Laboratorium Mechaniki Płynów

Krzysztof Tesch
Marzena Banaszek

Fundacja Promocji Przemysłu Okrętowego i Gospodarki Morskiej

Gdańsk 2016

RECENZENT
Jan Szantyr

PROJEKT OKŁADKI
Cezary Spigarski

Wydawnictwo
Fundacja Promocji Przemysłu Okrętowego
i Gospodarki Morskiej
80-328 Gdańsk, Kościerska 7/5/11
tel./fax: +48 58 552 02 27; tel. kom.: +48 600 962 252
e-mail: biuro@oficynamorska.pl
http://www.oficynamorska.pl

ISBN 978-83-60584-66-8

Spis treści

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

Krzysztof Tesch

1.1. Wiadomości podstawowe

Podstawą weryfikacji lub obalania praw i teorii fizycznych jest eksperyment. Eksperymenty przeprowadza się w celu weryfikacji istniejących praw, bądź w celu formułowania nowych. Eksperymentalne formułowanie praw może mieć miejsce wtedy, gdy podejście teoretyczne jest zbyt skomplikowane lub niemożliwe.

Z eksperymentem związane są pomiary wielkości fizycznych. Niejednokrotnie sposób pomiaru wielkości fizycznych podawany jest przy ich definiowaniu. Przez wielkość fizyczną rozumie się każdą mierzalną własność zjawiska. Przez miarę wielkości fizycznej rozumie się iloczyn liczby, będącej liczbową miarą wielkości fizycznej, oraz jednostki miary tej wielkości.

Czynności prowadzące do ustalenia wartości liczbowej miary danej wielkości nazywane są pomiarami fizycznymi. Pomiary te wykonywane są zwykle za pomocą przyrządów pomiarowych. Pomiary dzieli się na pomiary bezpośrednie i pośrednie. Pomiary bezpośrednie wykonywane są za pomocą przyrządów pomiarowych. W przypadku pomiarów pośrednich wielkości y stosuje się zależności funkcyjne od wielkości bezpośrednich x_i w postaci np. $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

1.2. Podstawy teorii błędów

1.2.1. Podział błędów

Pomiary obarczone są zawsze błędami pomiarowymi, nawet przy poprawnym i starannym ich przeprowadzaniu. Pomiar bez podania błędu jest bezwartościowy. Różnicę pomiędzy wartością prawdziwą wielkości mierzonej x i wynikiem pomiaru x_0 nazywa się bezwzględnym błędem pomiaru Δ_x, co zapisuje się jako

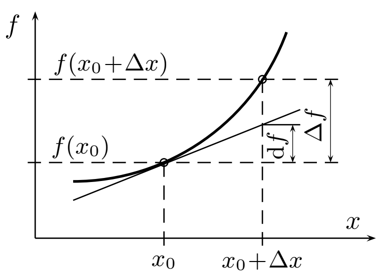
$$\Delta_x := x - x_0. \tag{1.1}$$

Wzór (1.1) nie nadaje się do obliczania błędu bezwzględnego, gdyż wartość prawdziwa x pozostaje nieznana. Wartość błędu bezwzględnego można szacować różnymi metodami, które opisane są w kolejnych paragrafach.

Błąd względny δ_x definiowany jest jako stosunek błędu bezwzględnego do wartości prawdziwej x. Ze względu na to, że wartość prawdziwa jest nieznana, zastępuje się ją przez wynik pomiaru x_0, co zapisujemy jako

$$\delta_x := \frac{\Delta_x}{x} \approx \frac{\Delta_x}{x_0}. \tag{1.2}$$

Ze względu na charakter oddziaływań wpływających na błąd pomiaru, błędy można podzielić na błędy przypadkowe, błędy systematyczne i błędy grube. Błędy przypadkowe spowodowane są przypadkowym oddziaływaniem czynników zakłócających, których wpływ objawia się tym, że ich wartości są różne w pomiarach przeprowadzanych w jednakowy sposób. Błędy przypadkowe mogą być kontrolowane poprzez wielokrotne przeprowadzanie tych samych pomiarów i uśrednianie wyników. Błędy systematyczne spowodowane są systematycznymi oddziaływaniami czynników, które mają wpływ na pomiary. Wpływ taki objawia się tym, że błąd systematyczny jest stały przy pomiarach przeprowadzanych w jednakowy sposób (w przeciwieństwie do błędów przypadkowych). Inną cechą błędu systematycznego jest to, że zmienia się on w określony sposób wraz ze zmianą warunków pomiaru. Błędy grube są to błędy, które powstają przy odczycie, zapisie pomiaru lub przy jego wykonywaniu na skutek np. pomylenia jednostek.



Rys. 1.1. Różniczka i przyrost

1.2.2. Błędy pojedynczych pomiarów

Załóżmy, że funkcja f, która opisuje pomiar pośredni, jest funkcją analityczną w pewnym otoczeniu punktu $\boldsymbol{x}_0$ (pomiaru). Przy tym założeniu funkcja f jest rozwijalna w szereg Taylora[1] wokół $\boldsymbol{x}_0$, co zapisujemy

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n f(\boldsymbol{x}_0)}{n!}. \tag{1.3}$$

Przez $\boldsymbol{x}$ (wartość prawdziwa) oznaczono tutaj $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}$. Wzór (1.3) słuszny jest dla funkcji wielu zmiennych, gdzie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. W przypadku funkcji jednej

[1] Brook Taylor (1685-1731) – angielski matematyk

zmiennej niezależnej x mamy następujący wzór przybliżony z dokładnością do pierwszej różniczki $f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$. Przyjmując następującą definicję przyrostu funkcji $\Delta f := f(x) - f(x_0)$, zapisuje się również $\Delta f \approx \mathrm{d}f$. Powyższy wzór przybliżony jest tym dokładniejszy, im mniejszy przyrost zmiennej niezależnej Δx. Ilustracja graficzna, dla przypadku funkcji jednej zmiennej, pokazana jest na rysunku 1.1.

Szereg Taylora (1.3) jest podstawą do wyznaczania zależności na błędy bezwzględne pojedynczych pomiarów, które mają cechę błędów systematycznych. Dla funkcji m zmiennych, z dokładnością do pierwszej różniczki, mamy

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}(x_i - x_0) \tag{1.4}$$

lub prościej

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \Delta x_i. \tag{1.5}$$

Jeżeli błędy Δ_{x_i} bezwzględne pomiarów x_i szacujemy za pomocą odpowiednich przyrostów Δx_i w następujący sposób $|\Delta x_i| \leqslant |\Delta_{x_i}|$, to wzór (1.5) umożliwia następujące szacowanie błędu bezwzględnego Δ_f

$$|\Delta_f| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \Delta_{x_i} \right|. \tag{1.6}$$

Wykorzystano tu następującą własność $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Relacja (1.6) podaje oszacowanie maksymalnego błędu bezwzględnego Δ_f pomiaru pośredniego, który popełniamy zastępując nieznaną wartość dokładną f w nieznanym dokładnie punkcie $\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x}$ przez znaną wielkość mierzoną f w znanym punkcie $\boldsymbol{x}_0$. Jeżeli nierówność (1.6) zastąpimy równością, to mamy wzór na maksymalny błąd bezwzględny. Zamiast relacji (1.6) stosuje się czasami następującą relację

$$|\Delta_f| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \right)^2 \Delta_{x_i}^2}, \tag{1.7}$$

aby uniknąć przeszacowania błędu maksymalnego.

Jako przykład rozważmy problem pomiaru pośredniego wartości przyspieszenia ziemskiego g ze wzoru na okres drgań wahadła T o długości L, które wyraża się znanym wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{1.8}$$

Znane są błędy bezwzględne bezpośredniego pomiaru długości Δ_L i okresu Δ_T. Z powyższego wzoru można wyznaczyć przyspieszenie ziemskie jako $g = 4\pi^2 L T^{-2}$. Zatem błąd bezwzględny pomiaru przyspieszenia g zależy od błędów pomiaru okresu T i długości L, co zapisujemy $\Delta_g \approx \mathrm{d}g(T, L)$. Posługując się relacją (1.6) można maksymalny błąd bezwzględny pomiaru przyspieszenia ziemskiego szacować jako

$$\Delta_g = \left| \frac{\partial g(T, L)}{\partial T} \Delta_T \right| + \left| \frac{\partial g(T, L)}{\partial L} \Delta_L \right|. \tag{1.9}$$

Obliczając odpowiednie pochodne, otrzymujemy po uproszczeniach następującą zależność na błąd bezwzględny Δ_g pomiaru przyspieszenia g

$$\Delta_g = \frac{8\pi^2 L}{T^3}|\Delta_T| + \frac{4\pi^2}{T^2}|\Delta_L|. \tag{1.10}$$

Błąd względny δ_g, na podstawie definicji (1.2), otrzymujemy, dzieląc powyższy wzór obustronnie przez g

$$\frac{\Delta_g}{g} = 2\frac{|\Delta_T|}{T} + \frac{|\Delta_L|}{L} \tag{1.11}$$

lub po prostu $\delta_g = 2\,\delta_T + \delta_L$. Jeżeli wzór na błąd względny ma prostszą postać niż wzór określający błąd bezwzględny, to wygodniej najpierw liczyć błąd względny i dopiero na jego podstawie błąd bezwzględny z zależności $\Delta g = g\,\delta_g$.

1.2.3. Błędy wielokrotnych pomiarów

Do analizy błędów przy wielokrotnych pomiarach stosuje się metody statystyczne, gdzie błąd traktowany jest jako zmienna losowa. Takie podejście oznacza, że metodami statystycznymi szacuje się błędy przypadkowe, a nie błędy systematyczne. Przypadkowe oddziaływanie czynników zakłócających kompensowane jest poprzez wielokrotne wykonywanie pomiarów.

1.2.3.1. Podstawowe informacje o zmiennych losowych

Funkcję X określoną na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω o wartościach rzeczywistych $X : \Omega \to \mathbb{R}$ oraz taką, że zbiór $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ jest zdarzeniem (podzbiorem) Ω, czyli $\forall_{x\in\mathbb{R}}\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \subseteq \Omega$ nazywamy zmienną losową. Wartość zmiennej losowej dla konkretnego zdarzenia elementarnego nazywa się zazwyczaj jej realizacją. Zbiór wartości (realizacji) przyjmowanych przez zmienną losową X, tzn. zbiór $X(\Omega) := \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ nazywamy zbiorem wartości zmiennej X.

Skoro zbiór $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ jest zdarzeniem, to możemy obliczyć prawdopodobieństwo tego zdarzenia $\mathrm{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}\right)$ albo w zapisie skróconym $\mathrm{P}(X < x)$.

Funkcję $F : \mathbb{R} \to [0; 1]$ określoną wzorem $F(x) := \mathrm{P}(X < x)$ nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej X. Funkcja F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy: a) F jest niemalejąca, czyli $\forall_{x<y\in\mathbb{R}}F(x) \leqslant F(y)$, b) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, c) F jest lewostronnie ciągła, czyli $\lim_{x\to x_0^-} F(x) = F(x_0)$, albo w skrócie $F(x^-) = F(x_0)$.

Obliczanie prawdopodobieństwa z dystrybuanty: $\mathrm{P}(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$, $\mathrm{P}(X = x) = F(x^+) - F(x^-)$. Jeżeli x jest punktem ciągłości F, to $F(x^-) = F(x^+) = F(x)$, więc $\mathrm{P}(X = x) = 0$.

Pośród zmiennych losowych można ze względu na postać dystrybuanty wyróżnić dwa typy:

Zmienne losowe typu skokowego (dyskretne), których dystrybuanta jest przedziałami stała, a ponadto ma skoki tylko w punktach x_i. Dystrybuanta $$F(x) = \sum_{-\infty<x_i<x} p_i,$$ gdzie $p_i := \mathrm{P}(X = x_i)$. Warunek unormowania $\sum_i p_i = 1$. Funkcja prawdopodobieństwa (histogram): $\begin{array}{c\|c\|c\|c} x_i & x_1 & x_2 & \dots \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \dots \end{array}$	Zmienne losowe typu ciągłego, których dystrybuantę F można przedstawić w postaci $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$ Wykresem dystrybuanty jest linia ciągła. Funkcja f jest gęstością zmiennej losowej. Zachodzi również zależność między dystrybuantą a gęstością $f(x) = F'(x)$. Funkcja f jest gęstością zmiennej losowej (typu ciągłego) wtedy i tylko wtedy, gdy a) $f(x) \geqslant 0$, b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (warunek unormowania).
Obliczanie prawdopodobieństwa z funkcji prawdopodobieństwa: $$\mathrm{P}(a < X < b) = \sum_{a<x_i<b} p_i.$$	Obliczanie prawdopodobieństwa z gęstości: $$\mathrm{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Charakterystyki liczbowe zmiennej losowej (lub rozkładu prawdopodobieństwa):

1. Wartość przeciętna (oczekiwana) $\mathrm{E}\,X$, μ:

$\mathrm{E}\,X = \sum_i x_i p_i$	$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Wariancja $\mathrm{D}^2\,X$, $\mathrm{V}\,X$, σ_x^2, σ^2: $\mathrm{D}^2\,X = \mathrm{E}(X - \alpha_1)^2$

$\mathrm{D}^2\,X = \sum_i (x_i - \alpha_1)^2 p_i$	$\mathrm{D}^2\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha_1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

3. Odchylenie standardowe (średnie) $\mathrm{D}\,X$, σ_x, σ: $\mathrm{D}\,X = \sqrt{\mathrm{D}^2\,X}$.

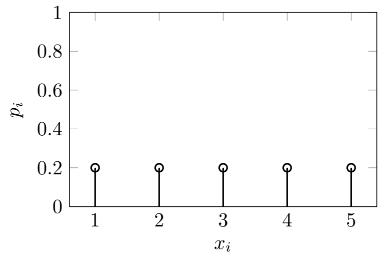
4. Kwantyl rzędu p, gdzie $p \in]0; 1[$. Jest to każda liczba x_p spełniająca

$F(x_p^-) \leqslant p \leqslant F(x_p^+)$	$F(x_p) = p$

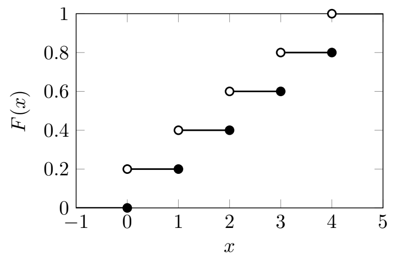
Wyróżnia się trzy kwantyle $x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$, które zwane są kwartylami. Ponadto kwantyl $x_{0.5}$ (kwartyl środkowy) zwany jest medianą.

1.2.3.2. Wybrane rozkłady zmiennych losowych

Dyskretny rozkład równomierny. Dyskretny rozkład równomierny dany jest tabelą 1.1.



Rys. 1.2. Funkcja prawdopodobieństwa dyskretnego rozkładu równomiernego dla $n = 5$

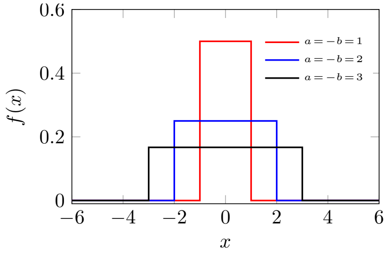


Rys. 1.3. Dystrybuanta F dyskretnego rozkładu równomiernego dla $n = 5$

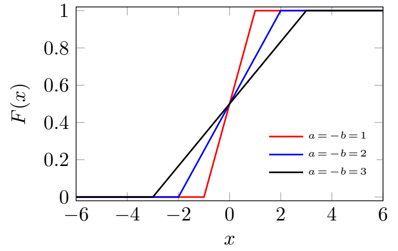
Tabela 1.1. Dyskretny rozkład równomierny

x_i	x_1	$\dots$	x_n
p_i	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

Oczywiście według danych z tabeli 1.1 spełniony jest warunek unormowania $\sum_i p_i = n\frac{1}{n} = 1$. Wartość oczekiwana $\mathrm{E}\,X$ wynosi $\mathrm{E}\,X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n}\sum_i x_i =: \mu$ i jest po prostu średnią arytmetyczną. Wariancję $\mathrm{D}^2\,X$ znajdujemy w następujący sposób $\mathrm{D}^2\,X = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$. Rozkład funkcji prawdopodobieństwa dyskretnego rozkładu równomiernego pokazany jest na wykresie 1.2, a dystrybuanta, według wzoru $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$, na rysunku 1.3.



Rys. 1.4. Gęstości prawdopodobieństwa f ciągłego rozkładu równomiernego



Rys. 1.5. Dystrybuanta F ciągłego rozkładu równomiernego

Ciągły rozkład równomierny. Zmienna losowa ma ciągły rozkład równomierny, jeżeli jej gęstość prawdopodobieństwa f dana jest wzorem

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases} \tag{1.12}$$

Rozkład taki znany jest również pod nazwą rozkładu prostokątnego lub skoncentrowanego na przedziale $[a, b]$. Dystrybuanta takiego rozkładu dana jest wzorem

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{1.13}$$

Wykres gęstości prawdopodobieństwa ciągłego rozkładu równomiernego dla różnych a i b pokazany jest na wykresie 1.4, a dystrybuanta na wykresie 1.5.

Ciągły rozkład równomierny spełnia oczywiście warunek unormowania

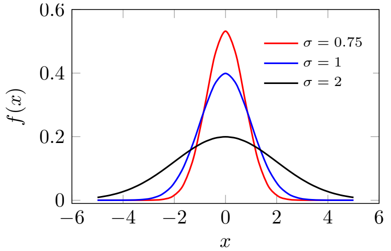
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{b-a} = 1. \tag{1.14}$$

Wartość oczekiwana wynosi

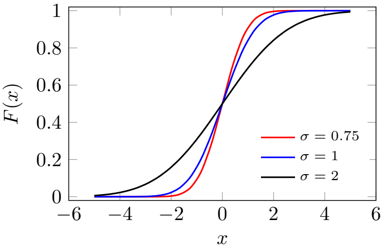
$$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2} =: \mu. \tag{1.15}$$

Wariancję wyliczamy ze wzoru

$$\mathrm{D}^2\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{(x-\mu)^2}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(b-a)^2. \tag{1.16}$$



Rys. 1.6. Gęstości prawdopodobieństwa f rozkładu normalnego ($\mu = 0$)



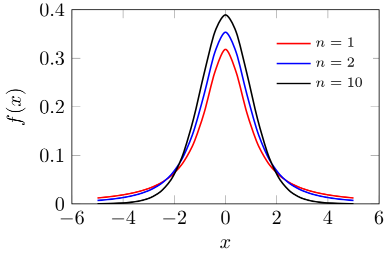
Rys. 1.7. Dystrybuanta F rozkładu normalnego ($\mu = 0$)

Rozkład Gaussa. Rozkład Gaussa[2)] zwany jest inaczej rozkładem normalnym. Zmienna losowa ma rozkład normalny, jeżeli jej gęstość prawdopodobieństwa f dana jest wzorem

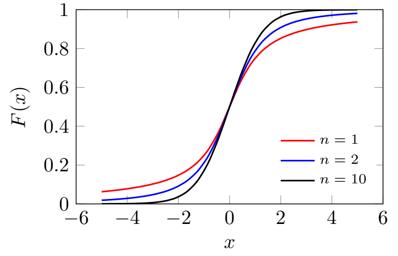
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1.17}$$

Dystrybuanta rozkłada Gaussa dana jest zależnością

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.18}$$



Rys. 1.8. Gęstości prawdopodobieństwa f rozkładu Studenta



Rys. 1.9. Dystrybuanta F rozkładu Studenta

Wykres gęstości dla różnych odchyleń standardowych σ pokazany jest na wykresie 1.6, a dystrybuanta na wykresie 1.7.

Wiedząc, że $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/2}$, można wykazać, że spełniony jest warunek unormowania

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1. \tag{1.19}$$

Wartość oczekiwana $\mathrm{E}\,X$ może być znaleziona poprzez całkowanie przez części

$$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0 =: \mu. \tag{1.20}$$

Podobnie jest z wariancją

$$\mathrm{D}^2\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1. \tag{1.21}$$

Z powyższego wynika, że rozkład normalny dany gęstością (1.17) ma odchylenie standardowe $\sigma = 1$. Dla rozkładu normalnego, który nie ma wartości oczekiwanej μ równej zero i daną wartość odchylenia standardowego σ, mamy następującą gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1.22}$$

Rozkład Studenta. Zmienna losowa ma rozkład Studenta[3] z n stopniami swobody, jeżeli jej gęstość prawdopodobieństwa f dana jest wzorem

$$f(x,n) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{1.23}$$

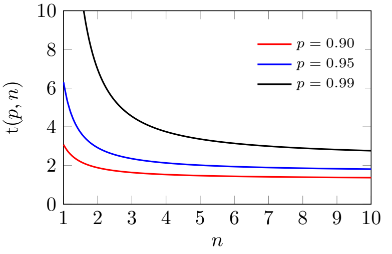
gdzie Γ jest gammą Eulera[4] . Przykładowe wykresy f dla różnych n pokazane są na wykresie 1.8. Dystrybuanta F rozkładu Studenta, określona zależnością

$$F(x,n) = \int_{-\infty}^{x} f(x,n)\,\mathrm{d}x, \tag{1.24}$$

[2] Carl Friedrich Gauss (1777-1855) – niemiecki matematyk i fizyk
[3] William Sealy Gosset (1876-1937) – angielski statystyk
[4] Leonhard Euler (1707-1783) – szwajcarski matematyk i fizyk

pokazana jest na wykresie 1.9 dla różnych n. Przy $n \to \infty$ rozkład Studenta dąży do unormowanego rozkładu normalnego ($\mu = 0$, $\sigma = 1$).

Kwantyle t rozkładu Studenta są, według zależności $F(t) = p$, funkcją dwóch zmiennych. Ich liczbowa wartość, dla n stopni swobody i przedziału ufności p, oznaczana jest jako $\mathrm{t}(p, n)$. Przykładowe wykresy kwantyli t dla różnych p pokazane są na wykresie 1.10. Stablicowane wartości t podaje tabela 1.2.



Rys. 1.10. Kwantyle t rozkładu Studenta

1.2.3.3. Błąd jako zmienna losowa

Pomiar traktowany jest jako zmienna losowa X, której wartość oczekiwana równa jest wartości prawdziwej. Wprowadzając kolejną zmienną losową ΔX, według wzoru $\Delta X := X - \mathrm{E}\,X$, traktujemy błąd również jako zmienną losową o wartości oczekiwanej równej zero $\mathrm{E}(\Delta X) = 0$. Zmienna losowa ΔX jest więc zmienną centrowaną. W typowych zagadnieniach rozkład błędów traktuje się jako rozkład normalny, który dany jest gęstością (1.22)

$$f(\Delta x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1.25}$$

Jak wcześniej zostało zauważone, wartość oczekiwana takiego rozkładu jest zerowa. Wariancja ma natomiast postać $\mathrm{D}^2(\Delta X) = \sigma^2$. Ze względu na wzór $\Delta X := X - \mathrm{E}\,X$ widać, że zarówno pomiar jak i jego błąd opisywane są takimi samymi zmiennymi losowymi. Jedyną różnicą jest wartość oczekiwana.

1.2.3.4. Wielokrotne pomiary bezpośrednie

Parametry rozkładu zmiennej losowej ΔX lub X szacowane są metodami statystyki matematycznej. Seria pomiarów, która przeprowadzana jest celem kompensacji oddziaływania czynników zakłócających, traktowana jest jako próba w sensie statystycznym. Próba taka jest siłą rzeczy skończona i brana jest ze zbioru wszystkich możliwych wyników pomiarów lub błędów.

Do estymacji wartości oczekiwanej zmiennej losowej X, którą odpowiada wartości prawdziwej, służy wartość oczekiwana dyskretnego rozkładu równomiernego

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.26}$$

Tabela 1.2. Kwantyle $\mathrm{t}(p, n)$ rozkładu Studenta

$n \backslash p$	0.90	0.95	0.99	$n \backslash p$	0.90	0.95	0.99
1	3.07768	6.31375	31.8205	11	1.36343	1.79588	2.71808
2	1.88562	2.91999	6.96456	12	1.35622	1.78229	2.68100
3	1.63774	2.35336	4.54070	13	1.35017	1.77093	2.65031
4	1.53321	2.13185	3.74695	14	1.34503	1.76131	2.62449
5	1.47588	2.01505	3.36493	15	1.34061	1.75305	2.60248
6	1.43976	1.94318	3.14267	16	1.33676	1.74588	2.58349
7	1.41492	1.89458	2.99795	17	1.33338	1.73961	2.56693
8	1.39682	1.85955	2.89646	18	1.33039	1.73406	2.55238
9	1.38303	1.83311	2.82144	19	1.32773	1.72913	2.53948
10	1.37218	1.81246	2.76377	20	1.32534	1.72472	2.52798

Jest to po prostu średnia arytmetyczna. Estymowana wartość oczekiwana $\bar{x}$ dąży do wartości oczekiwanej, jeżeli rozmiar próby (serii pomiarowej) n dąży do nieskończoności.

Błędy poszczególnych pomiarów Δx_i liczy się w względem średniej arytmetycznej $\bar{x}$

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}. \tag{1.27}$$

Do estymacji wariancji służy wariancja dyskretnego rozkładu równomiernego w postaci

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2. \tag{1.28}$$

Podobnie jak w przypadku estymacji wartości oczekiwanej i w tym przypadku, gdy rozmiar serii pomiarowej dąży do nieskończoności, to estymowana wariancja dąży do wariancji.

Odchylenie standardowe σ_x poprzez estymowaną wariancję σ_x^2 jest traktowana jako błąd średniokwadratowy pojedynczego pomiaru

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}. \tag{1.29}$$

Błąd średniokwadratowy charakteryzuje dokładność pomiarów. Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa ΔX o rozkładzie normalnym, danym gęstością (1.25), przyjmie wartości z przedziału $[-\sigma_x, \sigma_x]$ wynosi $\mathrm{P}(-\sigma_x \leqslant \Delta X \leqslant \sigma_x) = 0.682$. Natomiast rozważają trzykrotnie szerszy przedział $[-3\sigma_x, 3\sigma_x]$, mamy $\mathrm{P}(-3\sigma_x \leqslant \Delta X \leqslant 3\sigma_x) = 0.997$. Interpretacja geometryczna błędu średniokwadratowego jest taka, że na osi Δx lub x punkty $\pm\sigma_x$ lub $\mu \pm \sigma_x$ znajdują się w punktach przegięcia krzywej Gaussa.

