dot{V} we wzorze (22.52).

Analiza potencjału zespolonego (22.52) przy użyciu komputera jest prostsza, gdyż nie trzeba dekomponować tego potencjału na część rzeczywistą i urojoną. Do wizualizacji potencjału rzeczywistego, funkcji prądu i pola prędkości można wykorzystać GNU Octave [1]. Minimalny skrypt, który wykreśla izoliny potencjału rzeczywistego i linie prądu, pokazany jest na listingu 22.46. Natomiast minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.47.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=(1-i)./z;
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

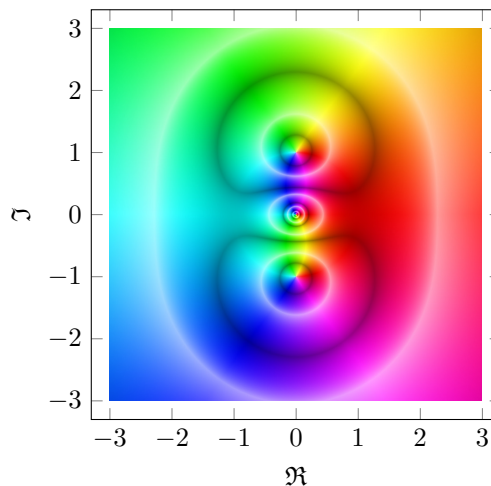
Rys. 22.47: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.56)

22.9. Zadanie 9. Opływ koła

Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = u_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right), \quad (22.58)$$

gdzie u_{∞} jest prędkością napływu, a R jest promieniem koła.



Rys. 22.48: Wykres funkcji (22.58)

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.58), przedstawiona jest na wykresie 22.48 metodą kolorowania dziedziny. Wzór (22.58) otrzymujemy z superpozycji przepływu jednorodnego (22.1) ($b = 0$) i dipola danego wzorem (22.38).

Analityczne badanie potencjału zespolonego (22.58) jest możliwe zarówno we współrzędnych biegunowych, jak i współrzędnych kartezjańskich. We współrzędnych kartezjańskich wykorzystujemy postać argumentu zespolonego $z = x + iy$ i rozdzielamy część rzeczywistą od urojonej, aby otrzymać postać potencjału w według zapisu (7.15) $w(z) = \varphi + i\psi$. We wzorze (22.58) odwrotność liczby zespolonej mnożymy i dzielimy przez liczbę zespoloną sprzężoną \bar{z} , otrzymując

$$w(z) = u_\infty \left(z + \frac{R^2 \bar{z}}{z\bar{z}} \right) = u_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2} \right) + i u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2} \right). \quad (22.59)$$

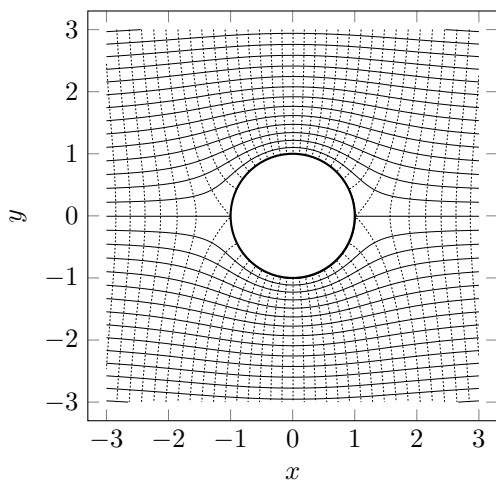
Część rzeczywista funkcji (22.59) jest potencjałem rzeczywistym φ , który zapisujemy jako

$$\varphi(x, y) = u_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2} \right), \quad (22.60)$$

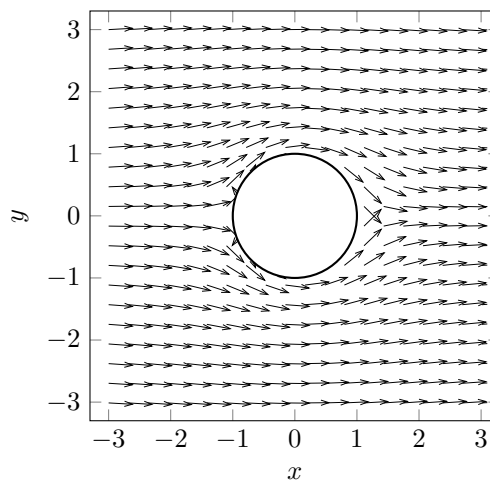
a część urojona funkcji (22.59) jest funkcją prądu ψ , która ma następującą postać

$$\psi(x, y) = u_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2} \right). \quad (22.61)$$

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ dla $u_\infty = 1$ i $R = 1$ pokazane są jako izoliny na wykresie 22.49 w ten sposób, że linie prądu oznaczane są liniami ciągłymi, a izoliny potencjału rzeczywistego liniami przerywanymi.