Błąd prawdopodobny pojedynczego pomiaru $\widetilde{\Delta x}$ definiowany jest w następujący sposób

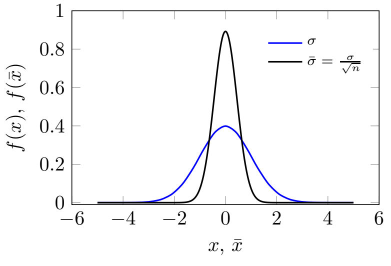
$$\int_{-\widetilde{\Delta x}}^{\widetilde{\Delta x}} f(\Delta x) \equiv \mathrm{P}\left(-\widetilde{\Delta x} < \Delta X < \widetilde{\Delta x}\right) = \frac{1}{2}. \tag{1.30}$$

Zachodzi następująca równość $\widetilde{\Delta x} = 0.674\sigma_x$. Interpretacja geometryczna powyższej zależności jest taka, że pole pod krzywą Gaussa w przedziale $[-\widetilde{\Delta x}, \widetilde{\Delta x}]$ równa się połowie całego pola na przedziale $]-\infty, \infty[$. Innymi słowy w przedziale $[-\widetilde{\Delta x}, \widetilde{\Delta x}]$ zawarta jest połowa popełnianych błędów.

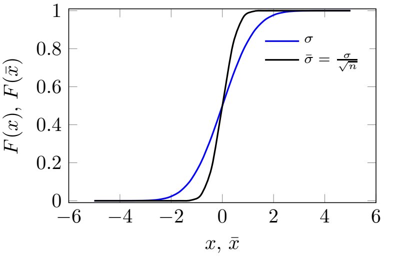
Błąd przeciętny pojedynczego pomiaru $\langle \Delta x \rangle$ definiowany jest jako

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|. \tag{1.31}$$

Mamy $\langle \Delta x \rangle \approx 0.798\sigma_x$. Interpretacja geometryczna błędu przeciętnego jest taka, że błąd ten odpowiada położeniu środka ciężkości połowy pola pod krzywą Gaussa. Zachodzą oczywiście następujące relacje $\widetilde{\Delta x} < \langle \Delta x \rangle < \sigma_x$.



Rys. 1.11. Gęstości prawdopodobieństwa f rozkładu normalnego



Rys. 1.12. Dystrybuanta F rozkładu normalnego

Dyskutowane powyżej błędy dotyczą pojedynczych pomiarów. Do określenia błędu średniej potrzebne są kolejne definicje. Ze względu na losowość błędów, dla każdej kolejnej serii pomiarowej otrzymalibyśmy inne średnie. Wynika z tego, że średnia $\bar{X}$ jest również zmienną losową o rozkładzie normalnym

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}. \tag{1.32}$$

Korzystając z następujących własności wartości oczekiwanej $\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}\,X + b\,\mathrm{E}\,Y$ i wariancji $\mathrm{D}^2(aX + bY) = a^2\,\mathrm{D}^2\,X + b^2\,\mathrm{D}^2\,Y$, można pokazać, że wartość oczekiwana zmiennej X jest identyczna jak zmiennej losowej $\bar{X}$

$$\bar{\mu} = \mathrm{E}\,\bar{X} = \frac{1}{n}\left(\mathrm{E}\,X_1 + \ldots + \mathrm{E}\,X_n\right) = \frac{1}{n}(\mu + \ldots + \mu) = \mu. \tag{1.33}$$

Dla wariancji $\bar{\sigma}_x$ zmiennej $\bar{X}$ otrzymujemy

$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{D}^2\,X_1 + \ldots + \mathrm{D}^2\,X_n\right) = \frac{1}{n^2}(\sigma_x^2 + \ldots + \sigma_x^2) = \frac{\sigma_x^2}{n}. \tag{1.34}$$

Wynika stąd odchylenie standardowe $\bar{\sigma}_x$ zmiennej losowej $\bar{X}$, które równa się $\bar{\sigma}_x = \sigma_x/\sqrt{n}$. Zatem rozkład normalny zmiennej $\bar{X}$ różni się od X mniejszą wariancją. Wykresy gęstości prawdopodobieństwa zmiennych X i $\bar{X}$ pokazane są na wykresie 1.11, a dystrybuanty na wykresie 1.12. Z rozkładem $\bar{X}$ związane jest centralne twierdzenie graniczne, które mówi, że dla dużej liczebności próby n rozkład średniej $\bar{X}$ jest w przybliżeniu równy rozkładowi normalnemu o wartości oczekiwanej μ i wariancji $\sigma_x/\sqrt{n}$.

Błąd średniokwadratowy średniej $\bar{\sigma}_x$ definiowany jest na podstawie zależności (1.34) i analogicznie do definicji błędu średniokwadratowego pojedynczych pomiarów (1.29)

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \tag{1.35}$$

Błąd rozszerzony Δ_x definiowany jest na podstawie błędu średniokwadratowego średniej (1.35) poprzez tzw. współczynnik rozszerzenia w postaci $\mathrm{t}(p, n)$

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\,\mathrm{t}(p, n), \tag{1.36}$$

gdzie współczynnik rozszerzenia $\mathrm{t}(p, n)$ jest kwantylem rozkładu Studenta (1.23) rzędu p (przedział ufności) przy n stopniach swobody (pomiarach). Wartości $\mathrm{t}(p, n)$ odczytywane są z tabeli 1.2. Zwykle przyjmuje się przedział ufności p na poziomie 95%, czyli $p = 0.95$. Współczynnik rozszerzenia uwzględnia skończoność serii pomiarowej n. Jego wartość rośnie dla krótkich serii n i wysokich przedziałów ufności p, co oznacza że powiększamy błąd pomiarowy. Dla długich serii i niskich przedziałów ufności wartość współczynnika zbliża się do jedności, co oznacza, że nie ma on większego wpływu na błąd.

Błąd prawdopodobny średniej $\widetilde{\Delta\bar{x}}$ definiuje się analogicznie do błędu prawdopodobnego pojedynczych pomiarów (1.30)

$$\widetilde{\Delta\bar{x}} = \frac{\widetilde{\Delta x}}{\sqrt{n}}. \tag{1.37}$$

Błąd przeciętny średniej $\langle\Delta\bar{x}\rangle$ jest uogólnieniem definicji błędu przeciętnego pojedynczych pomiarów (1.31)

$$\langle\Delta\bar{x}\rangle = \frac{\langle\Delta x\rangle}{\sqrt{n}}. \tag{1.38}$$

1.2.3.5. Pomiary pośrednie

W przypadku pomiaru pośredniego wielkość mierzoną y wyznaczamy z zależności funkcyjnej f od pomiarów bezpośrednich x_i w postaci $y = f(x_1, \ldots, x_m)$. Analogicznie wyznacza się wielkość średnią $\bar{y}$ pomiaru pośredniego z zależności funkcyjnej f, która zależy od średnich pomiarów bezpośrednich $\bar{x}_i$ w postaci $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$. Odchylenie standardowe średniej wielkości mierzonej pośrednio estymuje się za pomocą wzoru analogicznego do (1.7)

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i}\right)^2 \bar{\sigma}_{x_i}^2}. \tag{1.39}$$

Wynika on z prawa przenoszenia odchyleń standardowych dla przypadku braku korelacji zmiennych $\bar{x}_i$. Za pomocą odchylenia standardowego średniej wielkości mierzonej pośrednio (1.39) definiuje się również błąd rozszerzony $\Delta_{\bar{y}}$ w postaci $\Delta_{\bar{y}} = \bar{\sigma}_y k$, gdzie k jest współczynnikiem rozszerzenia. Właściwy dobór współczynnika k jest zadaniem trudnym. Jedną z metod, o charakterze przybliżonym, jest przyjmowanie stałej jego wartości. Przykładowo dla wymaganego przedziału ufności $p = 0.95$ przyjmuje się $k = 2$, o ile zmienne losowe pomiarów bezpośrednich mają rozkłady normalne. We wzorze (1.39) zamiast $\bar{\sigma}_{x_i}$ można stosować również błąd rozszerzony Δ_x lub błąd przeciętny średniej $\langle \Delta \bar{x} \rangle$.

1.2.3.6. Błędy instrumentalne

Zakłada się, że błędy instrumentów pomiarowych (np. suwmiarki) opisane są ciągłym rozkładem równomiernym, którego gęstość w ogólnym przypadku określona jest wzorem (1.12) i pokazana jest na wykresie 1.4. Niech błąd graniczny instrumentu oznaczony będzie przez Δ. Gęstość ciągłego rozkładu równomiernego o wartości oczekiwanej $\mu = 0$ jest niezerowa na przedziale $[-\Delta, \Delta]$, co zapisujemy

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & -\Delta \leqslant x \leqslant \Delta; \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases} \tag{1.40}$$

Odchylenie standardowe takiego rozkładu wyniesie $\sigma = 3^{-\frac{1}{2}}\Delta$ i jest estymatą błędu instrumentu. Wprowadza się pojęcie błędu rozszerzonego w postaci $\sigma\, k$, gdzie k jest współczynnikiem rozszerzenia. Wartość tego współczynnika można przyjmować na podstawie unormowanego ciągłego rozkładu równomiernego, czyli takiego, dla którego $\mu = 0$ i $\sigma = 1$. Aby w rozkładzie (1.40) odchylenie standardowe σ było jednostkowe musi zachodzić $\Delta = \sqrt{3}$. Gęstość unormowanego ciągłego rozkładu równomiernego ma wtedy postać

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}; \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases} \tag{1.41}$$

Dla powyższego rozkładu najmniej korzystnym przypadkiem jest ten, kiedy błąd jest największy, czyli znajduje się na końcu przedziału $\pm\sqrt{3}$. Dla takiego przypadku mamy $k = 3$, a więc błąd rozszerzony równa się $\sigma\, k = \Delta$ i jest po prostu błędem granicznym instrumentu.

1.2.3.7. Schemat postępowania

W przypadku pojedynczych pomiarów bezpośrednich, wielkość mierzoną (wskazanie przyrządu pomiarowego) podajemy z błędem przyrządu. Gdy mamy do czynienia z pojedynczym pomiarem pośrednim, to błąd pomiaru wielkości pośredniej wyznaczamy za pomocą różniczki zupełnej wzorami (1.6) lub (1.7).

W przypadku wielokrotnych pomiarów bezpośrednich wartość prawdziwą estymuje się średnią arytmetyczną (1.26). Określenie błędu średniej zależy od rozmiaru serii pomiarowej n. Dla niewielkich serii ($n < 10$) błąd oblicza się jako błąd przeciętny (1.31) lub jako maksymalny błąd $\Delta x_{i,max}$ pojedynczych pomiarów (1.27) według $\Delta x_{i,max} = \sup(\{\Delta x_i\}_{i=1}^{n})$. Gdy $n > 10$ najpierw oblicza się błąd średniokwadratowy pojedynczego pomiaru σ_x według (1.28) i (1.29). Ponieważ z prawdopodobieństwem

99.7% wiadomo, że błąd znajduje się w przedziale $[-3\sigma_x, 3\sigma_x]$, więc wszystkie pomiary o błędach spoza tego przedziału odrzuca się i wylicza średnią ponownie. Błąd wyznaczenia średniej estymuje się błędem średniokwadratowym średniej $\bar{\sigma}_x$ według (1.35) lub raczej błędem rozszerzonym Δ_x według (1.36).

Błędy pośrednich pomiarów wielkości f zależnych od pojedynczych pomiarów bezpośrednich obliczamy ze wzoru (1.6) lub (1.7). Dla pomiarów pośrednich $\bar{y}$, zależnych od wielokrotnych pomiarów bezpośrednich $\bar{x}_i$, błąd wielkości złożonej liczymy ze wzoru (1.39) lub analogicznego do (1.7). We wzorze (1.39) zamiast $\bar{\sigma}_{x_i}$ stosuje się również błędy rozszerzone i przeciętne średniej.

Jeżeli pomiar pośredni f zależy zarówno od pojedynczych pomiarów i serii pomiarów bezpośrednich, to posługujemy się zależnością (1.6) lub (1.7). Za błędy Δ_{x_i} wstawiamy odpowiednio błędy przyrządu (pojedyncze pomiary) lub błędy rozszerzone, średniokwadratowe średniej, przeciętne średniej (serie pomiarowe). Przypadek ten dotyczy sytuacji, gdy błędy systematyczne dominują nad przypadkowymi.

Jako przykład rozważmy pomiary objętości i pola powierzchni kulki. Seria danych pomiarowych średnic D_i, mierzonych suwmiarką z błędem bezwzględnym $\Delta = 0.05$ mm, podana jest w tabeli 1.3. Mamy do czynienia z pomiarami pośrednimi objętości i pola powierzchni zależnymi od wielokrotnych pomiarów bezpośrednich średnicy ($n = 33$).

Do obliczenia średniej średnicy $\bar{D}$, czyli estymaty wartości oczekiwanej μ, wykorzystujemy wzór na średnią arytmetyczną (1.26). Otrzymujemy $\mu = \bar{D} = 31.52$ mm. Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru σ_D, według (1.29), wskazuje na błędy pojedynczych pomiarów. Otrzymujemy $\sigma_D = 0.18$ mm. Z tabeli 1.3 odczytujemy najmniejszą $D_{min} = \inf(\{D_i\}_{i=1}^{33})$ i największą średnicę $D_{max} = \sup(\{D_i\}_{i=1}^{33})$ w postaci $D_{min} = 31.10$ mm, $D_{max} = 31.80$ mm. Przedział o promieniu $3\sigma_D = 0.53$ mm ma postać $[\mu - 3\sigma_D, \mu + 3\sigma_D] = [30.99, 32.06]$. Na podstawie D_{min} i D_{max} widać, że wszystkie pomiary D_i się w nim mieszczą i nie ma konieczności odrzucania niektórych z nich. Błąd pomiaru średniej estymujemy błędem średniokwadratowym (1.35), co daje $\bar{\sigma}_D = 0.031$ mm ≈ 0.04 mm. Ze względu na długość serii $n = 33$ nie obliczamy w tym przypadku błędu rozszerzonego Δ_x według (1.36), który dla przedziału ufności pomiędzy 90 a 95% wyniósłby $\Delta_x \approx 0.05$ mm. Za wynik pomiaru średnicy przyjmujemy ostatecznie $D = 31.52 \pm 0.04$ mm. Wykres zrekonstruowanego histogramu dla pomiarów z tabeli 1.3 pokazany jest na wykresie 1.13.

Objętość i pole powierzchni są pomiarami pośrednimi, które zależą od bezpośrednich pomiarów wielokrotnych. Średnią objętość obliczamy ze wzoru $|\bar{V}| = 6^{-1}\pi\bar{D}^3$ jako $|\bar{V}| = 16400.9$ mm^3. Średnie pole powierzchni natomiast ze wzoru $|\bar{S}| = \pi\bar{D}^2$ jako $|\bar{S}| = 3121.74$ mm^2. Błędy pomiarów pośrednich estymujemy za pomocą odchylenia standardowego (1.39). Dla objętości mamy

$$\bar{\sigma}_{|V|} = \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{D}}\right)^2 \bar{\sigma}_D^2} = \frac{\pi}{2}\bar{D}^2\bar{\sigma}_D \approx 50 \text{ mm}^3. \tag{1.42}$$

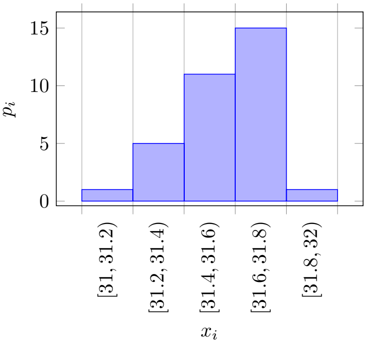
Dla pola powierzchni

$$\bar{\sigma}_{|S|} = \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{S}}{\partial\bar{D}}\right)^2 \bar{\sigma}_D^2} = 2\pi\bar{D}\bar{\sigma}_D \approx 10 \text{ mm}^2. \tag{1.43}$$

Tabela 1.3. Przykładowe pomiary

i	D_i [mm]	i	D_i [mm]	i	D_i [mm]
1	31.20	12	31.50	23	31.70
2	31.50	13	31.65	24	31.70
3	31.50	14	31.60	25	31.70
4	31.50	15	31.60	26	31.50
5	31.50	16	31.55	27	31.60
6	31.20	17	31.80	28	31.60
7	31.25	18	31.70	29	31.70
8	31.25	19	31.70	30	31.20
9	31.50	20	31.60	31	31.10
10	31.60	21	31.55	32	31.50
11	31.60	22	31.70	33	31.40

Ostatecznie zmierzona objętość kulki, według wzoru $|V| = |\bar{V}| + \bar{\sigma}_{|V|}$ wynosi $|V| = 16400 \pm 50$ mm^3. Pole powierzchni kulki, według wzoru $|S| = |\bar{S}| + \bar{\sigma}_{|S|}$, wynosi $|S| = 3120 \pm 10$ mm^2.



Rys. 1.13. Histogram pomiarów średnicy

1.3. Układ SI

Układ SI[5] jest międzynarodowym układem jednostek miar, który prawnie obowiązuje w Polsce od 1966 roku. Stosowany jest powszechnie we wszystkich dziedzinach nauki i techniki. Układ SI zawiera siedem jednostek podstawowych. Cztery, zwykle wystarczające w zagadnieniach mechaniki płynów i termodynamiki, podane są w tabeli 1.5. Są to jednostka masy (kilogram), długości (metr), czasu (sekunda) i tem-

[5] franc. *Le Système International d'unités*

peratury (kelwin). Oprócz jednostek podstawowych wyróżnia się jednostki pochodne, które tworzone są w oparciu o jednostki podstawowe w postaci iloczynu jednostek podstawowych podniesionych do potęg w postaci liczb całkowitych. Tabela 1.6 zawiera niektóre jednostki pochodne, które posiadają własne nazwy. Istnieję ponadto jednostki pochodne, które nie posiadają własnych nazw, których wybrany zestaw podany jest w tabeli 1.7. Jako przykład można podać współczynnik lepkości dynamicznej μ, którego jednostką w układzie SI jest $\mathrm{Pa \cdot s}$, czyli $\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$. Należy pamiętać, że podział na jednostki podstawowe i pochodne w ramach danego układu jest umowny i nie ma związku z fizyką zjawiska, która opisywana jest przez dane wielkości o poszczególnych jednostkach. Co więcej, żadne prawo fizyczne nie może zależeć od wyboru jednostek.

Tabela 1.4. Przedrostki

Nazwa	Symbol	Mnożnik
jotta	Y	10^{24}
zeta	Z	10^{21}
eksa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hekto	h	10^{2}
deka	da	10^{1}
		10^{0}
decy	d	10^{-1}
centy	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
jokto	y	10^{-24}

Tabela 1.5. Wybrane jednostki podstawowe

Wielkość	jednostka
kilogram	kg
metr	m
sekunda	s
kelwin	K

Tabela 1.6. Wybrane jednostki pochodne o nazwach własnych

Wielkość	symbol	jednostka
Siła	N	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
Energia	J	$\mathrm{kg\,m^2s^{-2}}$
Moc	W	$\mathrm{kg\,m^2s^{-3}}$
Ciśnienie	Pa	$\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-2}}$
Częstotliwość	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$

Tabela 1.7. Wybrane jednostki pochodne bez nazw własnych

Wielkość	jednostka
Powierzchnia	$\mathrm{m^2}$
Objętość	$\mathrm{m^3}$
Gęstość	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
Prędkość	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Przyspieszenie	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
Lepkość dynamiczna	$\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$

W układzie SI występują przedrostki przed jednostkami, które oznaczają mnożnik dziesiętny jednostki. Przykładowo, zapis MW oznacza megawat i odpowiada 10^6 W. Zestaw wszystkich dwudziestu przedrostków układu SI zebrany jest w tabeli 1.4. Na szczególną uwagę zasługuje kilogram, który mimo że stanowi jednostkę podstawową, to już zawiera prefiks kilo. Oznacza to, że inne przedrostki odnosi się do grama, a nie do kilograma. Stąd mówi się np. o miligramie (10^{-3} grama), a nie ‘mikrokilogramie’.

1.4. Regresja liniowa

1.4.1. Podstawowe informacje

Jeżeli dysponujemy serią pomiarów $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ i oczekujemy, że zależność pomiędzy x_i i y_i jest liniowa, to mamy do czynienia z zagadnieniem regresji liniowej. Jest to zagadnienie najlepszego doboru współczynników A i B w równaniu

$$y = A + B\,x. \tag{1.44}$$

Najpierw sprawdzamy, czy pomiary (x_i, y_i) są skorelowane. Do tego służy współczynnik korelacji r, który określany jest jako

$$r := \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{\left(nS_{xx} - S_x^2\right)\left(nS_{yy} - S_y^2\right)}}, \tag{1.45}$$

przy następujących definicjach

$$S_x := \sum_{i=i}^{n} x_i,\; S_y := \sum_{i=i}^{n} y_i,\; S_{xx} := \sum_{i=i}^{n} x_i^2,\; S_{yy} := \sum_{i=i}^{n} y_i^2,\; S_{xy} := \sum_{i=i}^{n} x_i y_i. \tag{1.46}$$

Jeżeli współczynnik $r \approx \pm 1$, to mamy do czynienia z korelacją liniową i uzasadnione jest poszukiwanie równania prostej (współczynników A i B) (1.44).

Współczynniki A i B w równaniu (1.44) wyznaczyć można metodą najmniejszych kwadratów

$$A = \frac{S_{xx}S_y - S_x S_{xy}}{D}, \quad B = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{D}, \tag{1.47}$$

gdzie

$$D := nS_{xx} - S_x^2. \tag{1.48}$$

Odchylenia standardowe wyliczonych współczynników A i B dane są następującymi zależnościami

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{S_{xx}}{D}}, \quad \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}}, \tag{1.49}$$

gdzie

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=i}^{n} (y_i - A - Bx_i)^2. \tag{1.50}$$

Na ich podstawie można szacować błędy bezwzględne określenia współczynników A i B

$$\Delta_A = \pm \sigma_A\, \mathrm{t}(p, n-2), \quad \Delta_B = \pm \sigma_B\, \mathrm{t}(p, n-2), \tag{1.51}$$

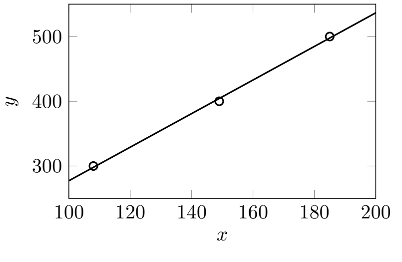
gdzie $\mathrm{t}(p, n-2)$ przedstawia kwantyle rzędu p rozkładu Studenta przy $n-2$ stopniach swobody (tabela 1.2). W przypadku n punktów pomiarowych mamy $n-2$ stopnie swobody ze względu na dwie stałe A i B. Zwykle przyjmuje się przedział ufności na poziomie 95% ($p = 0.95$).

Tabela 1.8. Przykładowa seria pomiarowa

x_i	108	149	185
y_i	300	400	500

1.4.2. Przykład

Rozważmy następującą serię pomiarową z tabeli 1.8. Współczynnik korelacji (1.45) wynosi $r = 0.999298$, co oznacza, że pomiary są skorelowane liniowo. Posługując się definicjami (1.46) i wzorami (1.47), możemy wyliczyć dla danych z tabeli 1.8 współczynniki $A = 17.8531$, $B = 2.59376$ równania (1.44). Odchylenia standardowe współczynników A i B znajdujemy ze wzorów (1.49) $\sigma_A = 14.6497$, $\sigma_B = 0.0972407$. Błąd bezwzględny określenia współczynnika B znajdujemy ze wzoru (1.51) $\Delta_B = \pm 0.613978$, gdzie $\mathrm{t}(0.95, 1) = 6.31375$. Błąd względny współczynnika B dany jest zależnością $\delta_B = \frac{\Delta_B}{B} \approx 24\%$ ze względu na małą wartość liczby pomiarów n. Graficzne przedstawienie obliczeń i pomiarów pokazane jest na wykresie 1.14.



Rys. 1.14. Przykładowa regresja liniowa

1.4.3. Sprowadzanie wybranych funkcji do postaci liniowej

Przez odpowiednie podstawienia można niektóre funkcje nieliniowe zapisać w postaci liniowej $Y := A + BX$. W ten sposób możliwe jest wyznaczenie współczynników A i B z regresji liniowej. Typowe funkcje, wraz z podstawieniami, zebrane są w tabeli 1.9.

Jako przykład można podać szczególną postać drugiej funkcji z tej tabeli, dla $b := e$. Rozważana funkcja dana jest wzorem $y := a\, e^{c\,x}$. Obustronne logarytmowanie daje $\ln y = \ln a + \ln e^{c\,x}$, czyli $\ln y = \ln a + c\,x$. Czyniąc następujące podstawienia $Y := \ln y$, $A := \ln a$, $B := c$ i $X := x$, otrzymujemy następującą postać funkcji liniowej $Y := A + BX$. Z regresji liniowej wyznaczamy stałe A i B, a następnie na ich podstawie znajdujemy stałe $a := e^A$ i $c := B$.

Tabela 1.9. Podstawienie dla $Y := A + BX$

Wzór	Y	X	A	B
$y := a + b\,x^n$	y	x^n	a	b
$y := a\,b^{c\,x}$	$\ln y$	x	$\ln a$	$c \ln b$
$y := a\,x^b$	$\ln y$	$\ln x$	$\ln a$	b

1.5. Analiza wymiarowa

1.5.1. Twierdzenie Buckinghama

Twierdzenie Buckinghama, oryginalnie podane przez [5] i sformalizowane przez [2], mówi, że dowolną funkcję f w postaci

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = 0, \tag{1.52}$$

która zależy od n zmiennych wymiarowych, można sprowadzić do innej postaci

$$f\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{p_k}}, \frac{a_{k+2}}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{q_k}}, \ldots, \frac{a_n}{a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{r_k}}\right) = 0, \tag{1.53}$$

która zależy od $n - k$ zmiennych bezwymiarowych. Przez k oznaczono liczbę zmiennych, wybranych z grupy n zmiennych podstawowych, których liczba równa jest liczbie jednostek podstawowych. Powyższe równanie zapisuje się również jako

$$f(\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \ldots, \Pi_n) = 0. \tag{1.54}$$

Powyższe twierdzenie niesie dwojakie korzyści. Po pierwsze, ogranicza liczbę zmiennych, między którymi należy szukać zależności w postaci funkcji f. Po drugie, nowa funkcja f operuje na zmiennych bezwymiarowych, które nie zależą od wyboru jednostek. Postaci poszczególnych zmiennych Π_i nie są jednoznaczne, co bierze się stąd, że zmienne z grupy podstawowej mogą być często wybierane na wiele sposobów. Twierdzenie Buckinghama nie rozstrzyga więc o postaci funkcji f. Nie podaje również sposobu jej poszukiwania.

W mechanice płynów mamy do czynienia z czterema jednostkami podstawowymi. Są to jednostka masy kg, długości m, czasu s i temperatury K. Pozostałe jednostki są tzw. jednostkami pochodnymi. Jako jednostkę pochodną można podać przykładowo ciśnienie $\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-2}}$. Ogólnie każdą jednostkę pochodną można zapisać w postaci $\mathrm{kg}^{a_1}\mathrm{m}^{a_2}\mathrm{s}^{a_3}\mathrm{K}^{a_4}$.

1.5.2. Przykłady

1.5.2.1. Wzór Stokesa

Eksperymentalnie stwierdzono, że siła oporu $[F] = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$, która działa na opadającą kulkę, zależy od średnicy kulki $[D_k] = \mathrm{m}$, współczynnika lepkości $[\mu] = \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$ i prędkości $[U] = \mathrm{m\,s^{-1}}$. Mamy cztery zmienne wymiarowe $n = 4$ i trzy jednostki podstawowe $k = 3$, tj. kg, m, s. Zgodnie z twierdzeniem Buckinghama możemy funkcję f, w postaci uwikłanej $f(F, D_k, \mu, U) = const$, zapisać w innej postaci $f(\Pi) = const$, która zależy od jednej zmiennej $(n - k = 1)$. Do grupy zmiennych podstawowych wybrać można np. D_k, μ, U.

Postać zmiennej bezwymiarowej Π znajdujemy w ten sposób, że jednostki F wyrażamy przez wybrane jednostki podstawowe, które są podniesione do nieznanych potęg: $[F] = [D_k]^{a_1}[\mu]^{a_2}[U]^{a_3}$. Zapis ten odpowiada następującemu $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = \mathrm{m}^{a_1}(\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}})^{a_2}(\mathrm{m\,s^{-1}})^{a_3}$. Ponieważ lewa strona równa się prawej, więc otrzymujemy następujący układ równań, odpowiednio dla kg, m, s

$$1 = a_2, \tag{1.55}$$

$$1 = a_1 - a_2 + a_3, \tag{1.56}$$

$$-2 = -a_2 - a_3. \tag{1.57}$$

Rozwiązaniem powyższego układu są $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, co daje $[F] = [D_k][\mu][U]$. Zatem zmienna bezwymiarowa Π, która wyraża F przez trzy wybrane zmienne podstawowe ma postać $\Pi = \frac{F}{D_k \mu U}$, a funkcja $f(\Pi) = const$ może być zapisana jako

$$f\left(\frac{F}{D_k\,\mu\,U}\right) = const. \tag{1.58}$$

Funkcja czterech zmiennych F, D_k, μ, U została zastąpiona jedną zmienną bezwymiarową Π.

1.5.2.2. Wiskozymetr Höpplera

Doświadczalnie stwierdzono, że na współczynnik lepkości $[\mu] = \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$ w wiskozymetrze Höpplera wpływ ma czas opadania kulki $[t] = \mathrm{s}$, gęstość kulki i badanej cieczy $[\rho_k] = [\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$, średnica kulki i rurki $[D_k] = [D] = \mathrm{m}$, kąt nachylenia rurki $[\alpha] = [-]$, przyspieszenie ziemskie $[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}$ i wysokość opadania $[H] = \mathrm{m}$, co zapisujemy $f(\mu, t, \rho_k, \rho, D, D_k, \alpha, g, H) = 0$. Funkcja F zależy więc od dziewięciu zmiennych, ale osiem jest wymiarowych, więc $n = 8$. Mamy trzy jednostki podstawowe kg, m, s, więc $k = 3$. Zgodnie z twierdzeniem Buckinghama możemy funkcję f zapisać w innej postaci $f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \alpha) = 0$, która zależy od sześciu zmiennych bezwymiarowych, tj $n - k = 5$ i dodatkowo bezwymiarowy kąt α. Do grupy zmiennych podstawowych wybrać można przykładowo t, ρ, D_k.

Postać zmiennej bezwymiarowej Π_1 znajdujemy w ten sposób, że jednostki μ wyrażamy przez wybrane jednostki podstawowe podniesione do nieznanych potęg: $[\mu] = [t]^{a_1}[\rho]^{a_2}[D_k]^{a_3}$. Zapis ten odpowiada następującemu $\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}} = \mathrm{s}^{a_1}\mathrm{kg}^{a_2}\mathrm{m}^{-3a_2}\mathrm{m}^{a_3}$. Ponieważ lewa strona równa się prawej, więc otrzymujemy następujący układ równań, odpowiednio dla kg, m, s

$$1 = a_2, \tag{1.59}$$

$$-1 = -3a_2 + a_3, \tag{1.60}$$

$$-1 = a_1. \tag{1.61}$$

Rozwiązaniem powyższego układu są $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, co daje $[\mu] = [t]^{-1}[\rho][D_k]^2$. Zatem zmienna bezwymiarowa Π_1, która wyraża μ przez trzy wybrane zmienne podstawowe ma postać $\Pi_1 = \frac{\mu}{t^{-1}\rho D_k^2}$. Sytuacja jest jeszcze prostsza w przypadku zmiennych ρ_k, D i H. Postępując analogicznie, otrzymamy $\Pi_2 = \frac{\rho_k}{\rho}$, $\Pi_3 = \frac{D}{D_k}$, $\Pi_4 = \frac{H}{D_k}$. Ostatnią zmienną jest przyspieszenie ziemskie g, której jednostki można wyrazić w następujący sposób $[g] = [t]^{a_1}[\rho]^{a_2}[D_k]^{a_3}$, lub $\mathrm{m\,s^{-2}} = \mathrm{s}^{a_1}\mathrm{kg}^{a_2}\mathrm{m}^{-3a_2}\mathrm{m}^{a_3}$. Odpowiada to następującemu układowi równań

$$0 = a_2, \tag{1.62}$$

$$1 = -3a_2 + a_3, \tag{1.63}$$

$$-2 = a_1. \tag{1.64}$$

Rozwiązaniem powyższego układu są $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, co daje $[g] = [t]^{-2}[D_k]$. Ostatnia zmienna bezwymiarowa Π_5, która wyraża g przez trzy wybrane zmienne podstawowe ma postać $\Pi_5 = \frac{g}{t^{-2}D_k}$. Zatem funkcja dziewięciu zmiennych zastąpiona została funkcją sześciu zmiennych bezwymiarowych

$$f\left(\frac{\mu t}{\rho D_k^2}, \frac{\rho_k}{\rho}, \frac{D}{D_k}, \frac{H}{D_k}, \frac{gt^2}{D_k}, \alpha\right) = 0. \tag{1.65}$$

Bibliografia

[1] I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN, Warszawa, 2004

[2] E. Buckingham, *On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations*, Physical Review, Vol. 4, No. 4, pp 345–376, 1914

[3] W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa, 2003

[4] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995

[5] A. Vaschy, *Sur les lois de similitude en physique*, Annales Télégraphiques, Vol 19, pp 25–28, 1892

Rozdział 2

Doświadczenie Reynoldsa

Krzysztof Tesch

2.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest powtórzenie doświadczenia Reynoldsa, które umożliwia obserwację różnych charakterów przepływów od laminarnych, przez przejściowe do turbulentnych. Przepływy te charakteryzują się różnymi liczbami Reynoldsa, które obliczane są na podstawie pomiarów.

2.2. Podstawowe informacje

2.2.1. Liczba Reynoldsa

Liczba Reynoldsa[1] jest liczbą kryterialną (podobieństwa), która wyraża stosunek sił bezwładności $\rho U^2 L^{-1}$ do sił lepkości $\mu U L^{-2}$

$$Re = \frac{\frac{\rho U^2}{L}}{\frac{\mu U}{L^2}} = \frac{UL\rho}{\mu} = \frac{UL}{\nu}, \tag{2.1}$$

gdzie zależność między współczynnikiem lepkości dynamicznej μ i kinematycznej ν dana jest wzorem $\mu = \rho\nu$. Liczba Reynoldsa jest podstawowym kryterium określającym charakter przepływu. W definicji (2.1) przez L oznaczono wymiar charakterystyczny, który ma bezpośredni związek z określaniem charakteru przepływu. Np. dla rur kołowych jest to ich średnica. Dla innych przekrojów wymiar charakterystyczny oblicza się jako stosunek czterech pól powierzchni do obwodu. Przez U oznaczono prędkość charakterystyczną, która również związana jest określeniem charakteru przepływu. Dla rur kołowych jest to średnia prędkość, gdzie średnia rozumiana jest tu jako średnia powierzchniowa. Z powyższych definicji wynika, że liczba Reynoldsa nie jest parametrem określonym lokalnie.

[1] Osborne Reynolds (1842-1912) – irlandzki inżynier

Zależność (2.1) słuszna jest dla przepływów newtonowskich, do których zalicza się między innymi wodę i powietrze. Dla przepływów nienewtonowskich, tzn. tych które nie spełniają hipotezy Newtona, lepkość nie musi być wielkością stałą lub zależną tylko od temperatury. Dla wielu płynów nienewtonowskich lepkość zależy od pochodnych prędkości, które przyjmują różne wartości, chociażby dla różnych odległości od opływanych ścianek.

2.2.2. Przepływy laminarne i turbulentne

Z przepływem laminarnym[2)] mamy do czynienia, gdy odbywa się on przy liczbie Reynoldsa mniejszej od krytycznej. Przepływ ten inaczej nazywa się przepływem uwarstwionym, gdyż poszczególne warstwy płynu nie mieszają się w skali makro. Nie ma ruchu w kierunku prostopadłym do warstw. Przepływy newtonowskie w rurach kołowych są laminarne dla liczb Reynoldsa poniżej wartości około 2300. Liczba $Re = 2300$ nazywana jest również dolną liczbą krytyczną. Wprowadzanie lokalnych zaburzeń do przepływu, poniżej dolnej krytycznej liczby Reynoldsa, spowoduje ich wygaśnięcie.

Ruch laminarny może się utrzymywać nawet po przekroczeniu dolnej krytycznej liczby Reynoldsa, jeżeli brak jest zaburzeń przepływu. Sytuacja taka może mieć miejsce aż do momentu, gdzie osiągnięta zostanie tzw. górna krytyczna liczba Reynoldsa. Wtedy przepływ staje się turbulentny.[3)] Przepływ można sturbulizować już przed osiągnięciem górnej krytycznej liczby Reynoldsa, wprowadzając do przepływu zaburzenia. Pomiędzy przepływem laminarnym i turbulentnym mamy do czynienia z tzw. przepływem przejściowym. Mamy z nim do czynienia dla liczb Reynoldsa pomiędzy dolną i górną krytyczną wartością tej liczby. Powyżej górnej krytycznej liczby Reynoldsa przepływ jest zawsze turbulentny, a poniżej dolnej krytycznej liczby Reynoldsa przepływ jest zawsze laminarny. Górna krytyczna liczba Reynoldsa może przyjmować wartości rzędu 10000 i nawet więcej, choć jej wartości różnią się w zależności od danych eksperymentalnych.

Do chwili obecnej nie istnieje zadowalająca teoria turbulencji i dlatego trudno definiować turbulencję i, co za tym idzie, ruch turbulentny. Można jednak podać kilka cech takiego ruchu, do których zaliczyć można jego nieregularność, niestacjonarność, czy trójwymiarowość. Pole prędkości charakteryzować się będzie fluktuacjami w przestrzeni i czasie. W przeciwieństwie do ruchu laminarnego w rurze, gdzie nie ma mieszania między warstwami, dla przepływu turbulentnego takie mieszanie występuje. Oznacza to, że jest ruch w kierunku prostopadłym do osi rury. Wynika z tego, że np. zjawisko mieszania przepływu jest efektywniejsze w ruchu turbulentnym niż laminarnym. Przepływ turbulentny może być podtrzymywany tylko wtedy, gdy dostarczana jest do niego energia. Gdy energia przestanie być dostarczana, to przepływ będzie się laminaryzował. Energia, która jest dostarczana do przepływu, musi być dyssypowana, więc model płynu opisującego przepływy turbulentne musi być modelem płynu lepkiego (równania Naviera-Stokesa). W technice mamy do czynienia głównie z przepływami turbulentnymi.

[2)] łac. *lamina*

[3)] łac. *turbulentus*

Według Kołmogorowa przepływ turbulentny składa się z całego szeregu wirów o różnych skalach. Skale zaczynają się od tych, które są porównywalne z wymiarami charakterystycznymi kanałów, w których przepływ ma miejsce. Skale zmniejszają się stopniowo aż do rozmiarów najmniejszych, przy których następuje dyssypacja energii. Największa dyssypacja energii, czyli zamiana energii w ciepło, ma miejsce wtedy, gdy siły bezwładności są porównywalne z siłami lepkościowymi. Energia kinetyczna, związana z dużymi skalami, jest przejmowana przez skale coraz mniejsze. Proces ten ma charakter kaskadowy. Najmniejsze skale, przy których następuje większość procesu dyssypacji, zwane są skalami Kołmogorowa. Liczba Reynoldsa na poziomie tych skał wynosi 1.

2.2.3. Liczba Reynoldsa a równania Naviera-Stokesa

Liczba Reynoldsa bierze się z zapisu równania Naviera-Stokesa w postaci bezwymiarowej, które dla przypadku nieściśliwego ma następującą postać [2]

$$Sh\frac{\partial \vec{U}^+}{\partial t^+} + \vec{U}^+ \cdot \nabla^+ \vec{U}^+ = \frac{\vec{f}^+}{Fr} - \frac{Eu}{\rho^+}\nabla^+ p^+ + \frac{\nu^+}{Re}\nabla^{2+}\vec{U}^+, \tag{2.2}$$

gdzie przez Sh oznaczono liczbę Strouhala, Fr liczbę Froude'a, Eu liczbę Eulera. Jeżeli siły lepkościowe dominują nad bezwładnościowymi $Re \ll 1$, to możliwa jest linearyzacja równania Naviera-Stokesa. Linearyzacja ta polega na odrzuceniu wyrazów bezwładnościowych. Otrzymuje się wtedy równanie Stokesa

$$\rho^{-1}\nabla p = \vec{f} + \nu\nabla^2\vec{U}. \tag{2.3}$$

Jeżeli siły bezwładności są dużo większe od sił lepkościowych, to możliwe jest inne uproszczenie równania Naviera-Stokesa, które polega na odrzuceniu wyrazów lepkościowych. Otrzymane równanie nosi nazwę równania Eulera

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = \vec{f} - \rho^{-1}\nabla p. \tag{2.4}$$

Równanie Eulera jest nadal równaniem nieliniowym (jak równanie Naviera-Stokesa), ale pierwszego rzędu. Związane jest to tym, że nie trzeba formułować dodatkowych warunków brzegowych. W tym wypadku chodzi o warunek adhezji.

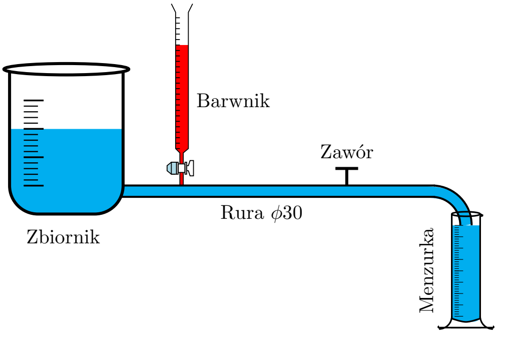
2.3. Doświadczenie

2.3.1. Opis stanowiska

Na rysunku 2.1 przedstawiono schemat stanowiska pomiarowego. Stanowisko składa się ze zbiornika zasilającego cieczą. Poziom tego zbiornika utrzymywany jest na stałym poziomie. Ze zbiornika wyprowadzona jest rura o średnicy 0.03 m. Do rury tej wprowadzany jest barwnik, który umożliwia obserwację charakteru przepływu. W dalszej części rury znajduje się zawór, który umożliwia regulację masowego natężenia przepływu. Z rury woda wydostaje się do menzurki, która umożliwia pomiar objętości $|V|$, który wypełni woda w czasie pomiaru t. Przeprowadzone doświadczenie w dużej mierze przypomina to, które przeprowadził Reynolds około roku 1883 [1].

2.3.2. Przebieg eksperymentu

Ćwiczenie polega na obserwacji charakteru przepływu, którego zmiany otrzymuje się wraz z regulacją zaworu. Obserwując zachowanie barwnika, który wpuszczany jest w osi rury, można zauważyć, że dla przepływu laminarnego zabarwiona struga porusza się równolegle do osi i nie miesza się z niezabarwioną wodą w skali makro. Stopniowo zwiększając masowe natężenie przepływu, widać, że zabarwiona struga nie porusza się równolegle do osi rury, ale wciąż nie miesza się z niezabarwioną wodą w skali makro. Jest to typowa obserwacja dla przepływu przejściowego. W przypadku, gdy odpowiednio zwiększymy natężenie przepływu, zaobserwujemy mieszanie się zabawionej strugi z wodą w sposób chaotyczny. Jest to typowe dla przepływu turbulentnego.



Rys. 2.1. Schemat stanowiska

W celu określenia liczby Reynoldsa, dokonuje się pomiaru czasu t w jakim woda wypełni menzurkę do określonej objętości $|V|$. Znajomość tych dwóch wielkości potrzebna jest do określenia średniej (charakterystycznej) prędkości U. Pomiarów dokonuje się dla przepływu laminarnego, przejściowego i turbulentnego. Odczytane wielkości zamieszcza się w tabeli 2.1 pomiarów i obliczeń.

2.4. Opracowanie wyników

2.4.1. Obliczenia

Liczbę Reynoldsa obliczamy ze wzoru (2.1). Lepkość kinematyczną ν znajdujemy ze wzoru $\mu = \rho\nu$, gdzie zależność gęstości ρ od temperatury T dla wody podana jest na wykresie A.1, a zależność na lepkość dynamiczną μ odczytujemy z wykresu A.2. Wymiar charakterystyczny, czyli średnica wewnętrzna rurociągu, wynosi $L = 0.03 \pm 0.001$ m. Pozostaje obliczenie prędkości charakterystycznej U. Z równania zachowania masy wiadomo, że $\dot{m} = \rho U|S|$, gdzie $|S|$ jest polem powierzchni przekroju rurociągu. Z drugiej strony masowe natężenie przepływu może być wyznaczone ze znajomości czasu t napełniania zbiornika o objętości $|V|$ w postaci $\dot{m} = |V|\rho t^{-1}$. W ten sposób prędkość charakterystyczna (średnia) dana jest wzorem

$$U = \frac{|V|}{|S|t}. \tag{2.5}$$

Wiedząc o tym, że pole powierzchni $|S| = \pi L^2 4^{-1}$, można podać zależność na liczbę Reynoldsa w postaci

$$Re = \frac{4|V|}{\pi \nu L t}. \tag{2.6}$$

Błąd pomiaru liczby Reynoldsa zależy od co najmniej trzech czynników. Zaliczają się do nich błąd pomiaru średnicy rurociągu L, błąd pomiaru czasu t i błąd pomiaru objętości $|V|$. Pomijamy tutaj błąd wyznaczania lepkości ν. Maksymalny błąd bezwzględny z jakim wyliczana jest liczba Reynoldsa może być oszacowany na podstawie różniczki zupełnej $\Delta_{Re} \approx \mathrm{d}Re(L, t, |V|)$. Liczba Reynoldsa traktowana jest tutaj jako funkcja trzech zmiennych. Mamy zatem

$$\Delta_{Re} = \left|\frac{\partial Re}{\partial L}\Delta_L\right| + \left|\frac{\partial Re}{\partial t}\Delta_t\right| + \left|\frac{\partial Re}{\partial |V|}\Delta_{|V|}\right|, \tag{2.7}$$

gdzie przez Δ_L, Δ_t, $\Delta_{|V|}$ oznaczono błędy bezwzględne wielkości mierzonych L, t i $|V|$. Wartość Δ_L wynosi $\pm 0.001\,\mathrm{m}$. Wartości Δ_t i $\Delta_{|V|}$ zostaną oszacowane podczas eksperymentu. Oprócz błędów bezwzględnych definiuje się błędy względne. Dla średnicy mamy $\delta_L = \frac{\Delta_L}{L} = \frac{1}{30}$, dla czasu $\delta_t = \frac{\Delta_t}{t}$ i objętości $\delta_{|V|} = \frac{\Delta_{|V|}}{|V|}$. Wyliczając odpowiednie pochodne z równania (2.6), dzieląc obustronnie zależność (2.7) przez Re i wykorzystując definicje błędów względnych, możemy otrzymać wzór na błąd względny liczby Reynoldsa

$$\delta_{Re} = \delta_t + \delta_L + \delta_{|V|}. \tag{2.8}$$

Tabela 2.1. Błędy bezwzględne

Przepływ	t [s]	$\lvert V\rvert$ [m^3]	Re	δ_{Re} [%]
laminarny				
przejściowy				
turbulentny				
⋮				

2.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać numer grupy laboratoryjnej, rok i kierunek studiów, datę i nazwę przeprowadzenia ćwiczenia. Dalej powinien być podany cel ćwiczenia, schemat stanowiska pomiarowego, tabelę pomiarów i obliczeń, przykład obliczeniowy i wnioski. Sprawozdanie przygotowywane jest jedno na grupę laboratoryjną.

2.5. Pytania kontrolne

i. Opisać górną i dolną krytyczną liczbę Reynoldsa.

ii. Omówić różnice między przepływem laminarnym i turbulentnym.

Oznaczenia

Eu	liczba Eulera
$\vec{f}$	gęstość rozkładu sił objętościowych
Fr	liczba Froude'a
L	wymiar charakterystyczny
$\dot{m}$	masowe natężenie przepływu
p	ciśnienie
Re	liczba Reynoldsa
$\|S\|$	pole powierzchni
Sh	liczba Strouhala
t	czas
$\vec{U}$	wektor prędkości
U	charakterystyczna prędkość
$\|V\|$	objętość
δ	błąd względny
Δ	błąd bezwzględny
ρ	gęstość
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
ν	współczynnik lepkości kinematycznej

Bibliografia

[1] O. Reynolds, *An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels*, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 174, pp. 935–982, 1883

[2] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Dodatek – tabele pomiarowe

Tabele pomiarowe z dnia:

Tabela 2.2. Błędy bezwzględne

Δ_L [m]	± 0.001
Δ_t [s]	
$\Delta_{\|V\|}$ [ml]	

Tabela 2.3. Parametry wody

T [K]	
ρ [kg m^{-3}]	
μ [kg m^{-1}s^{-1}]	

Tabela 2.4. Pomiary

Przepływ	t [s]	$\|V\|$ [ml]

Rozdział 3

Wyznaczanie współczynnika lepkości za pomocą butli Mariotte'a

Krzysztof Tesch

3.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika lepkości dynamicznej μ wody za pomocą butli Mariott'a.[1] Dodatkowo wyznaczana jest liczba Reynoldsa w kapilarze, którą woda wylewa się z butli.

3.2. Doświadczenie

3.2.1. Opis stanowiska

Butla Mariotte'a pokazana jest na rysunku 3.1. Układ doświadczalny różni się od oryginału z rysunku 3.2, gdyż ten drugi nie posiada tzw. syfonu, który umożliwia opróżnianie butli przy stałym spadku ciśnienia, a więc ze stałą prędkością.

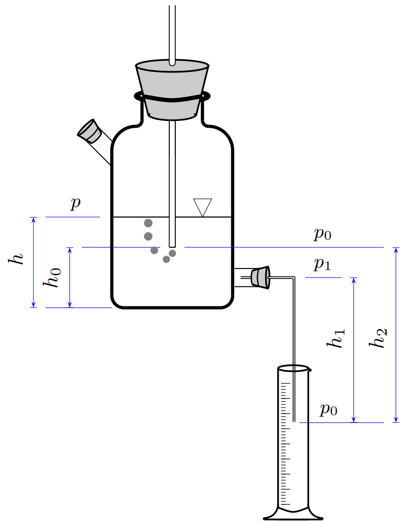
Butla (rys. 3.1) zamknięta jest od góry korkiem, przez który przechodzi rurka. Z lewej strony butla po napełnieniu wodą zamykana jest szczenie kolejnym korkiem, który nie posiada rurki. Z prawej strony, u dołu butli, znajduje się trzeci korek, przez który przechodzi kapilara. Przez tę kapilarę ciecz może wypływać z butli.

Kiedy po napełnieniu butli i zatkaniu korka bez rurki ciecz zaczyna wypływać, to można zaobserwować, że poziom lustra wody w butli i pionowej rurce są na początku identyczne $h = h_0$. W miarę upływu czasu oba poziomy się obniżają. Zjawisko to przebiega znacznie szybciej w pionowej rurce, aż do momentu, w którym lustro cieczy sięgnie końca rurki na wysokości h_0. Od tego momentu obniża się wyłącznie poziom cieczy w butli. Trwa to do chwili, kiedy lustro wody w butli obniży się do wysokości h_0.

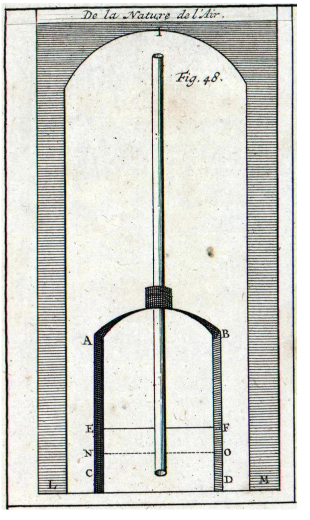
Pisząc równanie Bernoulliego [3] dla poziomów obu luster względem dna butli i pomijając prędkość lustra wody w butli, możemy znaleźć zależność na ciśnienia

[1] Edme Mariotte (1620-1684) – francuski fizyk

panujące w butli w postaci $p = p_0 - \rho g(h - h_0)$. Przez p_0 oznaczono tu ciśnienie atmosferyczne, które panuje nad lustrem wody w pionowej rurce. Ze wzoru tego widać, że w butli panuje podciśnienie. Podciśnienie to zmniejsza się w miarę spadku wysokości $h - h_0$, aż do momentu, kiedy oba lustra ponownie się zrównają. Dopóki $h > h_0$, to prędkość wypływu cieczy z kapilary jest stała. Jest tak, gdyż zarówno ciśnienie na wysokości h_0 i na wylocie z kapilary równe są ciśnieniu atmosferycznemu p_0, a ruch wymuszony jest wysokością słupa wody $h_2 - h_1$.