Rys. 22.49: Izolinie φ i ψ dla potencjału zespolonego (22.58)



Rys. 22.50: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.64)

Potencjał rzeczywisty (22.60) we współrzędnych biegunowych można najprościej zapisać, wykorzystując wzory transformacyjne między układami współrzędnych $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, co daje

$$\varphi(x, y) = u_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \alpha. \quad (22.62)$$

Funkcja prądu (22.61) we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać

$$\psi(x, y) = u_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \alpha. \quad (22.63)$$

Pole prędkości sprzężonej, zgodnie ze wzorem (7.16), liczymy jako pochodną potencjału zespolonego (22.58)

$$e^{i\alpha} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + i \frac{\partial\psi}{\partial r} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \alpha + i u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \alpha. \quad (22.64)$$

Pamiętając, że pochodna potencjału przedstawia prędkość sprzężoną, możemy przedstawić składowe prędkości jako

$$u_r = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \alpha, \quad u_\varphi = -u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \alpha. \quad (22.65)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ pokazane jest na wykresie 22.50 dla $u_\infty = 1$ i $R = 1$ w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.58) opisuje optyw koła o promieniu R z prędkością u_∞ , który wynika z połączenia przepływu jednorodnego i dipola. Dipol znajduje się wewnątrz koła i nie jest widoczny na wykresach 22.49 i 22.50.

Analizowanie potencjału zespolonego (22.58) przy użyciu komputera jest prostsze, gdyż nie trzeba nawet dekomponować tego potencjału na część rzeczywistą i urojoną. Minimalny skrypt GNU Octave [1], który wykreśla izolinie potencjału rzeczywistego i linie prądu dla $u_\infty = 1$ i $R = 1$, pokazany jest na listingu 22.51. Natomiast minimalny skrypt GNU Octave [1] umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.52.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=z+1./z;
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.51: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ i ψ z potencjału (22.58)

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=1-1./z.^2;
w.=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

Rys. 22.52: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.65)

Z wykresów 22.49 i 22.50 widać, że przepływ jest symetryczny. Składowe prędkości na okręgu ($r = R$) można wyznaczyć ze wzorów (22.65)

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = -2u_\infty \sin \alpha. \quad (22.66)$$

Rozkład ciśnienia możemy wyznaczyć z drugiego równania układu (7.9)

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 - 2\rho u_\infty^2 \sin^2 \alpha. \quad (22.67)$$

Aby wyliczyć reakcję na kole, należy posłużyć się wzorem (15.10)

$$\mathbf{R} = - \iint_S \boldsymbol{\sigma}_n \, dS. \quad (22.68)$$

Zamiast powierzchni S posługujemy się okręgiem L , który jest krzywą zamkniętą. Zatem całka powierzchniowa (22.68) przechodzi w krzywoliniową. Wektor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_n$ zastępujemy wzorem Cauchy'ego (3.6) $\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Natomiast tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ dla przepływów idealnych ($\mu = 0$), na podstawie wzoru (4.6), redukuje się do postaci $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta}$. Mając powyższa na uwadze, reakcja (22.68) przyjmie następującą postać

$$\mathbf{R} = \oint_L p \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\delta} \, dL = \oint_L p \hat{\mathbf{n}} \, dL. \quad (22.69)$$