Rys. 3.1. Schemat stanowiska



Rys. 3.2. Butla Mariotte'a [1]

Jeżeli napisać teraz równanie Bernoulliego dla wysokości h_1 i h_2, dla poziomu odniesienia ustalonego na końcu kapilary, to po zaniedbaniu prędkości wody na wysokości h_1, mamy $p_1 = p_0 + \rho g(h_2 - h_1)$. Zatem różnica ciśnień między wysokością h_1 i wylotem z kapilary $\Delta p = p_1 - p_0$ równa się ciśnieniu wysokości słupa wody $h_2 - h_1$, co zapisujemy $\Delta p = \rho g(h_2 - h_1)$. Różnica ta wymusza wypływ wody przez kapilarę.

O ile ruch w kapilarze jest laminarny, to składowa prędkości U wzdłuż osi opisana jest równaniem [3]

$$U = \frac{\Delta p}{4\mu h_1}(4^{-1}D^2 - r^2). \tag{3.1}$$

Objętościowe natężenie przepływu we współrzędnych biegunowych wyznaczamy z zależności

$$\dot{V} = 2\pi \int\limits_0^{D/2} U\, r\, \mathrm{d}r. \tag{3.2}$$

Po scałkowaniu, otrzymujemy prawo Poiseuille'a[2)] [2] w postaci

$$\dot{V} = \frac{\pi D^4}{128\mu h_1}\Delta p. \tag{3.3}$$

Ponieważ objętościowe natężenie przepływu $\dot{V}$ może być zmierzone jako objętość $|V|$ menzurki (rys. 3.1) w czasie napełniania t, oraz spadek ciśnienia równy jest $\Delta p = \rho g(h_2 - h_1)$, to ze wzoru (3.3) otrzymujemy następującą zależność

$$|V| = \frac{\pi\rho g D^4}{128\mu}\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right)t, \tag{3.4}$$

która umożliwia wyznaczenie współczynnika lepkości μ.

3.2.2. Przebieg eksperymentu

Po napełnieniu butli Mariotte'a i zatkaniu jej korkiem bez rurki, należy poczekać, aż lustro wody w rurce pionowej opadnie do wysokości h_0. Następnie podstawia się pustą menzurkę pod wylot z kapilary i włącza się stoper. Dokonuje się kilku pomiarów czasu, np. co 100 cm^3. Dane zapisuje się w tabeli pomiarowej 3.4. Dodatkowo należy zmierzyć temperaturę wody (tabela 3.3), aby na tej podstawie ustalić gęstość i lepkość referencyjną wody z wykresów A.1 i A.2. Lepkość referencyjna wody potrzebna jest do porównania, do wyliczenia liczby Reynoldsa w kapilarze oraz do kalibracji butli. Liczba Reynoldsa powinna być niższa od dolnej krytycznej wartości tak, aby przepływ był laminarny, co jest zapewnione przez odpowiedni dobór średnicy kapilary i wysokości $h_2 - h_1$. Błędy bezwzględne pomiaru czasu Δ_t i objętości $\Delta_{|V|}$ ustala się podczas eksperymentu i zapisuje się w tabeli 3.2.

3.3. Opracowanie wyników

3.3.1. Obliczenia

3.3.1.1. Pojedyncze pomiary

Wzór na współczynnik lepkości znajdujemy z zależności (3.4) i zapisujemy jako

$$\mu = \frac{\pi\rho g D^4}{128|V|}\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right)t. \tag{3.5}$$

Ze wzoru tego można wyliczyć błędy bezwzględne i względne pomiaru współczynnika lepkości. Dla pojedynczych pomiarów można to zrobić za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_\mu \approx \mathrm{d}\mu(D, |V|, t, h_1, h_2)$. Można zapisać, że

$$\Delta_\mu = \left|\frac{\partial\mu}{\partial D}\Delta_D\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial|V|}\Delta_{|V|}\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial t}\Delta_t\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial h_1}\Delta_{h_1}\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial h_2}\Delta_{h_2}\right|. \tag{3.6}$$

[2)] Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) – francuski lekarz i fizyk

Przez Δ_x oznaczono tutaj błędy bezwzględne wielkości x. Oprócz błędów bezwzględnych wygodnie porównywać się również błędami względnymi, które definiuje się jako $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}$. Dzieląc obie strony zależności (3.6) przez μ i porządkując, otrzymamy następującą zależność na błąd względny pomiaru lepkości

$$\delta_\mu = 4\delta_D + \delta_{|V|} + \delta_t + \frac{1}{1 - \frac{h_1}{h_2}} \left(\delta_{h_1} + \delta_{h_2}\right). \tag{3.7}$$

Z obliczonego błędu względnego mamy błąd bezwzględny $\Delta_\mu = \mu\, \delta_\mu$.

Liczbę Reynoldsa znajdujemy z zależności

$$Re = \frac{4\rho|V|}{\pi\mu_r D t}, \tag{3.8}$$

gdzie za współczynnik lepkości referencyjnej μ_r bierzemy wartość z wykresu A.2 tak, aby nie propagować kolejnych błędów. Błąd pomiaru liczby Reynoldsa znajdujemy metodą różniczki zupełnej. Dla wartości względnej tego błędu mamy następującą zależność

$$\delta_{Re} = \delta_t + \delta_D + \delta_{|V|}. \tag{3.9}$$

Dla wartości bezwzględnej $\Delta_{Re} = Re\, \delta_{Re}$. Wyniki pomiarów i obliczeń zamieszczamy w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Pomiary i obliczenia

Nr	1	2	...	n
t [s]				
$\|V\|$ [m^3]				
μ [kg m^{-1}s^{-1}]				
Δ_μ [kg m^{-1}s^{-1}]				
δ_μ [%]				
Re				
Δ_{Re}				
δ_{Re} [%]				
χ				
Δ_χ				
δ_χ [%]				

Poza błędami pomiarów, omówionymi powyżej, mamy jeszcze dodatkowe przyczyny ich powstawania. Do błędów tych zaliczyć można błąd wynikający ze stosowania równania Bernoulliego, które wyprowadzane jest przy założeniu nielepkości płynu. Związane jest to z pominięciem strat, które mają miejsce w przypadku opisywanego tu układu. Do strat tych zaliczyć można stratę wlotową do kapilary i straty liniowe w jej poziomym odcinku. Wynikiem tego jest mniejsze ciśnienie na wysokości h_1 tuż przed pionową częścią kapilary, niż na jej wlocie. Kolejnym problemem jest to, że kapilara nie jest zagięta pod kątem prostym tak, jak jest to pokazane na rysunku 3.1, a ma postać łagodnego łuku. Powstaje zatem problem jednoznacznego określenia wysokości h_1. W przypadku takim można rozważaną butlę podać kalibracji przy użyciu wartości współczynnika lepkości, który był wyznaczany innymi (dokładniejszymi) metodami. Należy jednak pamiętać, że dane tablicowe posiadają również swoje niepewności, które zwykle są pomijane.

W celu kalibracji butli zdefiniujmy bezwymiarowy współczynnik butli χ w postaci

$$\chi := \frac{h_2}{h_1} - 1. \tag{3.10}$$

Zawiera on w sobie stosunek obu wysokości h_2 i h_1. O ile pomiar h_2 jest dobrze zdefiniowany, o tyle pomiar h_1 jest kłopotliwy. Definicja (3.10) jest wygodna z rachunkowego punktu widzenia przy określaniu błędów. Równanie (3.4) przyjmie następującą postać po wyznaczyniu χ

$$\chi = \frac{128\mu_r|V|}{\pi\rho g D^4 t}. \tag{3.11}$$

Posłużono się tu lepkością referencyjną, w oparciu o którą kalibruje się butlę. Wyliczając błąd bezwzględny metodą różniczki zupełnej, mamy

$$\Delta_\chi = \left|\frac{\partial\chi}{\partial D}\Delta_D\right| + \left|\frac{\partial\chi}{\partial|V|}\Delta_{|V|}\right| + \left|\frac{\partial\chi}{\partial t}\Delta_t\right|. \tag{3.12}$$

Dzieląc obustronnie przez χ, można wyznaczyć wzór na błąd względny χ w postaci

$$\delta_\chi = 4\delta_D + \delta_{|V|} + \delta_t, \tag{3.13}$$

skąd można wyliczyć również błąd bezwzględny $\Delta_\chi = \chi\,\delta_\chi$. Wyniki obliczeń na podstawie wzorów (3.11) i (3.13) umieszcza się w tabeli 3.1. Dodatkowo, na podstawie wyliczonego współczynnika χ ze wzoru (3.11), można wyznaczyć wysokość h_1 i porównać ją z jej wartością zmierzoną. Powinna ona być niższa od pomierzonej według schematu z rys. 3.1, gdyż tylko wtedy otrzymamy większą różnicę wysokości $h_2 - h_1$, która zrekompensuje stratę wlotową i liniową. Mając w ten sposób wyznaczoną wysokość h_1, można otrzymać dużo lepszą zgodność otrzymanych pomiarów w porównaniu z pomiarami z innych metod.

Tabela 3.2. Wartości średnie

$\bar{\mu}$ [kg m^{-1}s^{-1}]	
$\Delta_{\bar{\mu}}$ [kg m^{-1}s^{-1}]	
$\delta_{\bar{\mu}}$ [%]	
$\bar{\chi}$	
$\Delta_{\bar{\chi}}$	
$\delta_{\bar{\chi}}$ [%]	

Tabela 3.3. Regresja liniowa

r	
B	
Δ_B	
δ_B [%]	
μ [kg m^{-1}s^{-1}]	
χ	

3.3.1.2. Średnie

Na podstawie serii pojedynczych pomiarów z tabeli 3.1 można obliczyć średnią wartość lepkości $\bar{\mu}$ i współczynnika $\bar{\chi}$ w postaci średnich arytmetycznych

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \quad \bar{\chi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi_i. \tag{3.14}$$

Ze względu na małą liczbę pomiarów, błądy bezwzględne średnich wartości $\bar{\mu}$ i $\bar{\chi}$ przyjmujemy jako błędy przeciętne pojedynczych pomiarów z tabeli 3.1

$$\Delta_{\bar{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta_{\mu,i}|, \quad \Delta_{\bar{\chi}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta_{\chi,i}|. \tag{3.15}$$

Jest tak również dlatego, że błędy systematyczne (ze względu na przyjęte dokładności) dominują nad przypadkowymi. Błądy względne średnich obliczmy jako $\delta_{\bar{\mu}} = \frac{\Delta_{\bar{\mu}}}{\bar{\mu}}$ i $\delta_{\bar{\chi}} = \frac{\Delta_{\bar{\chi}}}{\bar{\chi}}$. Wyniki zamieszczamy w tabeli 3.2.

3.3.1.3. Regresja liniowa

Wór (3.4) przedstawia sobą liniową zależność na $|V|$ w funkcji t w postaci $|V| = B\,t$, gdzie współczynnikiem kierunkowym jest

$$B := \frac{\pi\rho g D^4}{128\mu}\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right) = \frac{\pi\rho g D^4\chi}{128\mu_r}. \tag{3.16}$$

Przy wykonaniu serii pomiarów istnieje możliwość zastosowania metody regresji liniowej do wyznaczenia wartości współczynnika B (wzory (1.44)-(1.47), $x := t$, $y := |V|$) i za jego pomocą określenia wartości μ i χ ze wzoru (3.16). Współczynnik korelacji liniowej r obliczamy ze wzoru (1.45). Błędy bezwzględne określenia współczynnika Δ_B można określić za pomocą zależności (1.51). Błąd Δ_B przeliczamy na błąd względny $\delta_B = \frac{\Delta_B}{B}$. Wyniki obliczeń zamieszczamy w tabeli 3.3.

3.3.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać numer grupy laboratoryjnej, rok i kierunek studiów, datę i nazwę przeprowadzenia ćwiczenia. Dalej powinien być podany cel ćwiczenia, schemat stanowiska pomiarowego, tabela 3.1 pomiarów i obliczeń, wartości średnie (tabela 3.2), wyniki z regresji liniowej (tabela 3.3), przykład obliczeniowy, wykres regresji liniowej z naniesionymi punktami pomiarowymi i słupkami błędów, wnioski.

3.4. Pytania kontrolne

i. Na jakiej zasadzie działa butla Mariotte'a?

ii. Jaką postać ma równanie Bernoulliego dla poziomów luster wody?

iii. Jak można skalibrować butlę?

iv. Jaka powinna być konstrukcja butli, aby zminimalizować straty w kapilarze i ujednoznacznić pomiar h_1?

Oznaczenia

B	współczynnik kierunkowy
D	średnica
g	przyspieszenie ziemskie
h	wysokość
n	liczba pomiarów
p	ciśnienie
r	promień, współczynnik korelacji
Re	liczba Reynoldsa
t	czas
T	temperatura
U	składowa prędkości wzdłuż osi kapilary
$\lvert V\rvert$	objętość
$\dot{V}$	objętościowe natężenie przepływu
x	wielkość, zmienna
δ	błąd względny
Δ	błąd bezwględny
Δp	spadek (różnica) ciśnienia
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
ρ	gęstość
χ	współczynnik butli

Bibliografia

[1] E. Mariotte, *Oeuvres de Mr. Mariotte, de l'Académie Royale des Sciences*, A. Leide, 1717

[2] J. L. M. Poiseuille, *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres*, Mémoires presentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, IX, pp. 433–544, 1846

[3] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Dodatek – tabele pomiarowe

Tabele pomiarowe z dnia:

Tabela 3.2. Błędy bezwzględne

Δ_t [s]	
$\Delta_{\lvert V\rvert}$ [cm^3]	

Tabela 3.3. Parametry wody

T [K]	
ρ [kg m^{-3}]	
μ_r [kg m^{-1}s^{-1}]	

Tabela 3.4. Pomiary

Nr	t [s]	$\lvert V\rvert$ [cm^3]
1		
2		
3		
4		
5		

Tabela 3.5. Wymiary

D [mm]	2.57 ± 0.01
h_1 [mm]	167 ± 5
h_2 [mm]	206 ± 5

Rozdział 4

Wyznaczanie współczynnika lepkości za pomocą opadającej kulki

Krzysztof Tesch

4.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika lepkości dynamicznej μ oleju silikonowego za pomocą opadającej kulki w naczyniu wypełnionym badanym olejem. Do obliczeń współczynnika μ wykorzystany jest wzór Stokesa[1)] i jego modyfikacja, która wynika z równania Oseena.[2)]

4.2. Doświadczenie

4.2.1. Opis

Stanowisko pomiarowe pokazane jest na rysunku 4.1. Składa się ono ze zbiornika wypełnionego olejem, którego lepkość ma być wyznaczona. Do zbiornika wprowadza się kulkę, która opada swobodnie z prędkością U na skutek grawitacji. Na rysunku 4.1 pokazany jest również układ sił, które działają na kulkę. Na poruszającą się kulkę działają siła ciężaru [5] $G = 6^{-1}\pi D_k^3 \rho_k g$, siła wyporu $N = 6^{-1}\pi D_k^3 \rho g$ oraz siła oporu F. W najprostszym przypadku siła oporu F jest funkcją średnicy kulki D_k, współczynnika lepkości dynamicznej μ i prędkości opadania U. Zapisać to można w następujący sposób $f(D_k, \mu, F, U) = const$. Na podstawie analizy wymiarowej można pokazać (paragraf 1.5.2.1), że poszukiwana funkcja f musi mieć postać $f(FD_k^{-1}\mu^{-1}U^{-1}) = const$. Stokes [4], rozwiązując równania ruchu pełzającego, podał następującą zależność na siłę oporu, która nazywana jest prawem Stokesa $F = 3\pi\mu D_k U$. Jest więc to liniowa postać funkcji f, gdzie stała *const* wynosi 3π.

Jeżeli kulkę potraktować jako punkt materialny o masie m_k, to równanie ruchu

[1)] George Gabriel Stokes (1819-1903) – irlandzki fizyk i matematyk
[2)] Carl Wilhelm Oseen (1879-1944) – szwedzki fizyk

kulki w kierunku działania wektora grawitacji $\vec{g}$ można zapisać jako

$$m_k \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = G - N - F. \tag{4.1}$$

Podstawiając odpowiednie zależności na poszczególne siły i porządkując, otrzymamy następujące równanie różniczkowe na prędkość opadania kulki

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{18\mu}{D_k^2 \rho_k} U = g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_k}\right). \tag{4.2}$$

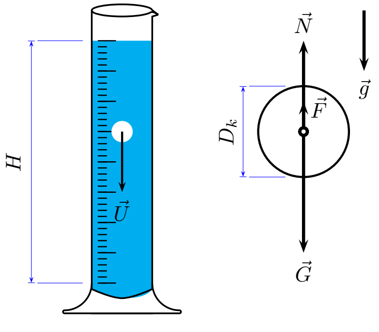
Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, liniowe, pierwszego rzędu, którego rozwiązanie analityczne ma postać

$$U = \frac{D_k^2 g}{18\mu}\left(\rho_k - \rho\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{18\mu t}{D_k^2 \rho_k}\right)\right). \tag{4.3}$$

Rozwiązanie powyższe otrzymane zostało dla warunku początkowego $U(0) = 0$, co oznacza, że kulka zaczyna opadać ze stanu spoczynku. Należy zdawać sobie sprawę z tego, że powyższe rozwiązanie, które wynika z równania ruchu kulki (4.1), opisuje prędkość z jaką porusza się kulka, a nie pole prędkości płynu. Przechodząc z powyższym rozwiązaniem do granicy, dla $t \to \infty$, otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} U = \frac{D_k^2 g}{18\mu}\left(\rho_k - \rho\right). \tag{4.4}$$

Rozwiązanie (4.4) przedstawia prędkość, kiedy kulka zaczyna poruszać się ruchem jednostajną, tzn. kiedy ciężar równoważony jest wyporem i oporem. Rozwiązanie (4.4) można otrzymać z równania ruchu (4.1), jeżeli założy się równowagę $G - N - F = 0$. Jest to równanie algebraiczne i nie wymaga stawiania warunku początkowego w przeciwieństwie do równania (4.1).



Rys. 4.1. Schemat stanowiska

Rozwiązanie (4.3) przedstawia sobą prędkość, która zależy od czasu. Może ona być powiązana z wysokością opadania H i czasem opadania t następującą zależnością

$H = \bar{U}t$, gdzie $\bar{U}$ jest prędkością średnią w myśl definicji $\bar{U} = \frac{1}{t}\int_0^t U\,\mathrm{d}t$. W ten sposób rozwiązanie (4.3) można zapisać jako

$$H = \frac{D_k^2 g}{18\mu}\left(\rho_k - \rho\right)\left(t + \frac{D_k^2\rho_k}{18\mu}\left(\exp\left(-\frac{18\mu t}{D_k^2\rho_k}\right) - 1\right)\right), \tag{4.5}$$

lub dla ruchu jednostajnego

$$H = \frac{D_k^2 g t}{18\mu}\left(\rho_k - \rho\right). \tag{4.6}$$

4.2.2. Przebieg eksperymentu

Eksperyment polega na kilkukrotnym pomiarze czasu t opadania kulki na drodze H. Wielkości te potrzebne są do wyznaczenia współczynnika lepkości w oparciu o wzór (4.6). Pomiary czasu opadania zapisujemy w tabeli 4.6. Wysokość opadania H zapisywana jest w tabeli 4.7 wraz z pomierzonymi wysokościami słupów wody i oleju jak na rysunku 4.2. Temperatura wody T zapisywana jest w tabeli 4.5 i służy ona do wyznaczenia gęstości wody ρ_1.

Tabela 4.1. Obliczenia gęstości

$\rho\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$	
$\Delta_\rho\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$	
$\delta_\rho\,[\%]$	
$\rho_k\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$	
$\Delta_{\rho_k}\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$	
$\delta_{\rho_k}\,[\%]$	

4.3. Opracowanie wyników

4.3.1. Obliczenia

4.3.1.1. Wyznaczanie gęstości kulki i oleju

Gęstość ρ_k szklanej kulki o średnicy D_k i masie m_k (tabela 4.7) wyznaczana jest ze wzoru $\rho_k = m_k|V_k|^{-1}$, co po podstawieniach daje

$$\rho_k = \frac{6\,m_k}{\pi D_k^3}. \tag{4.7}$$

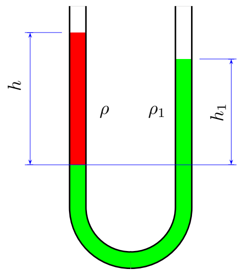
Błąd bezwzględny określenia gęstości znajdujemy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_{\rho_k} \approx \mathrm{d}\rho_k(m_k, D_k)$

$$\Delta_{\rho_k} = \left|\frac{\partial\rho_k}{\partial m_k}\Delta_{m_k}\right| + \left|\frac{\partial\rho_k}{\partial D_k}\Delta_{D_k}\right|. \tag{4.8}$$

Znając błędy względne pomiarów $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}$ i dzieląc powyższą zależność obustronnie przez gęstość kulki, można wyznaczyć błąd względny pomiaru wyznaczania gęstości kulki w postaci

$$\delta_{\rho_k} = \delta_{m_k} + 3\,\delta_{D_k}. \tag{4.9}$$

W ten sposób jesteśmy w stanie również określić błąd bezwzględny $\Delta_{\rho_k} = \rho_k \delta_{\rho_k}$. Wyniki umieszczamy w tabeli 4.1.



Rys. 4.2. U-rurka

Do wyznaczenia gęstości oleju, w którym opada kulka, można posłużyć się u-rurką, która pokazana jest na rysunku 4.2. U-rurka wypełniona jest badanym olejem i drugą cieczą, której gęstość znamy. Może być to np. woda, której gęstość w funkcji temperatury jest łatwa do określenia. Obie ciecze nie mieszają się i tworzą wyraźną powierzchnię rozdziału. Równanie Bernoulliego dla przypadku hydrostatycznego [5] ma postać $p+\rho g h = const$. Przyjmując poziom odniesienia na granicy rozdziału cieczy i pamiętając o tym, że na powierzchniach swobodnych mamy ciśnienie atmosferyczne, możemy zapisać, że $\rho h = \rho_1 h_1$. Z równania tego wynika poszukiwana gęstość oleju

$$\rho = \rho_1 \frac{h_1}{h}. \tag{4.10}$$

Błąd bezwzględny pomiaru gęstości wyznaczamy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_\rho \approx \mathrm{d}\rho(h, h_1)$ w postaci

$$\Delta_\rho = \left|\frac{\partial \rho}{\partial h}\Delta_h\right| + \left|\frac{\partial \rho}{\partial h_1}\Delta_{h_1}\right|. \tag{4.11}$$

Dzieląc obustronnie powyższą zależność przez ρ, otrzymujemy zależność na błądy względne

$$\delta_\rho = \delta_h + \delta_{h_1}. \tag{4.12}$$

Znając błędy względne $\delta_h = \frac{\Delta_h}{h}$, można z powyższej zależności określić błąd bezwzględny pomiaru gęstości oleju $\Delta_\rho = \rho\,\delta_\rho$. Wyniki zamieszczamy w tabeli 4.1.

4.3.1.2. Pomiary czasu

Czas opadania kulki wyznaczamy na podstawie serii pomiarów z tabeli 4.6. Średni czas $\bar{t}$ rozumiany jest jako średnia arytmetyczna

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i. \tag{4.13}$$

Wariancję dla pojedynczego pomiaru σ_t^2 wyznaczmy ze wzoru

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2, \tag{4.14}$$

skąd można wyznaczyć odchylenie standardowe σ_t. Wielkość ta charakteryzuje błąd pojedynczego pomiaru. Dla serii n pomiarów błąd bezwzględny wyznaczamy z zależności

$$\Delta_t = \frac{\sigma_t}{\sqrt{n}}\,\mathrm{t}(p,n). \tag{4.15}$$

W powyższej zależności przez $\mathrm{t}(p,n)$ oznaczono kwantyl rzędu p (przedział ufności) przy n stopniach swobody (pomiarach). Wartości $\mathrm{t}(p,n)$ odczytywane są z tabeli 1.2. Należy przyjąć przedział ufności p na poziomie 95%, czyli $p = 0.95$. Błąd względny pomiaru czasu δ_t wyliczamy z zależności $\delta_t = \frac{\Delta_t}{\bar{t}}$. Wyniki zamieszczamy w tabeli 4.2.

Tabela 4.2. Obliczenia czasu pomiaru

$\bar{t}$ [s]	
Δ_t [s]	
δ_t [%]	

Tabela 4.3. Obliczenia współczynnika lepkości

$\mu_s\chi$ [kg m^{-1}s^{-1}]	
$\mu_o\chi$ [kg m^{-1}s^{-1}]	
Δ_μ [kg m^{-1}s^{-1}]	
δ_μ [%]	

4.3.1.3. Wyznaczanie współczynnika lepkości

Znając gęstości kulki ρ_k i oleju ρ, oraz średni czas pomiaru $\bar{t}$, można wyznaczyć współczynnik lepkości na podstawie zależności (4.6). Dla przybliżenia Stokesa otrzymujemy następującą zależność na współczynnik lepkości

$$\mu_s = \frac{D_k^2 g\,\bar{t}}{18H}\left(\rho_k - \rho\right). \tag{4.16}$$

Można również podać analogiczny wzór dla przybliżenia Oseena [3, 2] w postaci

$$\mu_o = \frac{D_k^2 g\,\bar{t}}{18H}\left((\rho_k - \rho) - \frac{27\rho H^2}{8D_k g\bar{t}^2}\right). \tag{4.17}$$

Słuszność zależności (4.16) zachodzi dla liczby Reynoldsa $Re < 0.5$. Dla przybliżenia Oseena liczba Reynoldsa nieznacznie zwiększa się $Re < 1$. Błąd bezwzględny określenia współczynnika lepkości dla przybliżenia Oseena określamy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_\mu \approx \mathrm{d}\mu_s(D_k, \bar{t}, H, \rho_k, \rho)$

$$\Delta_\mu = \left|\frac{\partial\mu}{\partial D_k}\Delta_{D_k}\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial\bar{t}}\Delta_t\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial H}\Delta_H\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial\rho_k}\Delta_{\rho_k}\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Delta_\rho\right|. \tag{4.18}$$

Z powyższego równania, po podzieleniu obustronnym przez μ_s, można określić błąd względny pomiaru współczynnika lepkości

$$\delta_\mu = 2\delta_{D_k} + \delta_t + \delta_H + \frac{\delta_{\rho_k}}{1 - \frac{\rho}{\rho_k}} + \frac{\delta_\rho}{\frac{\rho_k}{\rho} - 1}. \tag{4.19}$$

Dla małych liczb Reynoldsa wartości μ_s i μ_o są bardzo bliskie sobie.

Oprócz liczby Reynoldsa, która ma wpływ na wyniki, bardzo istotny wpływ ma również obecność ścianek naczynia, w którym opada kulka. Wpływ jest tym większy, im wyższa wartość stosunku średnic kulki i naczynia $\frac{D_k}{D}$. Wynika to z tego, że Stokes [4] wyprowadził swój wzór na siłę oporu przy założeniu przepływu swobodnego, co oznacza brak ścianek. Wpływ ścianek może być określony na kilka sposobów. Jednym z nich jest współczynnik poprawkowy na lepkość χ. Współczynnik lepkości μ wyliczany jest wtedy z zależności $\mu = \mu_s\chi$. Według [1] współczynnik χ ma postać

$$\chi = 1 - 2.10443\frac{D_k}{D} + 2.08877\left(\frac{D_k}{D}\right)^3 - 0.94813\left(\frac{D_k}{D}\right)^5 - 1.372\left(\frac{D_k}{D}\right)^6 + 3.87\left(\frac{D_k}{D}\right)^8 - 4.19\left(\frac{D_k}{D}\right)^{10} + \ldots. \tag{4.20}$$

Wyniki obliczeń współczynników lepkości przemnożonych przez współczynnik poprawkowy χ oraz błędów zapisujemy w tabeli 4.3.

Tabela 4.4. Obliczenia liczby Reynoldsa

Re	
Δ_{Re}	
δ_{Re} [%]	

4.3.1.4. Wyznaczanie liczby Reynoldsa

Wzór na liczbę Reynoldsa może być zapisany w następującej postaci

$$Re = \frac{UD_k\rho}{\mu} = \frac{HD_k\rho}{\bar{t}\mu_s\chi}. \tag{4.21}$$

Posługujemy się tutaj współczynnikiem lepkości po uwzględnieniu poprawki na obecność ścianek naczynia $\mu = \mu_s\chi$. Wyznaczona w sten sposób liczba Reynoldsa pozwoli zorientować się, czy założenie o słuszności wzoru Stokesa lub Oseena $Re < 1$ jest spełnione. Błąd bezwzględny określenia liczby Reynoldsa znajdujemy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_{Re} \approx \mathrm{d}Re(D_k, \bar{t}, H, \rho_k, \rho)$

$$\Delta_{Re} = \left|\frac{\partial Re}{\partial D_k}\Delta_{D_k}\right| + \left|\frac{\partial Re}{\partial\bar{t}}\Delta_t\right| + \left|\frac{\partial Re}{\partial H}\Delta_H\right| + \left|\frac{\partial Re}{\partial\rho}\Delta_\rho\right| + \left|\frac{\partial Re}{\partial\mu}\Delta_\mu\right|. \tag{4.22}$$

Wynika stąd wzór na błąd względny

$$\delta_{Re} = \delta_{D_k} + \delta_t + \delta_H + \delta_\rho + \delta_\mu. \tag{4.23}$$

Wyniki obliczeń zapisujemy w tabeli 4.4.

4.3.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać numer grupy laboratoryjnej, rok i kierunek studiów, datę i nazwę przeprowadzenia ćwiczenia. Dalej powinien być podany cel ćwiczenia, schemat stanowiska pomiarowego, tabele pomiarów i obliczeń, przykład obliczeniowy, wnioski.

4.4. Pytania kontrolne

i. Jakie siły działają na swobodnie opadającą kulkę?

ii. Jak można wyznaczyć gęstość oleju?

Oznaczenia

D	średnica
f	funkcja
F	siła oporu
g	przyspieszenie ziemskie
G	siła ciężaru
h, H	wysokość
m	masa
n	liczba pomiarów
N	siła wyporu
p	przedział ufności
Re	liczba Reynoldsa
t	czas
t	kwantyle rozkładu Studenta
T	temperatura
U	składowa prędkości wzdłuż kierunku wektora grawitacji
$\lvert V\rvert$	objętość
x	wielkość, zmienna
δ	błąd względny
Δ	błąd bezwględny
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
ρ	gęstość
σ	odchylenie standardowe

σ^2 wariancja
χ współczynnik poprawkowy lepkości

Bibliografia

[1] T. Bohlin, *On the Drag on Rigid Spheres, Moving in a Viscous Liquid inside Cylindrical Tubes*, Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, No. 155, pp 1–63, 1960

[2] H. Lamb, *On the Uniform Motion of a Sphere in a Viscous Fluid*, Philosophical Magazine Series 6, Vol. 21, No. 121, pp 112–119, 1911

[3] C. W. Oseen, *Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Vol. 6, No. 29, 1910

[4] G. G. Stokes, *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 9, pp 8–106, 1851

[5] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Dodatek – tabele pomiarowe

Tabele pomiarowe z dnia:

Tabela 4.5. Parametry wody

T [K]	
ρ_1 [kg m^{-3}]	

Tabela 4.6. Pomiary czasu

i	t_i [s]
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabela 4.7. Pomiary

H [mm]	
h [mm]	
h_1 [mm]	
D [mm]	
D_k [mm]	14.15 ± 0.01
m_k [g]	3.5678 ± 0.0002

Rozdział 5

Straty energii cieczy płynącej w rurociągu

Marzena Banaszek

5.1. Cel ćwiczenia

Stosowanie rurociągów do transportu cieczy, gazów i materiałów stałych w postaci zawiesin wymaga od konstruktorów umiejętności poprawnego ich projektowania. Jednym z elementów, który bierze się pod uwagę przy projektowaniu, jest oddziaływanie przepływu na rurociąg. Przepływ cieczy rzeczywistej (lepkiej) w rurociągu wymuszony jest różnicą ciśnień. Związany jest on zawsze ze stratami energii, które zwiększają zapotrzebowanie całkowitej energii koniecznej do transportu cieczy, a tym samym wpływają na wartość kosztów eksploatacyjnych całej instalacji przesyłowej.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów ze zjawiskiem przepływu cieczy rzeczywistej przez rurociąg o zmiennym przekroju oraz wyznaczenie wielkości strat energii mechanicznej.

5.2. Wprowadzenie teoretyczne

5.2.1. Charakter przepływu cieczy w rurociągu

Charakter przepływu cieczy w rurociągu określa liczba Reynoldsa

$$Re = \frac{UD}{\nu}, \tag{5.1}$$

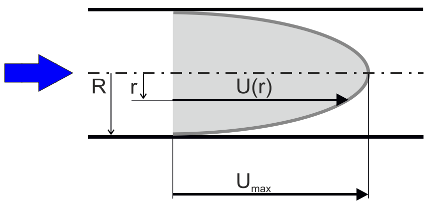
gdzie Re – liczba Reynoldsa [-], U – średnia prędkość przepływu [$\mathrm{m\,s^{-1}}$], D – średnica rurociągu [m], ν – kinematyczny współczynnik lepkości cieczy w warunkach przepływu $\nu = \nu(T)$ [$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$].

W praktyce inżynierskiej przyjmuje się następujące kryterium przepływu dla rurociągów o przekroju kołowym całkowicie wypełnionych cieczą (wg normy PN-76/M-34034 *Zasady obliczeń strat ciśnienia*):

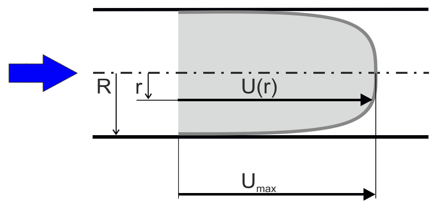
- $Re < 2300$ – przepływ laminarny (ruch uporządkowany, uwarstwiony, ustabilizowany),
- $2300 < Re < 4000$ – przepływ przejściowy (ruch częściowo turbulentny, nieustabilizowany),
- $Re > 4000$ – przepływ turbulentny (ruch burzliwy, ustabilizowany).

5.2.2. Rozkład prędkości przepływu w rurociągu

Rozkłady prędkości przepływu cieczy rzeczywistej w rurociągu o przekroju kołowym są różne dla przepływu laminarnego i turbulentnego (rysunki 5.1 i 5.2).



Rys. 5.1. Profil prędkości w rurociągu o przekroju kołowym w ruchu laminarnym



Rys. 5.2. Profil prędkości w rurociągu o przekroju kołowym w ruchu turbulentnym

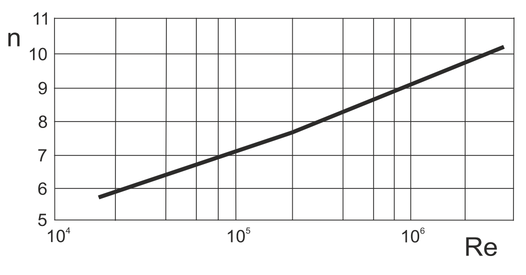
Dla przepływu laminarnego profil prędkości ma kształt paraboli zgodnie z równaniem

$$U(r) = U_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{5.2}$$

i prędkości maksymalnej dla przepływu laminarnego określonej zależnością

$$U_{max} = \frac{\Delta p\, R^2}{4\mu L}, \tag{5.3}$$

gdzie U_{max} – maksymalna prędkość przepływu laminarnego [m s^{-1}], L – długość odcinka rurociągu [m], Δp – spadek ciśnienia na odcinku rurociągu o długości L [Pa], μ – dynamiczny współczynnik lepkości [Pa s], R – promień rurociągu [m], r – odległość od osi rurociągu [m], $r \in [0; R]$. Średnia prędkość przepływu jest równa $\bar{U} = \frac{1}{2}U_{max}$.



Rys. 5.3. Zależność współczynnika n od liczby Reynoldsa

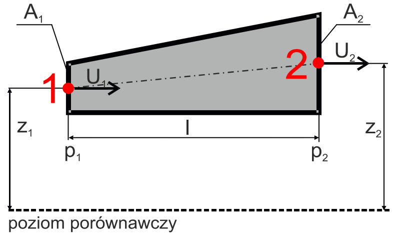
Dla przepływu turbulentnego przybliżony profil prędkości ma kształt zgodny z zależnością

$$U(r) = U_{max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{5.4}$$

gdzie U_{max} – maksymalna prędkość przepływu turbulentnego [m s^{-1}], n – współczynnik zależny od liczby Reynoldsa [-] (rysunek 5.3). Średnia prędkość przepływu w ruchu turbulentnym jest w przybliżeniu równa prędkości maksymalnej $\bar{U} \approx U_{max}$.

5.2.3. Bilans energii cieczy płynącej w rurociągu

Ruch cieczy płynącej w rurociągu, którego schemat przedstawiono na rysunku 5.4, traktowany jest jako stacjonarny (ustalony) i jednowymiarowy. Podstawą opisu matematycznego ruchu jest układ równań złożony z równania zachowania masy i równania zachowania pędu.



Rys. 5.4. Widok rurociągu

Równanie zachowania masy (równanie ciągłości przepływu) dla cieczy płynącej przez rurociąg o przekroju kołowym ma postać

$$Q = AU = \frac{\pi D^2}{4}U = \text{const}, \tag{5.5}$$

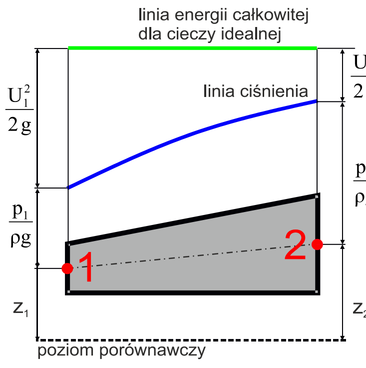
gdzie Q – strumień objętości (objętościowe natężenie przepływu [m^3 s^{-1}], A – pole przekroju poprzecznego rurociągu [m^2], D – średnica rurociągu [m], U – średnia prędkość przepływu [m s^{-1}].

Równanie zachowania pędu dla cieczy rzeczywistej zapisywane jest w postaci uogólnionego równania Bernoulliego

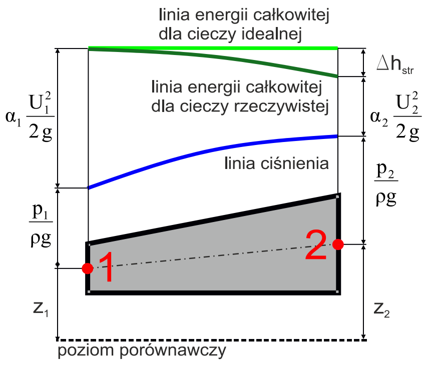
$$\alpha_1\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \alpha_2\frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \sum \Delta h_{str}, \tag{5.6}$$

gdzie α – współczynnik de Saint Venanta (współczynnik Coriolisa) [-], g przyspieszenie grawitacyjne [m s^{-2}], p – ciśnienie [Pa], z – wysokość położenia względem poziomu porównawczego [m], Δh_{str} – wysokość strat energii mechanicznej [m].

Zmniejszenie (strata) energii mechanicznej podczas przepływu związana jest z nieodwracalną konwersją części energii mechanicznej w energię cieplną. Interpretację graficzną równania Bernoulliego dla przepływu cieczy idealnej i rzeczywistej (lepkiej) w rurociągu przedstawiają rysunki 5.5 i 5.6.



Rys. 5.5. Interpretacja graficzna równania Bernoulliego dla przepływu cieczy idealnej w rurociągu



Rys. 5.6. Interpretacja graficzna równania Bernoulliego dla przepływu cieczy rzeczywistej w rurociągu

Sumaryczna wielkość strat hydraulicznych jest sumą strat liniowych i strat miejscowych na poszczególnych, charakterystycznych odcinkach rurociągu, zgodnie z zależnością

$$\Delta h_{str} = \Delta h_l + \Delta h_m, \tag{5.7}$$

gdzie Δh_l – wysokość strat liniowych [m], Δh_m – wysokość strat miejscowych [m].

Straty energii mechanicznej wywołane oporami przepływu wzdłuż odcinka rurociągu noszą nazwę strat liniowych lub strat na długości. Straty liniowe są stratami ciśnienia na długości rurociągu, które wywołane są tarciem wewnętrznym płynu oraz tarciem przepływającego płynu o wewnętrzną stronę ściany rurociągu. Wysokość strat opisuje równanie Darcy-Weisbacha

$$\Delta h_l = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}, \tag{5.8}$$

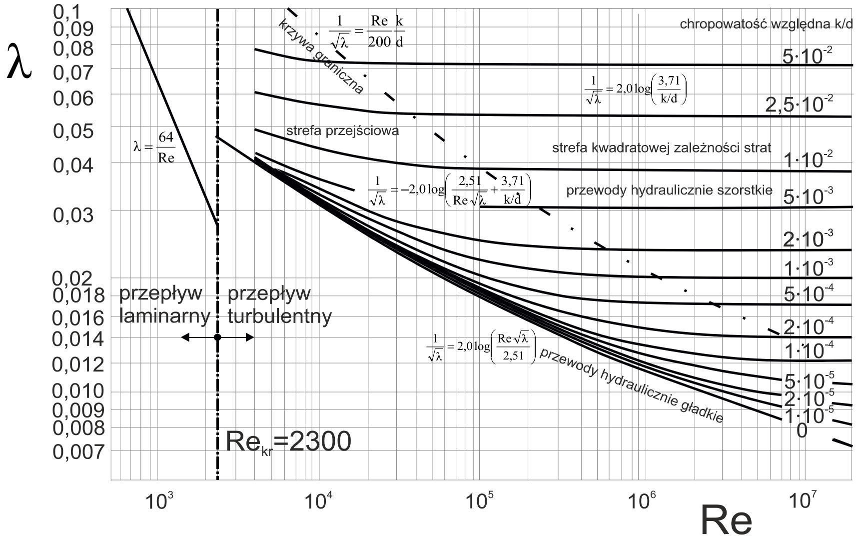
gdzie λ – współczynnik strat tarcia [-], L – długość odcinka rurociągu [m], D – średnica rurociągu [m], U – prędkość przepływu [m s^{-1}].

Współczynnik oporów liniowych λ dla przepływu w rurociągach zależy od liczby Reynoldsa oraz chropowatości względnej. Wpływ liczby Reynoldsa oraz chropowatości względnej dla rurociągów o przekroju kołowym przedstawia rysunek 5.7, zwany wykresem Nikuradsego.

Parametrem poszczególnych krzywych $\lambda = \lambda(Re)$ jest chropowatość względna, definiowana jako stosunek wysokości lokalnych nierówności k do średnicy rurociągu D. Dla przepływu laminarnego współczynnik strat liniowych nie zależy od chropowatości. Wielkość współczynnika strat liniowych można określić na drodze analitycznej, korzystając z prawa Hagena-Poiseuille'a

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \tag{5.9}$$

Dla przepływów turbulentnych przepływ może odbywać się w trzech strefach: strefie przewodów hydraulicznie gładkich $\lambda = \lambda(Re)$, strefie przejściowej (o zmiennej chropowatości) $\lambda = \lambda(Re, k/D)$, oraz strefie kwadratowej zależności oporów $\lambda = \lambda(k/D)$.



Rys. 5.7. Wykres Nikuradsego

W praktyce inżynierskiej zaleca się obliczanie współczynnika oporu λ w strefie przewodów hydraulicznie gładkich ze wzoru Blasiusa

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{\frac{1}{4}}}, \tag{5.10}$$

w strefie przejściowej i strefie kwadratowej zależności strat ze wzoru Colebrooka-White'a

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\frac{k}{D}}{3.761}\right). \tag{5.11}$$

Straty miejscowe są stratami ciśnienia wywołanymi przeszkodą w rurociągu i uzależnione są od jej typu. Strata miejscowa może być związana ze zmianą kierunku przepływu (kolanko, załamanie rurociągu, itp.), zmianą geometrii przewodu (wlot do rurociągu ze zbiornika, gwałtowana zmiana średnicy rurociągu, konfuzor, dyfuzor, kryza, armatura regulacyjna: zawory, zasuwy, kurki, armatura pomiarowa: wodomierz, itp.), zmianą strumienia cieczy (odgałęzienie przewodów typu trójniki, itp.). Wysokość strat miejscowych zależy od współczynnika oporów miejscowych i prędkości przepływu cieczy.

Wysokość strat miejscowych wyznacza się z zależności

$$\Delta h_m = \xi\frac{U^2}{2g}, \tag{5.12}$$

gdzie ξ – współczynnik oporów miejscowych [-], U – prędkość przepływu za przeszkodą [$\mathrm{m\,s^{-1}}$].

Współczynniki dla typowych kształtek i armatury wyznaczano doświadczalnie i podano w postaci stabelaryzowanej. Wybrane współczynniki strat miejscowych dane oblicza się w następujący sposób:

– Nagłe zwężenie przekroju przewodu od przekroju A_1 do A_2 wg Bordy-Carnota (rysunek 5.8)

$$\xi = 0.5\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right). \tag{5.13}$$

– Nagłe rozszerzenie przekroju przewodu od przekroju A_1 do A_2 (rysunek 5.9)

$$\xi = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2. \tag{5.14}$$

– Dyfuzor – stopniowe rozszerzenie przekroju przewodu od przekroju A_1 do A_2 wg PN-76/M-36034 (rysunek 5.10)

$$\xi = 3.2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\sqrt[4]{\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 + \frac{\lambda}{8\sin\frac{\beta}{2}}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tag{5.15}$$

– Konfuzor – stopniowe zmniejszenie przekroju przewodu od przekroju A_1 do A_2 wg PN-76/M-36034 (rysunek 5.11)

$$\xi = \frac{\lambda l}{4d_2}\left(1 + \frac{d_1}{d_2} + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3\right), \tag{5.16}$$

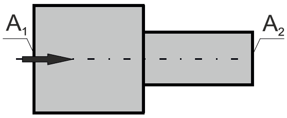
gdzie d_1 – średnica przekroju A_1 [m], d_2 – średnica przekroju A_2 [m].

– Zagięcie przewodu o średnicy d, promieniu krzywizny R i kącie zagięcia przewodu $\beta \leqslant 90°$ (rysunek 5.12)

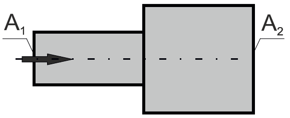
$$\xi = \left(0.131 + 1.847\left(\frac{r}{R}\right)^{3.5}\right)\frac{2\beta}{\pi}. \tag{5.17}$$

5.2.4. Współczynnik de Saint Venanta (współczynnik Coriolisa)

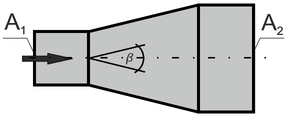
Przepływ cieczy rzeczywistej związany jest z oddziaływaniem sił lepkości, które wywołują w przepływie naprężenia styczne i zróżnicowanie rozkładu prędkości w przekroju poprzecznym strumienia. Energia kinetyczna wyznaczona za pomocą prędkości średniej przepływu dla całego strumienia jest różna od sumy energii kinetycznych poszczególnych strug (nieadekwatność jednowymiarowego modelu przepływu i przepływu rzeczywistego). Zapisując równanie Bernoulliego dla strumienia cieczy rzeczywistej wprowadza się do składnika energii kinetycznej współczynnik α, zwany współczynnikiem de Saint Venanta lub współczynnikiem Coriolisa (równanie (5.6)). Współczynnik ten wyraża stosunek rzeczywistej energii kinetycznej strumienia do energii kinetycznej wyznaczonej na podstawie prędkości średniej.



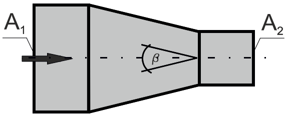
Rys. 5.8. Nagłe zwężenie przekroju



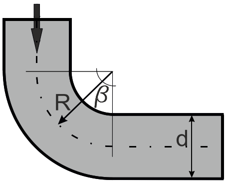
Rys. 5.9. Nagłe rozszerzenie przekroju



Rys. 5.10. Dyfuzor



Rys. 5.11. Konfuzor



Rys. 5.12. Zagięcie

Wartość współczynnika de Saint Venanta zależy od zróżnicowania prędkości występujących w przekroju poprzecznym strumienia. W ruchu turbulentnym cieczy w rurociągach o przekroju kołowym następuje wyrównanie prędkości i przyjąć można, że współczynnik de Saint Venanta jest bliski jedności ($\alpha \approx 1$). W ruchu laminarnym cieczy w rurociągach o przekroju kołowym przyjmuje się $\alpha = 2$.

5.2.5. Wykres Ancony

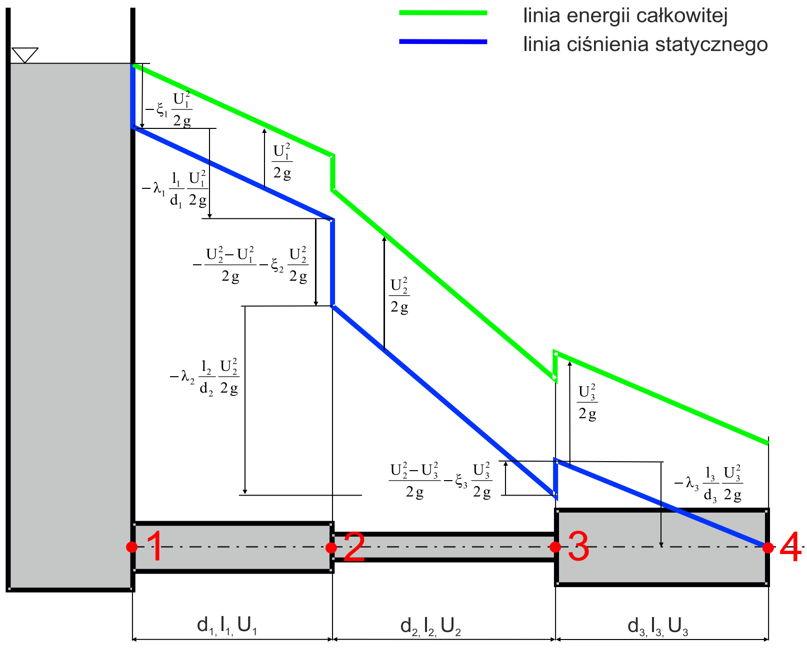
Wykres Ancony jest graficznym przedstawieniem przebiegów zmian wysokości energii całkowitej, wysokości ciśnienia absolutnego i wysokości ciśnienia statycznego (piezometrycznego) wzdłuż szeregowego systemu hydraulicznego.

Linie ciśnień absolutnych i ciśnień statycznych kształtują się w zależności od wymiarów geometrycznych przewodów i strumienia objętości płynu.

Wysokość energii całkowitej otrzymuje się sumując wysokości ciśnienia statycznego $h_p = \frac{p}{\rho g}$ i wysokość prędkości $h_U = \frac{U^2}{2g}$. Wysokość energii całkowitej maleje w kierunku przepływu (linia energii nie może wznosić się w kierunku przepływu). Wysokość ciśnienia absolutnego (linię ciśnień) otrzymuje się odejmując od wysokości energii wysokość prędkości w danym przekroju. Wysokość ciśnienia statycznego (linia piezometryczna) przebiega równolegle do linii ciśnień i obniżona jest o wysokość ciśnienia barometrycznego.