Krzywa L , będąca okręgiem o promieniu R , określona jest w następujący sposób

$$L = \{(x, y) : x = R \cos \alpha, y = R \sin \alpha, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}, \quad (22.70)$$

a wektor normalny

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha. \quad (22.71)$$

Reakcja (22.70) może być teraz wyliczona w następujący sposób

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \int_0^{2\pi} (p_0 - 2\rho u_\infty^2 \sin^2 \alpha) (\hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha) R \, d\alpha = \\ &= \hat{\mathbf{i}} \int_0^{2\pi} (p_0 \cos \alpha - 2\rho u_\infty^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) R \, d\alpha + \hat{\mathbf{j}} \int_0^{2\pi} (p_0 \sin \alpha - 2\rho u_\infty^2 \sin^3 \alpha) R \, d\alpha = \\ &= \hat{\mathbf{i}} R \left(p_0 \sin \alpha - \frac{2}{3} \rho u_\infty^2 \sin^3 \alpha \right)_0^{2\pi} - \hat{\mathbf{j}} R \left(p_0 \cos \alpha + 2\rho u_\infty^2 \left(\frac{1}{3} \cos^3 \alpha - \cos \alpha \right) \right)_0^{2\pi} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (22.72)$$

Oznacza to, że zarówno brak jest siły nośnej, jak i brak jest oporu, co jest sprzeczne z badaniami doświadczalnymi. Jest to tak zwany paradoks d'Alemberta¹. Paradoks ten spowodowany jest założeniem braku lepkości.

22.10. Zadanie 10. Cyrkulacyjny opływ koła

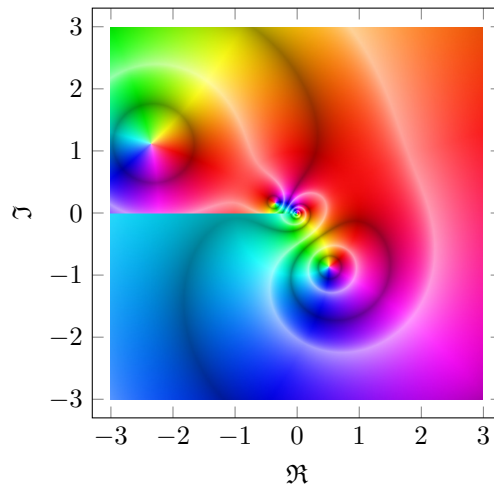
Zbadać potencjał zespolony w dany wzorem

$$w(z) = u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z, \quad (22.73)$$

gdzie u_∞ jest prędkością napływu, R jest promieniem koła i Γ cirkulacją.

Funkcja zespolona w argumentu zespolonego, określona wzorem (22.73), przedstawiona jest na wykresie 22.53 metodą kolorowania dziedziny. Wzór (22.58) otrzymujemy z superpozycji opływu koła (22.58) i wiru danego wzorem (22.44).

¹Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) – matematyk, fizyk i filozof francuski



Rys. 22.53: Wykres funkcji (22.73)

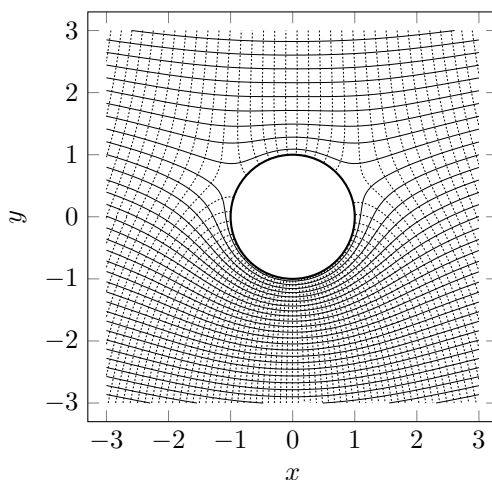
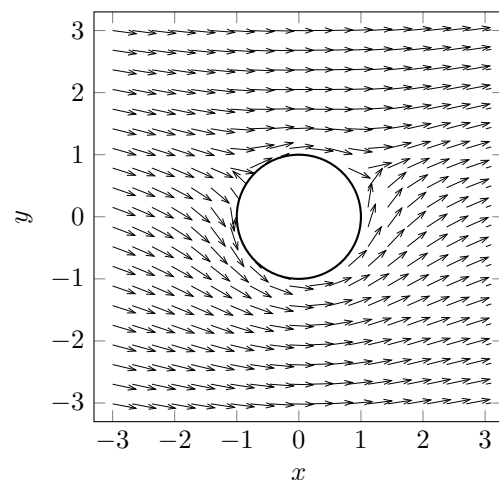
Analityczne badanie potencjału zespolonego (22.73) najwygodniej przeprowadzić we współrzędnych biegunowych. Aby otrzymać rzeczywisty potencjał φ , można do siebie dodać potencjały (22.62) i (22.46)

$$\varphi(x, y) = u_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \alpha + \frac{\Gamma}{2\pi} (\alpha + 2\pi k). \quad (22.74)$$