Linie ciśnienia statycznego i energii całkowitej dla przepływu cieczy rzeczywistej w rurociągu o danej geometrii przedstawiono na rysunku 5.13. Zmiany parametrów przepływu zachodzą dla kolejnych przekrojów i–i+1 zgodnie z uogólnionym równaniem Bernoulliego

$$\left(\alpha\frac{U^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z\right)_i=\left(\alpha\frac{U^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z\right)_{i+1}+\sum\Delta h_{str(i-i+1)}. \tag{5.18}$$



Rys. 5.13. Wykres Ancony dla przepływu przez rurociąg

Dla przedstawionego na rysunku 5.13 rurociągu o długościach odcinków charakterystycznych L_1, L_2, L_3 i odpowiednio średnicach D_1, D_2, D_3, zasilanego wodą ze zbiornika, wyznaczono linię ciśnienia statycznego (linię piezometryczną) oraz linię energii całkowitej. Poziome położenie rurociągu pociąga za sobą przyjęcie wysokości położenia w przekrojach 1, 2 i 3 w odniesieniu do poziomu porównawczego na poziomie zerowym $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Na podstawie liczby Reynoldsa określono charakter przepływu ($Re > 2300$) i dla przepływu turbulentnego przyjęto współczynnik de Saint Venanta $\alpha = 1$. Zmiany ciśnienia statycznego wywołane są zmianami prędkości przepływu cieczy przez poszczególne, charakterystyczne odcinki rurociągu. Sposób konstruowania linii ciśnienia statycznego (linii piezometrycznej) oraz linii energii całkowitej podany jest poniżej.

Przekrój 1 – Wysokość ciśnienia statycznego h_{p1} równa jest wysokości energii prędkości i pomniejszona o wielkość straty miejscowe h_{m1} w przekroju 1 (straty wlotowej)

$$h_{p1}=\frac{p_1}{\rho g}=h_{U1}-h_{m1}=\frac{U_1^2}{2g}-\xi_1\frac{U_1^2}{2g}. \tag{5.19}$$

Odcinek 1-2 – Wysokość ciśnienia statycznego na odcinku 1-2 h_{p1-2} obniżona zostaje o wysokość straty liniowej na długości l_1

$$h_{p1-2} = h_{p1} - h_{l1} = h_{p1} - \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{U_1^2}{2g}. \tag{5.20}$$

Przekrój 2 – Zmniejszenie się wysokości ciśnienia statycznego spowodowane jest wzrostem wysokości prędkości w przekroju 2. Następuje dodatkowe obniżenie wysokości ciśnienia statycznego o wysokość straty miejscowej związanej z nagłym zwężeniem przekroju od przekroju A_1 do przekroju A_2

$$h_{p2} = \frac{p_2}{\rho g} = h_{p1-2} - \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} - h_{m2} = h_{p1-2} - \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} - \xi_2 \frac{U_2^2}{2g}. \tag{5.21}$$

Odcinek 2-3 – Wysokość ciśnienia statycznego na odcinku 2-3 h_{p2-3} obniżona zostaje o wysokość straty liniowej na długości l_2

$$h_{p2-3} = h_{p2} - h_{l2} = h_{p2} - \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{U_2^2}{2g}. \tag{5.22}$$

Przekrój 3 – Zwiększenie się wysokości ciśnienia statycznego spowodowane jest spadkiem wysokości prędkości w przekroju 3. Następuje obniżenie wysokości ciśnienia statycznego o wysokość straty miejscowej związanej z nagłym rozszerzeniem przekroju od przekroju A_2 do przekroju A_3

$$h_{p3} = \frac{p_3}{\rho g} = h_{p2-3} - \frac{U_2^2 - U_3^2}{2g} - h_{m3} = h_{p2-3} - \frac{U_2^2 - U_3^2}{2g} - \xi_3 \frac{U_3^2}{2g}. \tag{5.23}$$

Odcinek 3-4 – Wysokość ciśnienia statycznego na odcinku 3-4 h_{p3-4} obniżona zostaje o wysokość straty liniowej na długości l_3

$$h_{p3-4} = h_{p3} - h_{l3} = h_{p3} - \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \frac{U_3^2}{2g}. \tag{5.24}$$

Linia energii całkowitej powstaje wskutek podniesienia linii piezometrycznej o wysokość prędkości na odpowiednich odcinkach rurociągu.

Odcinek 1-2

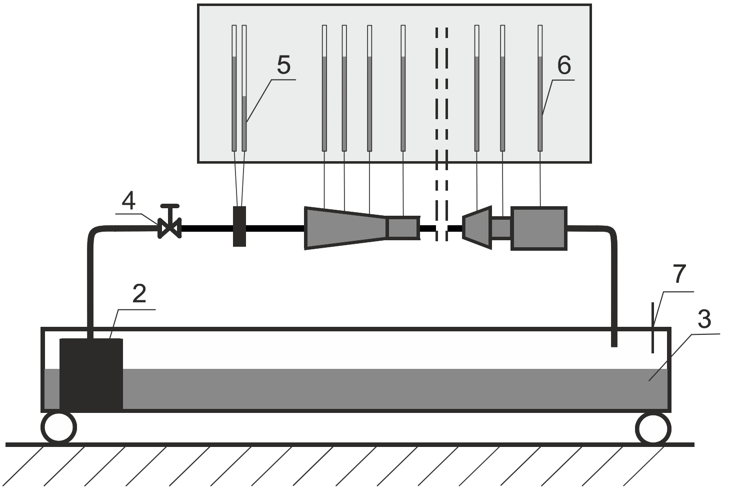
$$h_{1-2} = h_{p1-2} + h_{U1} = h_{p1-2} + \frac{U_1^2}{2g}. \tag{5.25}$$

Odcinek 1-2

$$h_{2-3} = h_{p2-3} + h_{U2} = h_{p2-3} + \frac{U_2^2}{2g}. \tag{5.26}$$

Odcinek 1-2

$$h_{3-4} = h_{p4-4} + h_{U3} = h_{p3-4} + \frac{U_3^2}{2g}. \tag{5.27}$$



Rys. 5.14. Stanowisko pomiarowe do pomiaru strat energii w rurociągu: 1–rurociąg, 2–pompa, 3–zbiornik główny, 4–zawór regulacyjny, 5–zwężka pomiarowa, 6–tablica piezometryczna, 7–termometr

5.3. Doświadczenie

5.3.1. Stanowisko pomiarowe

Stanowisko do pomiaru strat energii w rurociągu przedstawiono na rysunku 5.14.

Przepływ wody w rurociągu o zmiennej geometrii przepływu (1) wymuszony jest pracą pompy (2) pobierającej wodę ze zbiornika głównego (3). Zawór regulacyjny (4) służy do regulacji strumienia objętości (natężenia przepływu) wody płynącej w instalacji.

Na rurociągu zainstalowano przepływomierz zwężkowy (kryzę z przytarczowym pomiarem ciśnienia) (5). Dane instalacji: rurociąg to rura walcowana stalowa o powierzchni wewnętrznej po kilku latach eksploatacji skorodowanej, z osadami; średnica rurociągu w temperaturze 20 °C wynosi $D = 58$ mm. Zwężka pomiarowa ma średnicę w temperaturze 20 °C wynoszącą $d = 34.8$ mm.

Spadek ciśnienia na badanych odcinkach rurociągu mierzy zestaw manometrów cieczowych (piezometrów) (6). Cieczą manometryczną jest woda płynąca w instalacji, o parametrach ustalonych w trakcie pomiaru. Przewody impulsowe wykonane z przewodów elastycznych łączą otwory impulsowe rurociągu z piezometrami umocowanymi na tablicy. Odczyt napełnienia rurek piezometrycznych umożliwia podziałka milimetrowa.

Temperaturę wody mierzy się termometrem (7), ciśnienie atmosferyczne barometrem.

5.3.2. Przebieg eksperymentu

Po przygotowaniu stanowiska do pomiarów uruchomia się pompę i zaworem regulacyjnym ustala odpowiednie natężenie przepływu. Po ustaleniu się warunków pomiaru dokonuje się kilkukrotnego odczytu wielkości niezbędnych do ustalenia strat energii podczas przepływu cieczy w rurociągu.

Przepływomierz zwężkowy (kryza z przytarczowym pomiarem ciśnienia) podłączony jest do manometru różnicowego U-rurkowego. Spadek ciśnienia statycznego na zwężce odczytuje się mierząc średnią różnicę napełnień rurek manometrycznych. Manometry wypełnione są wodą (parametry cieczy manometrycznej zgodne z parametrami wody płynącej w rurociągu).

Wysokość ciśnienia statycznego, odpowiadającego punktom pomiarowym na wybranych odcinkach rurociągu odczytuje się mierząc wysokość napełnień rurek piezometrycznych.

Temperaturę wody mierzy się za pomocą termometru, a ciśnienie atmosferyczne odczytuje ze wskazań barometru.

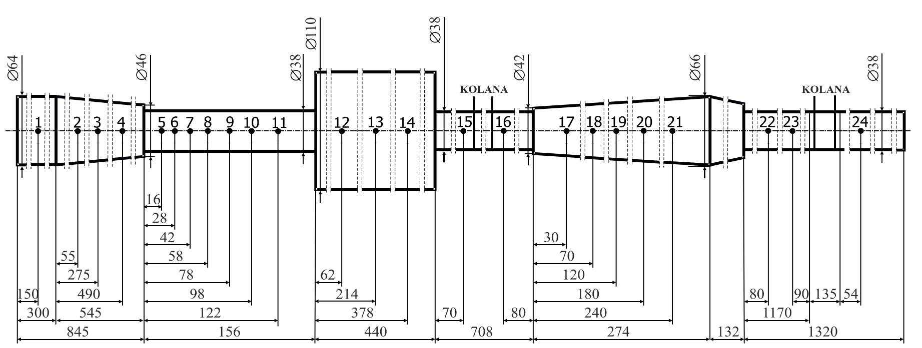
Wyniki pomiarów należy umieścić w tabeli pomiarów.

5.4. Opracowanie wyników

5.4.1. Obliczenia

Podstawą do obliczeń są wymiary rurociągu (rysunek 5.15) oraz wskazania manometru różnicowego na zwężce pomiarowej zamontowanej w rurociągu. Do obliczeń przepływu przez kolana (zagięcia rurociągu przyjąć $R = 60$ mm, $d = 40$ mm).

Strumień płynu (objętościowe natężenie przepływu) wyznacza się różnicy ciśnień odczytanych na manometrach U-rurkowych podłączonych do zwężki pomiarowej. Sposób wyznaczania strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych podany został w skrypcie w rozdziale: Pomiar strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych.



Rys. 5.15. Schemat rurociągu na stanowisku pomiarowym

Prędkości w poszczególnych przekrojach układu przepływowego wyznacza się z zależności

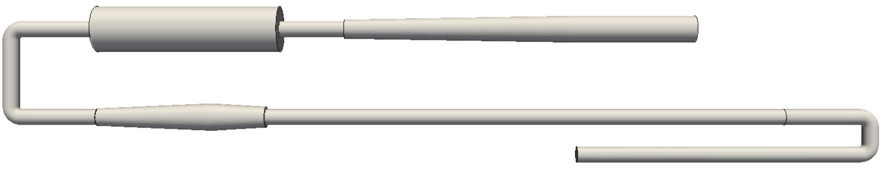
$$U = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}. \tag{5.28}$$

Charakter przepływu (laminarny lub turbulentny) określa się wyznaczając liczbę Reynoldsa.

Wysokość prędkości wyznacza się z zależności

$$h_U = \frac{U^2}{2g}, \tag{5.29}$$

przyjmując współczynnik de Saint Venanta $\alpha = 1$ dla przepływu turbulentnego, $\alpha = 2$ dla przepływu laminarnego.



Rys. 5.16. Widok rurociągu na stanowisku pomiarowym

Ciśnienie statyczne na odcinku wlotowym (ciśnienie statyczne początkowe) p_1 ustala się po przejściu czynnika przez zwężkę pomiarową. Wartość ciśnienia należy odczytać ze wskazań prawej rurki piezometrycznej. Ciśnienia statyczne w kolejnych przekrojach pomiarowych należy obniżać o wysokość strat miejscowych i wysokość strat liniowych. Ciśnienie statyczne obniżane jest o wysokość strat miejscowych po przejściu czynnika przez przeszkodę (konfuzor, dyfuzor, kolano, nagła zmiana przekroju, itp.). Wartości współczynników strat miejscowych są stabelaryzowane. Ciśnienie statyczne obniżane jest o wysokość strat liniowych po przejściu czynnika przez prostosiowy odcinek rurociągu. Wartości współczynnika strat liniowych zależą od charakteru przepływu $\lambda = \lambda(Re)$.

Wysokość energii całkowitej wyznaczana jest jako suma wysokość ciśnienia statycznego i wysokości prędkości

$$h = h_p + h_U. \tag{5.30}$$

Wyniki obliczeń należy umieścić w tabeli obliczeń wg wzoru podanego w tablicy 5.1.

5.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać następujące elementy:

- stronę tytułową w/g podanego wzoru,
- wprowadzenie teoretyczne zawierające w szczególności charakterystykę wielkości wyznaczanej i opis metody pomiarowej,
- określenie celu ćwiczenia,
- schemat stanowiska pomiarowego,
- zestawienie wzorów i zależności użytych w obliczeniach wraz z objaśnieniami,

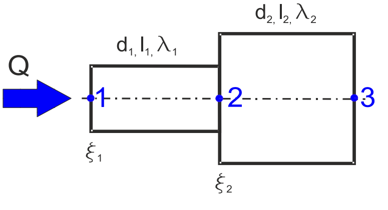
Tabela 5.1. Tabela obliczeń. Średnica rurociągu – d, prędkość przepływu – U, wysokość prędkości – h_U, wsp. strat miejscowych – ξ, wysokość strat miejscowych – h_m, wsp. strat liniowych – λ, wysokość strat liniowych – h_l, wysokość ciśnienia statycznego – h_p, wysokość energii całkowitej – h

Element	Pkt.	d	U	h_U	Re	ξ	h_m	λ	h_l	h_p	h
		m	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	m	-	-	m	-	m	m	m
Wlot	1										
Konfuzor	2										
	3										
	4										
Cylinder	5										
	6										
	7										
	8										
	9										
	10										
	11										
Cylinder	12										
	13										
	14										
Kolano	15										
	16										
Dyfuzor	17										
	18										
	19										
	20										
	21										
Cylinder	22										
	23										
Cylinder	24										

– zestawienie wyników pomiarów w formie załączonej karty pomiarów,
– zestawienie wyników obliczeń wraz ze szczegółowym tokiem obliczeń z podstawieniami do wzorów dla jednego pomiaru, wyniki obliczeń należy zamieścić wg wzoru podanego w tablicy 5.1,
– wykresy dwóch linii piezometrycznych (linia ciśnień uzyskana eksperymentalnie oraz linia ciśnień uzyskana na drodze obliczeń teoretycznych) oraz dwóch linii energii całkowitej (linia wynikająca z eksperymentu oraz linia wynikająca z obliczeń teoretycznych), wykresy należy sporządzić na kartce formatu A3 nad schematycznym rysunkiem rurociągu,
– uwagi końcowe i wnioski.

5.5. Pytania kontrolne

i. Omów przyczyny i rodzaje strat energii związanych z przepływem cieczy lepkiej w rurociągu.
ii. Narysuj linię piezometryczną (linię ciśnień) oraz linię energii całkowitej dla układu przepływowego przedstawionego na rysunku 5.17. Podaj zależności opisujące wysokość ciśnienia statycznego, wysokość energii kinetycznej oraz wysokość energii całkowitej w przekrojach 1, 2 i 3. Dane: strumień objętości Q, ciśnienie statyczne p_1, geometria układu przepływowego d_1, l_1, d_2, l_2, współczynniki strat liniowych λ_1, λ_2, współczynniki strat miejscowych ξ_1, ξ_2.



Rys. 5.17. Fragment rurociągu

Bibliografia

[1] PN-76/M-34034, *Zasady obliczania strat ciśnienia*, PKNiM, Warszawa: 1978

[2] E. Kubrak, J. Kubrak, *Podstawy obliczeń z mechaniki płynów w inżynierii i ochronie środowiska*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa, 2010

[3] Z. Orzechowski, J. Prywer, R. Zarzycki, *Mechanika płynów w inżynierii środowiska*, WNT, Warszawa, 2001

[4] R. Puzyrewski, J. Sawicki, *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*, PWN, Warszawa, 1987

[5] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Rozdział 6

Pomiar rozkładu ciśnień na profilu kołowym

Marzena Banaszek

6.1. Cel ćwiczenia

Opływ ciał stałych strumieniem płynu jest zagadnieniem często spotykanym w praktyce inżynierskiej. Zagadnienie to odnosi się np. do opływu wiatrem samolotów, samochodów, budynków, itp. Opływ ciał wykorzystywany jest przy projektowaniu konstrukcji wież turbin wiatrowych, przęseł mostów, przewodów energetycznych, itp. Badania modelowe opływu ciał stałych w tunelach aerodynamicznych wykorzystywane są do analizy zjawisk powstawania siły aerodynamicznej, oderwania warstwy przyściennej czy formowania śladu aerodynamicznego.

W ćwiczeniu analizowany jest opływ nieskończenie długiego walca o kołowym przekroju poprzecznym strumieniem płynu rzeczywistego (lepkiego). Obraz opływu jest identyczny w każdym z jego przekrojów poprzecznych, a opływ walca jest przykładem płaskiego opływu ciała osiowo-symetrycznego o osi normalnej do kierunku przepływu U_∞ (opływ profilu kołowego).

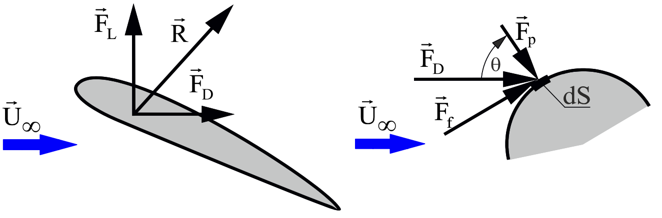
Celem ćwiczenia jest eksperymentalne określenie rozkładu ciśnienia na powierzchni profilu kołowego, wyznaczenie siły oporu ciśnieniowego oraz obliczenie współczynnika oporu ciśnieniowego (oporu kształtu).

6.2. Wprowadzenie teoretyczne

6.2.1. Siła oporu aerodynamicznego

Siła aerodynamiczna $\vec{R}$ działająca na opływane płynem ciało stałe (lub ciało stałe poruszające się w płynie) jest wypadkową siły oporu aerodynamicznego $\vec{F}_D$ oraz siły nośnej $\vec{F}_L$. Siła oporu aerodynamicznego (siła oporu profilowego) jest rzutem siły aerodynamicznej na kierunek równoległy do kierunku przepływu $\vec{U}_\infty$ (rysunek 6.1)

$$\vec{R} = \vec{F}_D + \vec{F}_L. \tag{6.1}$$



Rys. 6.1. Rozkład sił działających na opływane ciało

W przepływie płaskim wokół profilu kołowego opór aerodynamiczny (opór profilowy) składa się z:

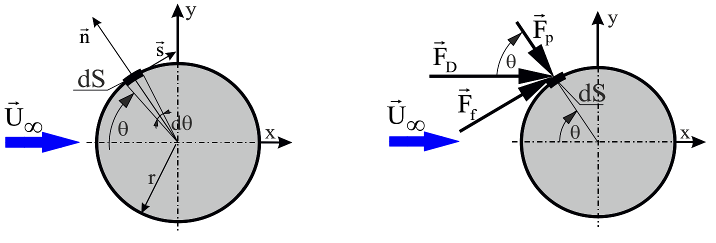
- oporu ciśnieniowego, tzw. oporu kształtu, będącego składową siły oporu w kierunku normalnym do powierzchni opływanego ciała

$$\vec{F}_p = \iint_S \hat{n} p \cos\theta \, \mathrm{d}S, \tag{6.2}$$

  gdzie p – ciśnienie działające na element powierzchni opływanej dS [Pa], $\hat{n}$ – normalna do elementu powierzchni dS [-], θ – kąt między kierunkiem przepływu a normalną do powierzchni S [-], dS – elementarna powierzchnia ciała opływanego [m^2];
- oporu tarcia, będącego składową siły oporu w kierunku stycznym do powierzchni opływanego ciała

$$\vec{F}_f = \iint_S \vec{\tau} \sin\theta \, \mathrm{d}S, \tag{6.3}$$

  gdzie $\vec{\tau}$ – siła tarcia działająca na elementarną jednostkę powierzchni [Pa].



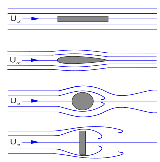
Rys. 6.2. Rozkład siły oporu aerodynamicznego na profilu kołowym

Na rysunku 6.2 przedstawiono rozkład siły oporu aerodynamicznego na profilu kołowym. Wypadkowa siły oporu ciśnieniowego (oporu kształtu) i siły oporu tarcia jest siłą oporu profilowego (oporem profilowym)

$$\vec{F}_D = \vec{F}_p + \vec{F}_f. \tag{6.4}$$

Wzajemny udział oporu ciśnieniowego i oporu tarcia w oporze profilowym zależy od kształtu ciała, jego ustawienia względem kierunku przepływu oraz charakteru przepływu w warstwie przyściennej (tablica 6.1). Dla płaskiej płytki ustawionej prostopadle do kierunku przepływu opór profilowy to w 100% opór ciśnieniowy, dla płytki ustawionej równolegle opór ciśnieniowy jest równy zeru. Dla kształtów opływowych główną składową siły oporu profilowego jest siła tarcia (siła oporu ciśnieniowego jest pomijalnie mała), dla kształtów nieopływowych główną siłą jest siła oporu ciśnieniowego.

Tabela 6.1. Wzajemny udział sił oporu ciśnieniowego (oporu kształtu) F_p i oporu tarcia F_f w oporze profilowym

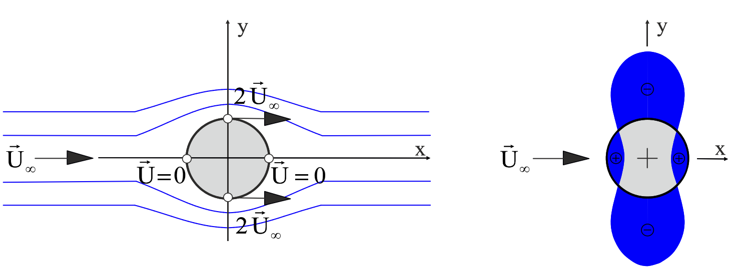
Kształt ciała opływanego	Udział F_p [%]	Udział F_l [%]
	0	100
	≈ 10	≈ 90
	≈ 90	≈ 10
	100	0

Siłę aerodynamiczną działającą na profil kołowy opływany płynem rzeczywistym można wyznaczyć wykorzystując pomiar rozkładu ciśnień i naprężeń stycznych na powierzchni profilu lub bezpośrednio mierząc siły.

6.2.2. Opływ profilu kołowego płynem idealnym

Zgodnie z I twierdzeniem Helmholtza ruch elementu płynu składa się z ruchów: translacyjnego, obrotowego i deformacji. Jeżeli podczas przepływu elementy płynu doznają tylko translacji (przesunięcia) i deformacji (odkształcenia), a nie doznają natomiast obrotów, to przepływ taki jest przepływem bezwirowym i nazywany jest przepływem potencjalnym.

Na rysunku 6.3 przedstawiono rozkład prędkości i ciśnień przy opływie bezwirowym profilu kołowego płynem idealnym.



Rys. 6.3. Rozkład prędkości i ciśnień przy opływie bezwirowym profilu kołowego

Siły działające na ciało poruszające się w płynie lub opływane płynem są wynikiem działania ciśnień i naprężeń stycznych (tarcia). W przypadku opływu ciała płynem idealnym (nielepkim) zjawisko tarcia nie występuje. Opływ bezwirowy profilu kołowego cechuje się symetrią względem obu osi układu współrzędnych. Taka symetria rozkładu prędkości i ciśnienia wskazuje na brak oddziaływania płynu na ciało opływane, zatem zarówno siła oporu profilowego F_D jak i siła nośna F_L są równe zeru (paradoks d'Alemberta). W rzeczywistości wpływ lepkości wpływa na obraz przepływu, a pole ciśnienia wytworzone na profilu jest asymetryczne względem kierunku normalnego do kierunku przepływu.

Analizowany jest potencjalny opływ walca kołowego o promieniu R i długości l (przy czym $R/l \ll 1$) strumieniem płynu idealnego (nielepkiego). Prędkość płynu w dowolnym punkcie położonym na powierzchni walca jest określona zależnością

$$U = -2U_\infty \sin\theta. \tag{6.5}$$

Prędkość jest skierowana stycznie do powierzchni i w punktach określonych wartością kąta θ wynosi

– zero (minimalna wartość prędkości) w punktach spiętrzenia $U(\theta = 0) = 0$, $U(\theta = \pi) = 0$,
– $2U_\infty$ (maksymalna wartość prędkości) w punktach $U(\theta = \frac{\pi}{2}) = 2U_\infty$, $U(\theta = 3\frac{\pi}{2}) = 2U_\infty$.

Układając równanie Bernoulliego dla przepływu niezakłóconego i przepływu na powierzchni walca otrzymujemy zależność na ciśnienie na powierzchni walca

$$p + \frac{\rho U^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho U_\infty^2}{2}, \tag{6.6}$$

skąd po uwzględnieniu zależności (6.5) otrzymujemy

$$p - p_\infty = \frac{\rho U_\infty^2}{2}\left(1 - 4\sin\theta\right). \tag{6.7}$$

Współczynnik ciśnienia jest stosunkiem różnicy ciśnień odniesionym do ciśnienia dynamicznego strumienia niezakłóconego

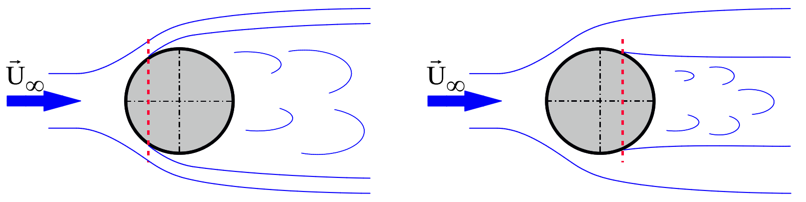
$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho U_\infty^2}{2}} = 1 - 4\sin\theta. \tag{6.8}$$

Współczynnik ciśnienia jest wyłącznie funkcją kąta θ, nie zależy od parametrów termodynamicznych płynu, parametrów przepływu ani geometrii profilu.

Przepływy potencjalne szczególnie dobrze nadają się do modelowania matematycznego ruchu płynu w obszarach poza warstwami przyściennymi i śladami aerodynamicznymi, gdzie wpływ lepkości płynu na obraz przepływu jest pomijalnie mały.

6.2.3. Opływ profilu kołowego płynem rzeczywistym

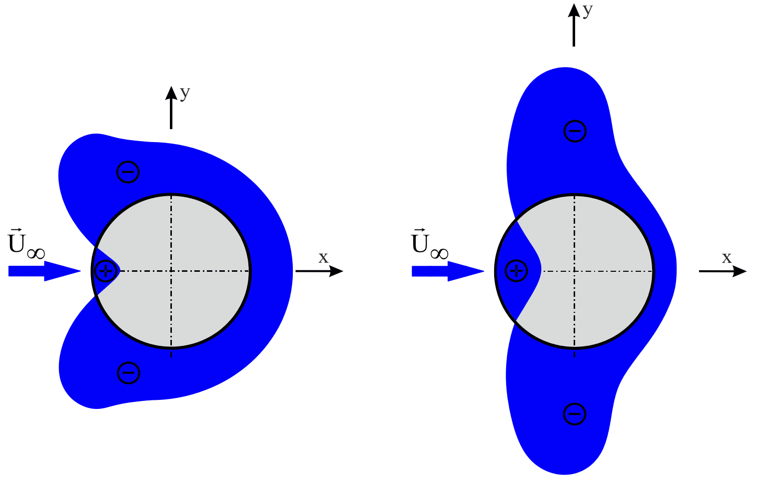
Dla brył o kształcie nieopływowym siła oporu profilowego zależy głównie od rozkładu ciśnień na powierzchni ciała opływanego, a wpływ sił stycznych (sił tarcia) jest niewielki. Na rozkład ciśnień wpływ ma zjawisko oderwania warstwy przyściennej i charakter przepływu poza tą warstwą.



Rys. 6.4. Odrywanie się warstwy przyściennej i tworzenie obszaru zawirowań dla różnych liczb Reynoldsa

Warstwa przyścienna jest cienką warstwą płynu utworzoną na powierzchni ciała opływanego wskutek działania sił adhezji i lepkości. Charakteryzuje się gradientem prędkości w kierunku normalnym do tej powierzchni.

Warstwa przyścienna jest częścią obszaru przepływu bezpośrednio sąsiadującą z powierzchnią opływanego ciała. W cienkiej warstwie płynu utworzonej na powierzchni ciała znaczącą rolę odgrywają siły lepkości. Przepływ w warstwie przyściennej charakteryzuje się znacznymi poprzecznymi gradientami prędkości, poza warstwą przepływ może być praktycznie uważany za nielepki. Za opływanym ciałem warstwa przechodzi w tzw. ślad aerodynamiczny.



Rys. 6.5. Rozkład ciśnień na profilu kołowym dla różnych liczb Reynoldsa

Na skutek działania sił lepkości oraz sił ciśnienia ruch płynu w warstwie przyściennej ulega spowolnieniu, co może prowadzić do tzw. oderwania warstwy przyściennej. Płyn przy samej ściance jest hamowany, co powoduje jego zatrzymanie, a następnie ruch w kierunku przeciwnym do przepływu.

Wskutek oderwania warstwy przyściennej za ciałem tworzy się obszar zawirowany (obszar zastoju), w którym ciśnienie jest niższe niż w obszarze niezakłóconym. Położenie punktu oderwania (punktu, w którym prędkość przepływu jest równa zeru) zależy od charakteru przepływu. Przy opływie profilu kołowego z małą prędkością przepływu (małą liczbą Reynoldsa) powstaje laminarna warstwa przyścienna.. Za profilem tworzy się szeroki obszar zawirowany (o niższym ciśnieniu). Wzrost prędkości przepływu (wyższe liczby Reynoldsa) może spowodować przejście warstwy laminarnej w turbulentną, tworząc węższy obszar zawirowań. Warstwa laminarna odrywana jest bliżej czoła profilu, w porównaniu z oderwaniem warstwy turbulentnej (rysunek 6.4).

Miejsce oderwania warstwy przyściennej decyduje o rozkładzie ciśnień na powierzchni ciała opływanego. Porównanie rozkładów ciśnień dla obu warstw (rysunek 6.5) pozwala stwierdzić, że korzystniejszy jest rozkład ciśnień towarzyszący oderwaniu warstwy turbulentnej. W przypadku oderwania warstwy laminarnej występuje szeroki obszar zawirowany i silne oddziaływanie podciśnienia na tylną część ciała. Oderwaniu turbulentnej warstwy przyściennej towarzyszy węższy obszar zawirowań i słabsze oddziaływanie podciśnienia.

6.2.4. Określenie siły parcia działającej na walec o profilu kołowym

Walec o kołowym przekroju poprzecznym opływany jest płynem rzeczywistym (lepkim). Przepływ wzdłuż osi walca jest jednorodny, a rozkład parametrów przepływu (prędkości, ciśnienia, temperatury, gęstości) jest symetryczny wzdłuż osi walca. Ze względu na symetrię rozkładu parametrów przepływu, zagadnienie rozważać można jako przepływ płaski, w którym profil kołowy opływany jest płynem lepkim.

Siła aerodynamiczna działająca na opływany profil kołowy jest wypadkową siły oporu aerodynamicznego F_D oraz siły nośnej F_L. Opór aerodynamiczny (opór profilowy) jest sumą oporu ciśnieniowego, będącego składową siły oporu w kierunku normalnym do powierzchni opływanego profilu i oporu tarcia, będącego składową siły oporu w kierunku stycznym do powierzchni profilu. Rozkład ciśnień przy opływie profilu jest niesymetryczny względem osi prostopadłej do kierunku przepływu $\vec{U}_\infty$ (oś y) i symetryczny względem osi równoległej do kierunku przepływu $\vec{U}_\infty$ (oś x). Asymetria rozkładu ciśnienia w kierunku normalnym do kierunku przepływu generuje siłę oporu aerodynamicznego. Z symetrii rozkładu ciśnienia w kierunku stycznym do profilu (i zgodnym z kierunkiem przepływu) wynika brak występowania siły nośnej.

Wyznaczenie siły oporu aerodynamicznego podczas opływu profilu kołowego opiera się na analizie rozkładu ciśnienia wzdłuż profilu. Na rysunku 6.6 przedstawiono rozkład ciśnienia na profilu kołowym w przepływie płynu idealnego (wyznaczonego na drodze teoretycznej) oraz wyznaczonego podczas eksperymentu. Na rysunku 6.7 przedstawiono rozkład sił działających na profil kołowy.

Elementarna siła parcia działająca na element powierzchni $\mathrm{d}S$ określona jest wzorem

$$\mathrm{d}\vec{N} = -p(\theta)\hat{n}\,\mathrm{d}S, \tag{6.9}$$

gdzie $\mathrm{d}\vec{N}$ – elementarna siła parcia działająca na element powierzchni $\mathrm{d}S$ walca kołowego [N], $p(\theta)$ – ciśnienie absolutne na powierzchni walca określone położeniem kąta θ [Pa], $\mathrm{d}S$ – elementarna powierzchnia walca [m^2], $\hat{n}$ – wektor normalny do elementu powierzchni $\mathrm{d}S$ [-].

Siła parcia działająca na powierzchnię S walca o przekroju kołowym wyznaczona może być z zależności

$$\vec{N} = -\iint_S p(\theta)\hat{n}\,\mathrm{d}S. \tag{6.10}$$

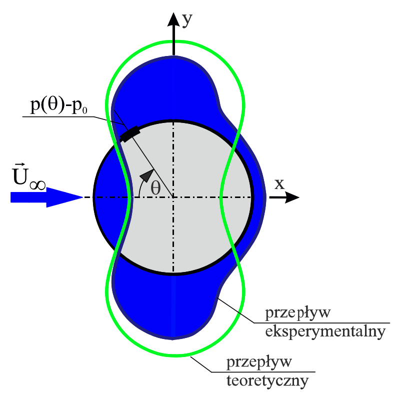
Składowa pozioma siły parcia (składowa siły parcia w kierunku przepływu) wyrażona jest zależnością

$$\vec{N}_H = -\vec{N}\cos\theta = -\iint_S p(\theta)\hat{n}\cos\theta\,\mathrm{d}S. \tag{6.11}$$

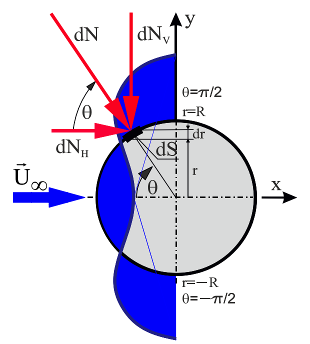
Rozważając przepływ płaski zakładamy jednostkową długość walca kołowego w kierunku prostopadłym do płaszczyzny $b = 1$, wtedy

$$\vec{N}_H = -\int_{b_1}^{b_2}\int_{l_1}^{l_2} p(\theta)\hat{n}\cos\theta\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}b = -\int_0^1\int_{l_1}^{l_2} p(\theta)\hat{n}\cos\theta\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}b = -\int_{l_1}^{l_2} p(\theta)\hat{n}\cos\theta\,\mathrm{d}l, \tag{6.12}$$

gdzie $\mathrm{d}l$ – element łuku profilu kołowego [m], b – długość walca kołowego w kierunku prostopadłym do płaszczyzny [m].



Rys. 6.6. Rozkład ciśnienia na profilu kołowym w przepływie teoretycznym i eksperymentalnym



Rys. 6.7. Rozkład sił działających na profil kołowy

Układ współrzędnych, w którym wprowadzono powyższą zależność, jest o tyle niewygodny, że wymaga całkowania wzdłuż łuku, komplikując obliczenie całki. Zmieniając układ współrzędnych na układ zależny od promienia r, oraz wykorzystując zależność $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\theta$, otrzymujemy

$$\vec{N}_H = -\int_{r_1}^{r_2} p(\vec{r})\hat{n}\,\mathrm{d}r, \tag{6.13}$$

gdzie $p(r)$ – ciśnienie absolutne na powierzchni walca określone położeniem promienia r [Pa]. Równanie (6.13) jest równoważne równaniu (6.12) z tą różnicą, że funkcja podcałkowa jest funkcją zmian ciśnienia w zależności od promienia r, a nie od kąta θ.

Całkowita siła parcia równa będzie sumie składowych sił parcia dla lewej i prawej połówki walca (zgodnie z rysunkiem 6.6)

$$\vec{N}_H = \vec{N}_{HL} + \vec{N}_{HP} = \left(-\int_{r_1}^{r_2} p(r)\hat{n}\,\mathrm{d}r\right)_L + \left(-\int_{r_1}^{r_2} p(r)\hat{n}\,\mathrm{d}r\right)_P. \tag{6.14}$$

Z uwagi na to, że wskutek obciążenia powierzchni walca ciśnieniem otoczenia p_0, składowe siły aerodynamicznej pochodzące od stałego ciśnienia p_0 działające na lewą i prawą połówkę walca są równe zeru, co wyraża zależność

$$\left(-\int_{r_1}^{r_2} p_0 \hat{n}\, \mathrm{d}r\right)_L = \left(-\int_{r_1}^{r_2} p_0 \hat{n}\, \mathrm{d}r\right)_P . \tag{6.15}$$

Całkowita siła parcia działająca na lewą i prawą połówkę profilu kołowego wyraża się zależnością od względnego ciśnienia $\Delta p(r) = p(r) - p_0$

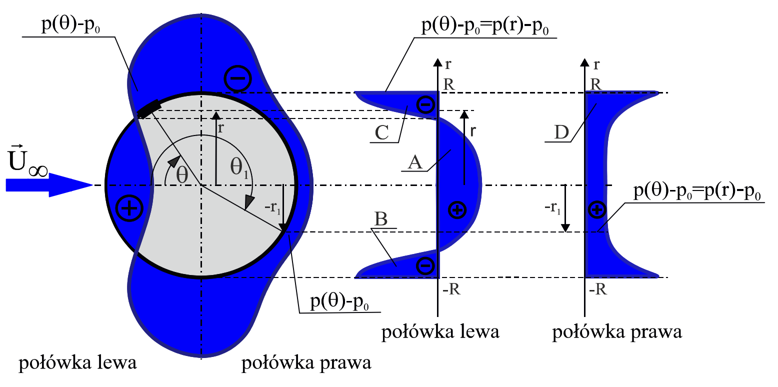
$$\vec{N}_H = \left(\int_{r_1}^{r_2} (p(r) - p_0)\, \hat{n}\, \mathrm{d}r\right)_L + \left(\int_{r_1}^{r_2} (p(r) - p_0)\, \hat{n}\, \mathrm{d}r\right)_P . \tag{6.16}$$

Analityczne określenie funkcji rozkładu ciśnienia względnego na profilu kołowym $p(r) - p_0$ jest skomplikowane, a wyznaczenie wypadkowej siły N_H na drodze całkowania obarczone dużym błędem przybliżeń.

6.2.5. Graficzne wyznaczenie siły oporu aerodynamicznego

Rozkład ciśnienia względnego na profilu kołowym może być określony na drodze eksperymentalnej i przedstawiony graficznie na wykresie zależności $\Delta p = p(r)–p_0$. Ciśnienia określane są na podstawie wskazań manometrów różnicowych podłączonych do otworów impulsowych umieszczonych na powierzchni walca zainstalowanego na stanowisku pomiarowym. Siła parcia określona równaniem (6.16) wyznaczana jest na drodze całkowania graficznego.

Na podstawie zmierzonych podczas eksperymentu ciśnień względnych na sporządza się graficzny przebieg ciśnień $\Delta p = p(r)–p_0$ (rysunek 6.8).

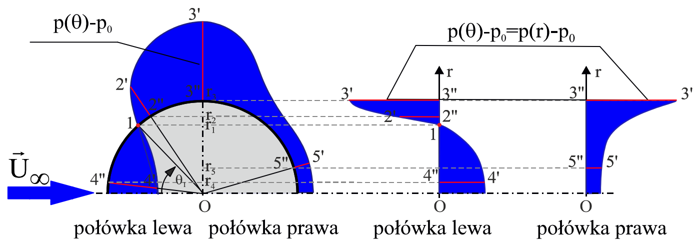


Rys. 6.8. Graficzna metoda wyznaczania siły oporu aerodynamicznego

Rozkłady ciśnień $p(r) - p_0$ określono oddzielnie dla obu połówek profilu. Odcinek o długość $-R, R$ jest średnicą profilu kołowego. Wzdłuż tego odcinka, każdej wartości promienia r równej $R \sin\theta$ przyporządkowano odcinek obrazujący wartość ciśnienia $p(r) - p_0$ określonego na podstawie rozkładu ciśnień wyznaczonych w trakcie eksperymentu $p(r) - p_0$.

Sposób budowy wykresu $p(r) - p_0 = p(\theta) - p_0$ pokazano na rysunku 6.9.

Budowa wykresu $p(r) - p_0$ dla lewej i prawej połówki profilu polega na przeniesieniu odpowiednich odcinków z wykresu $p(\theta) - p_0$. Punkt 1: łączymy środek O z punktem 1 leżącym na profilu kołowym, przenosimy punkt 1 na lewą i prawą połówkę profilu tak, aby punkt znajdował się na promieniu r_1 odpowiadającym kątowi θ_1 określającym położenie punktu 1. Odcinek $2' - 2''$: łączymy środek O profilu w punktem $2''$ leżącym na lewej połówce profilu; odkładamy odcinek $2' - 2''$ równy ciśnieniu $p(\theta_2) - p_0$ i przenosimy ten odcinek na odpowiedni wykres (dla połówki lewej) na wysokości odpowiadającej promieniowi r_2. Otrzymamy odcinek $p(r_2) - p_0$. Dla pozostałych odcinków postępujemy analogicznie, pamiętając, że nadciśnienia oznaczone znakiem '+' z wykresu $p(r) - p_0$ przenosimy na wykres $p(\theta) - p_0$ dla połówki lewej po prawej stronie wykresu, podciśnienia oznaczone znakiem '−' dla połówki lewej po lewej stronie wykresu, dla połówki prawej po prawej stronie wykresu.



Rys. 6.9. Sposób budowy wykresu $p(r) - p_0 = p(\theta) - p_0$

Geometryczna interpretacja wartości całki z równania (6.16) pozwala na wyznaczenie wartości siły parcia N_H równej sumie pól zawartych między funkcją podcałkową, a osią r w granicach $-R$ do R. Oznaczając pole jak na rysunku 6.8 literami A, B, C, D i przyjmując zwrot prędkości przepływu U_∞ jako dodatni dla zwrotów składowych poziomych elementarnych sił parcia $\mathrm{d}N_H$ otrzymuje się:

– dla lewej połówki profilu: pole A w obrębie nadciśnień, znak '+', zgodne zwroty prędkości przepływu U_∞ i elementarnych sił parcia $\mathrm{d}N_H$, pola B i C w obrębie podciśnień, znak '−', zwroty przeciwne,
– dla prawej połówki profilu: pole D, znajdujące się w obrębie podciśnień, jak pola B i C na połówce lewej, ale wskutek odmiennie zorientowanej powierzchni zwroty składowych poziomych elementarnych sił parcia mają znak '+'.

Wartość składowej poziomej siły parcia wyrażona jest zależnością

$$N_H = [(A + D) - (B + C)]\, k_R k_p, \tag{6.17}$$

gdzie: k_p i k_R są przyjętymi podziałkami, jakie należy uwzględnić przedstawiając wielkości $p(r) - p_0$ oraz R w postaci graficznej.

Składowa pozioma siły parcia N_H równa jest sile oporu ciśnieniowego (sile oporu kształtu) profilu kołowego

$$N_H = F_P. \tag{6.18}$$

Z uwagi na fakt, że na wielkości ciśnień w poszczególnych punktach pomiarowych umieszczonych na powierzchni profilu wpływają takie wielkości jak parametry przepływu i parametry termodynamiczne płynu opływającego profil, przyjęło się w aerodynamice takie rozkłady przedstawiać w formie bezwymiarowej. Wartości poszczególnych ciśnień są odniesione do wartości ciśnienia dynamicznego q panującego w strumieniu w trakcie pomiarów. Na wykresach przedstawia się zależność współczynnika ciśnienia w funkcji położenia określonego kątem θ, $c_p = c_p(\theta)$.

6.2.6. Współczynnik oporu kształtu

Siła oporu wyrażona jest zależnością

$$F_D = c_D \frac{\rho U^2}{2} S, \tag{6.19}$$

gdzie c_D – współczynnik oporu (współczynnik oporu profilowego) [-], S – rzut powierzchni profilu na kierunek normalny do kierunku przepływu (przekrój frontalny opływanego ciała) [m^2], $\frac{U^2}{2}$ – ciśnienie dynamiczne [Pa].

Siła oporu ciśnieniowego dana jest wzorem

$$F_p = c_p \frac{\rho U^2}{2} S, \tag{6.20}$$

gdzie c_p – współczynnik oporu kształtu (współczynnik oporu ciśnieniowego) [-].

Siłę tarcia możemy przedstawić jako

$$F_f = c_f \frac{\rho U^2}{2} S, \tag{6.21}$$

gdzie c_f – współczynnik oporu tarcia [-].

Współczynnik oporu profilowego można przedstawić jako sumę

$$c_D = c_p + c_f, \tag{6.22}$$

gdzie współczynniki oporu profilowego, oporu kształtu (oporu ciśnieniowego) i oporu tarcia wyrażone są jako

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{\rho U^2}{2}} \tag{6.23}$$

$$c_p = \frac{F_p}{\frac{\rho U^2}{2}} \tag{6.24}$$

$$c_f = \frac{F_f}{\frac{\rho U^2}{2}}. \tag{6.25}$$

Opierając się na teorii warstwy przyściennej i badaniach doświadczalnych dotyczących położenia punktu oderwania warstwy przyściennej można obliczyć, że współczynnik oporu kształtu dla profilu kołowego wynosi $c_p = 1.17$, współczynnik oporu tarcia $c_f = 5.93/\sqrt{Re}$, natomiast współczynnik oporu profilowego $c_D = 5.93/\sqrt{Re} + 1.17$. Udział siły oporu tarcia w stosunku do całkowitej siły oporu profilowego wynosi

$$\frac{F_f}{F_D} = \frac{c_f}{c_D} = \frac{\frac{5.93}{\sqrt{Re}}}{\frac{5.93}{\sqrt{Re}} + 1.17}. \tag{6.26}$$

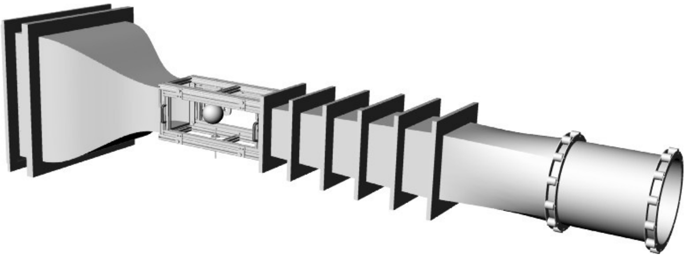
Dla liczb Reynoldsa $Re = 10^3$ udział siły oporu tarcia w stosunku do siły oporu profilowego wynosi 0.138, dla $Re = 10^5$ udział ten wynosi 0.0158. Całkowita siła oporu profilowego w przypadku opływu walca o profilu kołowym pochodzi głównie od siły oporu ciśnieniowego, co jest wynikiem oderwania się warstwy przyściennej. Przewaga sił oporu ciśnieniowego w sile oporu całkowitego klasyfikuje walec jako ciało nieopływowe.

6.3. Doświadczenie

6.3.1. Stanowisko pomiarowe

Otwarty tunel aerodynamiczny jest odpowiednio ukształtowanym kanałem, w którym za pomocą wentylatorów napędowych wywoływany jest jednorodny strumień powietrza opływający umieszczone w komorze pomiarowej obiekty. Badanie zjawisk zachodzących podczas opływu ciał polega na pomiarze parametrów przepływu strumienia powietrza, rejestracji i analizie rozkładów ciśnień i sił działających na ciało oraz wizualizacji przepływu.

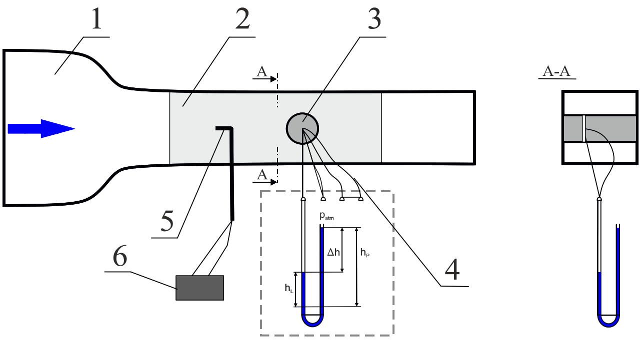
Na rysunku 6.10 przedstawiono widok tunelu aerodynamicznego do badań zjawisk aerodynamicznych podczas opływu ciał.



Rys. 6.10. Widok stanowiska pomiarowego

Na rysunku 6.11 przedstawiono schemat stanowiska pomiarowego do pomiaru rozkładu ciśnień przy opływie walca kołowego. Wentylator zasysa powietrze z otoczenia do komory pomiarowej (1), w której odpowiednio ukształtowany wlot (2) zapewnia uzyskanie jednorodnego profilu prędkości.

W komorze pomiarowej poziomo, w kierunku prostopadłym do kierunku przepływu zamontowany jest walec o kołowym przekroju poprzecznym (3). Uchwyt, w którym zamontowany jest walec zapewnia jego obrót, przez co możliwe jest uzyskanie różnych położeń otworów pomiarowych i zwiększenie tym samym ilości odczytów ciśnień statycznych (np. obrót walca o 10° zwiększa dwukrotnie ilość punktów pomiarowych). Na powierzchni walca wykonano 18 symetrycznie rozmieszczonych otworów pomiarowych (otwory rozmieszczone są co 20°). Do otworów podłączono elastycznymi przewodami manometry U-rurkowe (4) mierzące względne ciśnienie statyczne. Manometry wypełnione cieczą manometryczną o parametrach równych parametrom wody (parametry ustalone w trakcie pomiaru) umieszczono na tablicy manometrycznej nachylonej do poziomu pod kątem 30°. Pochylenie manometru zwiększa dokładność odczytu napełnienia rurek manometrycznych przy pomocy podziałki milimetrowej.



Rys. 6.11. Schemat stanowiska pomiarowego do pomiaru rozkładu ciśnień przy opływie walca kołowego

W komorze pomiarowej, w określonej odległości przed opływanym walcem, umieszczona jest rurka Prandtla (5). Do rurki Prandtla podłączono elektroniczny miernik prędkości przepływu (6) oraz manometr U-rurkowy mierzący ciśnienie statyczne i całkowite w komorze pomiarowej.

6.3.2. Przebieg eksperymentu

Po przygotowaniu stanowiska do pomiarów uruchomia się wentylator napędowy i ustala odpowiednie prędkość przepływu. Po ustaleniu się warunków pomiaru dokonuje się kilkukrotnego odczytu wielkości niezbędnych do ustalenia rozkładu ciśnień na powierzchni walca o kołowym przekroju poprzecznym opływanym strumieniem powietrza.

Prędkość przepływu odczytuje się na mierniku cyfrowym podłączonym do rurki Prandtla. Prędkość należy także obliczyć ze wskazań manometru U- rurkowego podłączonego do rurki Prandtla wskazującego ciśnienie statyczne oraz całkowite panujące w komorze pomiarowej. Manometr wypełniony jest wodą (parametry cieczy manometrycznej parametry ustalone w trakcie pomiaru).

Wysokość ciśnienia statycznego na powierzchni walca kołowego w 18 punktach pomiarowych odczytuje się mierząc wysokość napełnień rurek manometrycznych umieszczonych na tablicy.

Temperaturę powietrza mierzy się za pomocą termometru, a ciśnienie atmosferyczne odczytuje ze wskazań barometru.

Wyniki pomiarów należy umieścić w tabeli pomiarów.

Korzystając z geometrycznej własności profilu kołowego (nie posiada wyróżnionej charakterystycznej cięciwy) można zwiększyć liczbę punktów pomiarowych obracając profil o pewien kąt. Obracając profil o kąt +10° otrzymujemy pomiary $\Delta p(\theta)$ w punktach dla których $\theta = 10°, 30°, 50°, \ldots, 350°$. W ten sposób uzyskamy pomiary $\Delta p(\theta)$ w punktach położonych na obwodzie profilu co 10°.