Funkcję prądu otrzymujemy, dodając do siebie funkcje (22.63) i (22.47)

$$\psi(x, y) = u_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \alpha - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (22.75)$$

Potencjał rzeczywisty φ i funkcja prądu ψ dla $u_\infty = 1$, $R = 1$ i $\Gamma = 2\pi$ pokazane są jako izoliny na wykresie 22.54 w ten sposób, że linie prądu oznaczane są liniami ciągłymi, a izoliny potencjału rzeczywistego liniami przerywanymi.

Rys. 22.54: Izoliny φ i ψ dla potencjału zespolonego (22.73)Rys. 22.55: Znormalizowane pole prędkości $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.76)

Pole prędkości sprzężonej, zgodnie ze wzorem (7.16), liczymy jako pochodną

potencjału zespolonego (22.73)

$$e^{i\alpha} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \alpha + i \left(u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \alpha - \frac{\Gamma}{2\pi r}\right). \quad (22.76)$$

Pamiętając, że pochodna potencjału przedstawia prędkość sprzężoną, możemy przedstawić składowe prędkości jako

$$u_r = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \alpha, \quad u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} - u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \alpha. \quad (22.77)$$

Wektorowe pole prędkości $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ pokazane jest na wykresie 22.55 dla $u_\infty = 1$, $R = 1$ i $\Gamma = 2\pi$ w postaci znormalizowanej. Z powyższej analizy widać, że potencjał w określony wzorem (22.73) opisuje opływ koła o promieniu R z prędkością u_∞ i dodatkowo nałożonym wirem o cyrkulacji Γ .

Analizowanie potencjału zespolonego (22.73) przy użyciu komputera jest prostsze, gdyż nie trzeba nawet dekomponować tego potencjału na część rzeczywistą i urojoną. Minimalny skrypt GNU Octave [1], który wykreśla izolinie potencjału rzeczywistego i linie prądu dla $u_\infty = 1$, $R = 1$ i $\Gamma = 2\pi$, pokazany jest na listingu 22.56. Natomiast minimalny skrypt umożliwiający wykreślenie znormalizowanego pola prędkości, pokazany jest na listingu 22.57.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,100));
z=complex(x,y);
w=z+1./z-i.*log(z);
contour(x,y,imag(w),30);
hold on;
contour(x,y,real(w),30);
```

Rys. 22.56: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia φ i ψ z potencjału (22.73)

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3,20));
z=complex(x,y);
w=1-1./z.^2-i./z;
w./=sqrt(real(w).^2+imag(w).^2);
quiver(x,y,real(w),-imag(w));
```

Rys. 22.57: Skrypt GNU Octave dla wykreślenia $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (22.76)

Składowe prędkości na okręgu ($r = R$) można wyznaczyć ze wzorów (22.77)

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2u_\infty \sin \alpha. \quad (22.78)$$

Rozkład ciśnienia możemy wyznaczyć z drugiego równania układu (7.9)

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2u_\infty \sin \alpha\right)^2. \quad (22.79)$$

Aby wyliczyć reakcję na kole, należy posłużyć się wzorem (22.69)

$$\mathbf{R} = \int_0^{2\pi} \left(p_0 - \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2u_\infty \sin \alpha\right)^2\right) (\hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha) R d\alpha = -\rho u_\infty \Gamma \hat{\mathbf{j}}. \quad (22.80)$$

Oznacza to, że tym razem istnieje siła nośna, ale dalej opór jest zerowy.

Bibliografia

- [1] J.W. Eaton et al, *GNU Octave manual: a high-level interactive language for numerical computations*, www.gnu.org/software/octave/, 2017
- [2] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2014
- [3] K. Tesch, M. Banaszek, *Laboratorium Mechaniki Płynów*, Wydawnictwo Fundacja Promocji Przemysłu Okrętowego, Gdańsk, 2016