6.4. Opracowanie wyników

6.4.1. Obliczenia

Wartości teoretycznego współczynnika oporu ciśnieniowego C_{pt} w funkcji kąta położenia kąta θ uzyskamy wyznaczając w kolejnych punktach $1, 2, \ldots, 18$ wartości $c_{pt}(\theta = 0°), c_{pt}(\theta = 20°), \ldots, c_{pt}(\theta = 340°)$ z zależności

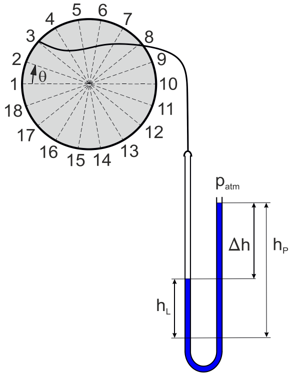
$$c_{pt} = 1 - 4\sin^2\theta, \tag{6.27}$$

gdzie c_{pt} – teoretyczny współczynnik oporu ciśnieniowego w funkcji kąta położenia kąta θ [-].

Wartości rzeczywistego współczynnika oporu ciśnieniowego $c_p(\theta)$ w funkcji kąta położenia θ dla pomiarów wyznaczamy na podstawie poniższych obliczeń. Wyznaczamy wartość rzeczywistego ciśnienia statycznego na powierzchni profilu kołowego na podstawie pomiarów odczytanych w tablicy manometrycznej. Podłączając manometr w sposób pokazany na rysunku 6.12 (prawe ramię manometru otwarte do atmosfery; Znak algebraiczny przy $\Delta p(\theta)$ jest adekwatny do relacji między ciśnieniem na profilu $p(\theta)$ i ciśnieniem atmosferycznym p_{atm}.) wysokość słupa cieczy manometrycznej jest proporcjonalna do różnicy ciśnień między ciśnieniem panującym na profilu w wybranym punkcie pomiarowym określonym położeniem kąta θ, a ciśnieniem atmosferycznym

$$\Delta p_m(\theta) = p(\theta) - p_{atm} = \rho_m g \Delta h_m i, \tag{6.28}$$

gdzie θ – położenie punktu pomiarowego $\theta = 0°, 20°, \ldots, 340°$, $\Delta p_m(\theta)$ – względne ciśnienie statyczne w punkcie określonym położeniem kąta θ mierzone manometrem [Pa], $p(\theta)$ – ciśnienie statyczne w punkcie określonym położeniem kąta θ [Pa], p_{atm} – ciśnienie atmosferyczne [Pa], ρ_m – gęstość cieczy manometrycznej w warunkach pomiaru [kg m^{-3}], g – przyspieszenie ziemskie [m s^{-2}], Δh_m – różnica napełnień rurek manometrycznych [m], i – przełożenie manometru równe $i = \sin 30°$.



Rys. 6.12. Odczyt różnicy ciśnień z manometrów

Wartość ciśnienia statycznego w komorze pomiarowej należy obliczyć na podstawie wskazań manometru U-rurkowego podłączonego do rurki Prandtla z zależności

$$p_{kp} = \rho_m g \Delta h_m, \tag{6.29}$$

gdzie p_{kp} – ciśnienie statyczne w komorze pomiarowej [Pa], ρ_m – gęstość cieczy manometrycznej w warunkach pomiaru [kg m^{-3}], g – przyspieszenie ziemskie [m s^{-2}], Δh_m – różnica napełnień rurek manometrycznych [m]. Należy zauważyć, że w komorze pomiarowej panuje podciśnienie, wartość ciśnienia p_{kp} powinna być w obliczeniach uwzględniona ze znakiem '-'.

Aby wyznaczyć ciśnienie względne $\Delta p(\theta)$ odniesione do ciśnienia panującego w komorze pomiarowej należy ciśnienie względne odczytane z manometrów odnieść do wskazań rurki Prandtla posługując się zależnością

$$\Delta p(\theta) = p(\theta) - (p_{atm} + p_{kp}) = \Delta p_m(\theta) + p_{kp}. \tag{6.30}$$

Wielkość ciśnienia dynamicznego wyznaczamy na podstawie wzoru

$$q = \rho_{pow} \frac{U^2}{2}, \tag{6.31}$$

gdzie ρ_{pow} – gęstość powietrza w warunkach pomiaru [kg m^{-3}], U – prędkość przepływu odczytana z miernika prędkości [m s^{-1}].

Wartości rzeczywistego współczynnika oporu ciśnieniowego c_p w funkcji kąta położenia θ zyskamy wyznaczając w kolejnych punktach $1, 2, \ldots, 18$ wartości $c_p(\theta = 0°), c_p(\theta = 20°), \ldots, c_p(\theta = 340°)$ z zależności

$$c_p(\theta) = \frac{\Delta p(\theta)}{q}, \tag{6.32}$$

gdzie $c_p(\theta)$ – rzeczywisty współczynnik oporu ciśnieniowego (oporu kształtu) w funkcji kąta położenia kąta θ [-].

Na wykresie przedstawia się zależność teoretycznego i rzeczywistego współczynnika ciśnienia w funkcji położenia określonego kątem θ przyjmując odpowiednią podziałkę.

Tabela 6.2. Tabela obliczeń

Punkt pomiarowy	θ	h_L	h_P	Δh	$\Delta p(\theta)$	q	c_p	c_{pt}
	°	m	m	m	Pa	Pa	Pa	Pa
1	0							
2	20							
⋮								
18	340							

Do wyznaczenia jednostkowej siły oporu ciśnieniowego F_p posłużą wykresy pomocnicze zależności $\Delta p(\theta)$ przedstawione odpowiednio dla lewej i prawej połówki profilu.

Korzystając z zależności (6.17) wyznacza się wartości pól A, B, C, D z wykresu przyjmując odpowiednie podziałki k_p i k_R.

Wartość współczynnika oporu ciśnieniowego c_p wyznaczana jest z zależności

$$c_p = \frac{F_p}{qS}, \tag{6.33}$$

gdzie powierzchnia profilu kołowego rzutowana na kierunek normalny do kierunku przepływu określona jest z zależności

$$S = 2Rb = 2R1. \tag{6.34}$$

Wyniki obliczeń należy zamieścić w tabeli obliczeń 6.2.

6.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać następujące elementy:

– stronę tytułową w/g podanego wzoru,
– wprowadzenie teoretyczne zawierające w szczególności charakterystykę wielkości wyznaczanej i opis metody pomiarowej,
– określenie celu ćwiczenia,
– schemat stanowiska pomiarowego,
– zestawienie wzorów i zależności użytych w obliczeniach wraz z objaśnieniami,
– zestawienie wyników pomiarów w formie załączonej karty pomiarów,
– zestawienie wyników obliczeń wraz ze szczegółowym tokiem obliczeń z podstawieniami do wzorów dla jednego pomiaru, wyniki obliczeń należy zamieścić wg wzoru podanego w tablicy 6.2,
– wykres porównawczy rozkładów teoretycznego i rzeczywistego współczynnika oporu ciśnieniowego w funkcji położenia kąta θ,
– wykresy pomocnicze rozkładu $\Delta p(\theta)$ do wyznaczenia jednostkowej siły oporu ciśnieniowego F_p,
– obliczenia wartości jednostkowej siły oporu ciśnieniowego F_p,
– obliczenia wartości współczynnika oporu ciśnieniowego c_p
– uwagi końcowe i wnioski.

6.4.3. Pytania kontrolne

i. Omów rozkład ciśnień przy opływie profilu kołowego płynem idealnym i rzeczywistym.
ii. Omów metodę wykreślną wyznaczania siły oporu.

Bibliografia

[1] R.A. Duckworth, *Mechanika płynów*, WNT, Warszawa, 1983

[2] J.W. Elsner, *Turbulencja przepływów*, PWN, Warszawa, 1987

[3] R. Gryboś, *Podstawy mechaniki płynów*, PWN, Warszawa, 1998

[4] K. Jeżowiecka-Kabsch (red.), *Mechanika płynów*, Wyd. PWr., Wrocław, 1984

[5] W. Prosnak, *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa, 1970

Rozdział 7

Wypływ cieczy ze zbiornika przez mały otwór

Marzena Banaszek

7.1. Cel ćwiczenia

W praktyce inżynierskiej zagadnienie wypływu cieczy przez otwory towarzyszy różnorodnym problemom związanym np. z eksploatacją zbiorników na ciecze.

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wartości współczynnika wypływu cieczy przez mały otwór w ścianie zbiornika. Współczynnik wypływu wprowadzono w celu uzyskania lepszej zgodności pomiędzy rzeczywistą, a teoretyczną wartością strumienia cieczy wypływającej ze zbiornika (objętościowego natężenia wypływu). Zadanie rozwiązuje się w oparciu o jednowymiarowy model przepływu cieczy oraz równanie Bernoulliego.

7.2. Wprowadzenie teoretyczne

7.2.1. Wypływ cieczy przez otwory

Ruch cieczy wypływającej przez otwory opisywany jest w zależności od zmian parametrów przepływu w czasie. Ciecz porusza się ruchem:
– stacjonarnym (ustalonym) w przypadku, gdy parametry przepływu takie jak: ciśnienie czy prędkość są stałe w czasie,
– niestacjonarnym (nieustalonym), gdy parametry przepływu są zmienne w czasie.

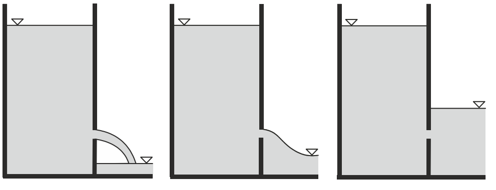
Przy wypływie z otworu w zbiorniku ciecz porusza się ruchem stacjonarnym wtedy, gdy położenie zwierciadła cieczy w zbiorniku jest stałe (np. zbiornik zasilany jest strumieniem zewnętrznym), a ruchem niestacjonarnym w przypadku, gdy położenie zwierciadła cieczy zmienia się w czasie (np. podczas opróżniania zbiornika).

Otwory dzieli się w zależności od opisu rozkładu parametrów przepływu w przekroju otworu:
– otwory małe: otwory, w których parametry przepływu (np. ciśnienie, prędkość) są stałe w każdym z punktów przekroju wypływowego,

– otwory duże: otwory, w których parametry przepływu (np. ciśnienie, prędkość) są zmienne w przekroju wypływowym.

Podział na różne rodzaje otworów uwzględnia także położenie zwierciadła cieczy na zewnątrz otworu:
– otwór niezatopiony: zwierciadło cieczy znajdującej się na zewnątrz otworu znajduje się poniżej górnej krawędzi otworu wypływowego, ciecz z otworu wypływa do atmosfery, a wypływ z otworu niezatopionego ma charakter swobodny,
– otwór częściowo zatopiony: zwierciadło cieczy znajdującej się na zewnątrz otworu znajduje się pomiędzy górną, a dolną krawędzią otworu wypływowego,
– otwór zatopiony: zwierciadło cieczy znajdującej się na zewnątrz otworu znajduje się powyżej górnej krawędzi otworu wypływowego.

Na rysunku 7.1 przedstawiono wypływ przez otwory małe.



Rys. 7.1. Otwory małe a) otwór niezatopiony b) otwór częściowo zatopiony c) otwór zatopiony

7.2.2. Równanie Bernoulliego

Trójmian Bernoulliego przedstawiony może być w postaci

$$\frac{U^2}{2} + P(p) + \Pi = const, \tag{7.1}$$

gdzie U – prędkość, $P(p)$ – funkcja ciśnienia p, określona wyrażeniem $P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}$, Π – potencjał pola sił masowych.

Trójmian Bernoulliego wyraża zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania energii przy spełnieniu założeń upraszczających:
– płyn jest nielepki – współczynnik lepkości dynamicznej $\mu = 0$,
– płyn jest barotropowy $\rho = \rho(p)$,
– przepływ jest stacjonarny (ustalony w czasie $\frac{\partial}{\partial t} = 0$),
– pole sił masowych jest potencjalne $\vec{f} = -\nabla\Pi$, gdzie $\vec{f}$ jest gęstością rozkładu sił masowych.

Trójmian Bernoulliego słuszny jest w pięciu przypadkach: wzdłuż linii prądu, wzdłuż linii wirowej, dla przepływu śrubowego, dla przepływu bezwirowego i w przypadku braku przepływu ($U = 0$ w sytuacji hydrostatycznej).

W przypadku przepływu płynu nieściśliwego $\rho = const$ w polu grawitacyjnym opisanym potencjałem $\Pi = gz$ otrzymujemy równanie Bernoulliego w postaci:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const \tag{7.2}$$

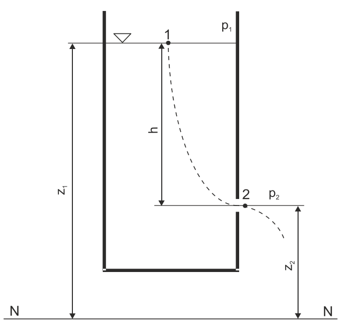
lub w postaci

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = const, \tag{7.3}$$

gdzie p – ciśnienie [Pa], ρ – gęstość [kg m^{-3}], g – przyspieszenie grawitacyjne [m s^{-2}], z – wysokość względem poziomu odniesienia [m].

Lewa strona równań (7.2) i (7.3) przedstawia składowe energii mechanicznej: energię kinetyczną, energię ciśnienia i energię potencjalną cieczy, prawa strona *const* wyraża stałość energii mechanicznej. Równanie Bernoulliego (7.2) mówi, że suma energii kinetycznej płynu, energii ciśnienia oraz energii potencjalnej pola sił masowych jest stała lub inaczej (7.3) wysokości prędkości (czyli wysokości, z której spadający element płynu uzyska prędkość U), wysokości ciśnienia (czyli wysokości, na jaką wzniesie się słup cieczy pod ciśnieniem p) oraz wysokości geometrycznej jest stała.

7.2.3. Analiza założeń upraszczających



Rys. 7.2. Wypływ cieczy ze zbiornika przez mały otwór

W przypadku rozpatrywanego eksperymentu analiza założeń upraszczających dotyczy założenia o nielepkości i nieściśliwości płynu, stacjonarności przepływu i potencjalności sił grawitacyjnych.

Założenie nielepkości płynu jest istotnym uproszczeniem rzeczywistości. Jest to jedna z przyczyn braku zgodności pomiędzy wielkościami określonymi teoretycznie a wielkościami mierzonymi.

Założenie stacjonarności przepływu jest ściśle związane z poziomem cieczy w zbiorniku (rysunek (7.2)). Przy ciągłym uzupełnianiu cieczy (podtrzymywaniu przepływu) przepływ można uznać za stacjonarny, tj. parametry przepływu nie zmienią się wraz z upływem czasu. Jeżeli poziom cieczy w zbiorniku będzie się obniżał, to stacjonarność przepływu ocenia się szacując liczbę Strouhala:

$$Sh = \frac{\mu A_2}{2A_1} = \frac{h_1}{tU_1}, \tag{7.4}$$

gdzie Sh – liczba Strouhala [-], μ – współczynnik wypływu (współczynnik objętościowego natężenia przepływu) [-], A_1 – pole przekroju zbiornika [m^2], A_2 – pole przekroju otworu wypływowego [m^2], h_1 – początkowy poziom zwierciadła cieczy w zbiorniku [m], t – całkowity czas opróżniania zbiornika [s], U_1 – początkowa prędkość wypływu cieczy z otworu [m s^{-1}].

Analizując liczbę Strouhala zauważyć można, że im mniejsze jest pole powierzchni otworu A_2 w stosunku do pola powierzchni zbiornika A_1, tym mniejsza jest wartość liczby Strouhala i tym mniejsze jest znaczenie niestacjonarności przepływu.

Założenia, które dotyczą nieściśliwości płynu i potencjalności sił grawitacyjnych, są w przypadku rozpatrywanego eksperymentu w pełni uzasadnione. Ciecz wypływająca ze zbiornika podlega tak małym zmianom ciśnienia, że gęstość cieczy można uważać za stałą. Pole grawitacji ziemskiej jest potencjalne.

7.2.4. Teoretyczna prędkość wypływu cieczy z otworu

Otwór w ścianie zbiornika można uznać za mały, gdy prędkość wypływu jest stała w każdym z punktów jego przekroju (tzn. wymiary otworu są małe w porównaniu z jego odległością od powierzchni swobodnej cieczy w zbiorniku). Oznacza to, że prędkość wypływu cieczy przy górnej krawędzi otworu jest zbliżona do prędkości wypływu cieczy przy jego dolnej krawędzi i równa średniej prędkości wypływu U.

Prędkość wypływu cieczy wyznaczono w oparciu o równanie Bernoulliego (7.3). Analizowano przepływ strugi płynącej od powierzchni swobodnej w zbiorniku do otworu wypływowego wzdłuż wybranej linii prądu. Równanie Bernoulliego określono przyjmując stałość wysokości energii mechanicznej dla poziomów 1 (zwierciadło cieczy w zbiorniku) oraz 2 (niewielka odległość za otworem wypływowym)

$$\left(\frac{U}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z\right)_1=\left(\frac{U}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z\right)_2. \tag{7.5}$$

Dla przepływu określono równanie zachowania masy:

$$Q = AU = const, \tag{7.6}$$

gdzie Q – strumień objętości [m^3 s^{-1}], A – przekrój [m^2]. Dla poziomów 1 oraz 2 równanie (7.6) przybiera postać:

$$(AU)_1 = (AU)_2. \tag{7.7}$$

Układ równań oparty o równanie Bernoulliego (7.5) oraz równanie zachowania masy (7.6) ma postać:

$$\frac{U_1}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{U_2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2, \tag{7.8a}$$
$$A_1U_1 = A_2U_2. \tag{7.8b}$$

Z układu (7.8) wyznaczono prędkość U_2 wypływu cieczy z otworu

$$U_2=\sqrt{2g\frac{\frac{p_1-p_2}{\rho g}+z_1-z_2}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}. \tag{7.9}$$

Uproszczenia równania (7.9) dotyczą ciśnień panujących na poziomach 1 oraz 2 oraz stosunków przekrojów otworu A_2 oraz zbiornika A_1. Nad powierzchnią swobodną cieczy w zbiorniku oraz w pobliżu otworu wypływowego panują ciśnienia $p_1 = p_2$ równe ciśnieniom atmosferycznym panującym na poziomach 1 oraz 2. Ich różnica $p_1 - p_2$ odniesiona do ciężaru właściwego cieczy ρg jest pomijalnie mała w porównaniu z różnicą wysokości $z_1 - z_2$. Ponadto przekrój otworu małego A_2 jest dużo mniejszy od przekroju zbiornika A_1 ($A_2 \ll A_1$), co oznacza, że stosunek tych przekrojów jest pomijalnie mały.

Zależność (7.9) upraszcza się do postaci zwanej wzorem Torricellego

$$U_2 = \sqrt{2gh}, \tag{7.10}$$

gdzie $h = z_1 - z_2$ [m] jest głębokością zanurzenia otworu pod powierzchnią swobodną cieczy w zbiorniku. Wzór Torricellego mówi, że teoretyczna prędkość wypływu cieczy z małego otworu w ścianie lub dnie zbiornika zależy wyłącznie od tego, jak głęboko zanurzony jest otwór. Teoretyczny strumień objętości płynu (teoretyczne objętościowe natężenie przepływu) dane jest zależnością

$$Q = A_2 U_2 = A_2 \sqrt{2gh}, \tag{7.11}$$

7.2.5. Współczynnik wypływu

W rzeczywistości strumień objętości (rzeczywiste objętościowe natężenie przepływu) jest mniejszy od wyznaczonego na drodze teoretycznej. Wynika to z faktu istnienia sił lepkości oraz sił masowych występujących w przepływach płynów rzeczywistych. Fakt przyjęcia uproszczonego modelu przepływu korygowany jest przez współczynnik wypływu (współczynnik objętościowego natężenia przepływu) μ. Współczynnik ten jest stosunkiem rzeczywistego strumienia objętości płynu Q_r do strumienia teoretycznego Q i opisany jest zależnością

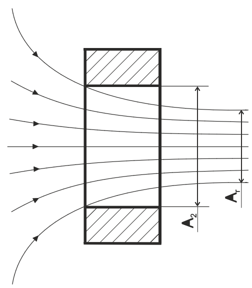
$$\mu = \frac{Q_r}{Q} < 1. \tag{7.12}$$

Uwzględniając zależności na rzeczywisty i teoretyczny strumień objętości otrzymujemy

$$\mu = \frac{Q_r}{Q} = \frac{A_r}{A_2}\frac{U_r}{U_2} = \alpha\varphi < 1, \tag{7.13}$$

gdzie α – współczynnik kontrakcji [-], φ – współczynnik prędkości [-].

Współczynnik kontrakcji opisuje tzw. zjawisko kontrakcji towarzyszące przepływowi cieczy przez otwory ostrokrawędziowe. Kontrakcja strumienia, czyli przewężenie strugi (vena contracta) wynika z działania sił bezwładności. W przekroju, w którym występuje kontrakcja, prędkość przepływu jest większa od prędkości, która wynika z geometrii otworu wypływowego, a pole przekroju strumienia jest mniejsze od pola przekroju otworu wypływowego. Ciecz dopływająca ze zbiornika do otworu ze wszystkich kierunków zostaje przyspieszona w pobliżu otworu, a strugi cieczy płynące w pobliżu ścianek nie mogą gwałtownie zmienić wartości jak i kierunku wektora prędkości. Strugi cieczy są odchylane i tworzą strugę przewężoną o polu mniejszym niż wynika to z pola przekroju otworu. Dopiero za płaszczyzną otworu wypływowego, w niewielkiej odległości od niego, ustalają się warunki przepływu (tj. ustalone zostają parametry przepływu: ciśnienie i prędkość, wektory prędkości ustawione są równolegle w całym przekroju) oraz ustala się pełne przewężenie strumienia. Kontrakcję strumienia obrazuje rysunek 7.3.



Rys. 7.3. Kontrakcja (przewężenie strugi)

Zjawisko kontrakcji opisuje się współczynnikiem kontrakcji danym zależnością

$$\alpha = \frac{A_r}{A_2} < 1. \tag{7.14}$$

Wartość liczbowa współczynnika kontrakcji zależy od kształtu otworu wypływowego, zaokrąglenia (ostrości) krawędzi, chropowatość jego ścian, grubości ścianki zbiornika oraz jego napełnienia. Zjawisko kontrakcji uwidacznia się najbardziej w przypadku otworów ostrokrawędziowych. Współczynnik kontrakcji zawiera się w przedziale 0.61-0.64 i w takich przypadkach różnica między rzeczywistym, a teoretycznym strumieniem objętości jest rzędu 40%.

Rzeczywista prędkość wypływu cieczy ze zbiornika jest mniejsza od prędkości teoretycznej wyznaczonej wzorem Torricellego. Zmniejszenie prędkości związane jest z lepkością cieczy i stratą energii wywołaną tarciem wewnętrznym pomiędzy przemieszczającymi się warstwami cieczy. Stosunek średniej prędkości rzeczywistej U_r do prędkości teoretycznej U_2 jest nazywany współczynnikiem prędkości φ

$$\varphi = \frac{U_r}{U_2} < 1. \tag{7.15}$$

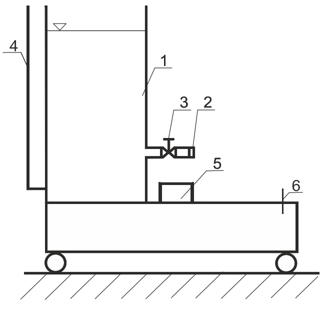
Współczynnik prędkości φ jest mniejszy od 1 i przyjmuje wartości dla wody i innych cieczy o zbliżonej lepkości w granicach 0.96-0.99. Jego wartość zależy od lepkości cieczy, od wielkości otworu wypływowego i wysokości napełnienia zbiornika.

7.3. Doświadczenie

7.3.1. Stanowisko pomiarowe

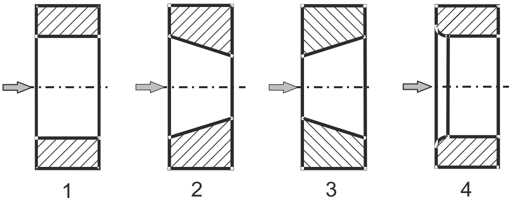
Stanowisko pomiarowe przedstawione na rysunku 7.4 składa się ze zbiornika (1) z króćcem wylotowym, do którego montuje się kolejno wymienne małe otwory (2).

Przepływ regulowany jest zaworem (3). Do pomiaru głębokości zanurzenia otworu pod zwierciadłem wody w zbiorniku służy szklana rurka piezometryczna (4) umieszczona na tle podziałki milimetrowej. Napełnianie zbiornika do żądanej wysokości realizowane jest przy pomocy pompy (5). Temperaturę wody mierzy się termometrem (6), ciśnienie atmosferyczne barometrem. Czas wypływu mierzony jest przy pomocy stopera.



Rys. 7.4. Stanowisko pomiarowe

Na stanowisku montuje się małe otwory. Kształty otworów to kolejno: otwór 1 – otwór cylindryczny, ostrokrawędziowy, otwór 2 – otwór zbieżny (konfuzor), ostrokrawędziowy, otwór 3 – otwór rozbieżny (dyfuzor), ostrokrawędziowy, otwór 4 – otwór cylindryczny, o zaokrąglonej krawędzi napływu. Kształty otworów wypływowych używanych w doświadczeniu przedstawiono na rysunku 7.5.



Rys. 7.5. Kształty małych otworów. 1 – otwór cylindryczny, ostrokrawędziowy. 2 – otwór zbieżny (konfuzor), ostrokrawędziowy. 3 – otwór rozbieżny (dyfuzor), ostrokrawędziowy. 4 – otwór cylindryczny, o zaokrąglonej krawędzi napływu

7.3.2. Przebieg eksperymentu

Po zamontowaniu odpowiedniego małego otworu (2) i zamknięciu zaworu (3) należy uruchomić pompę (5) napełniając zbiornik do określonej wysokości. Po przygotowaniu stanowiska do pomiarów należy otworzyć zawór (3) pozwalając na swobodny wypływ wody ze zbiornika przez otwór. Pomiar polega na określeniu czasu opadania zwierciadła wody w zbiorniku o wysokościach określonych przez prowadzącego ćwiczenie. Pomiar powtarza się dla kolejnych małych otworów ustalając za każdym razem takie same warunki początkowe (ten sam początkowy poziom napełnienia zbiornika).

Temperaturę wody mierzy się za pomocą termometru, a ciśnienie atmosferyczne odczytuje ze wskazań barometru. Ocena jakościowa przebiegu doświadczenia polega na obserwacji zasięgu zrzutu wody przy określonych poziomach napełnienia zbiornika dla każdego z badanych otworów. Ocenić należy także charakter wypływającej strugi wody (zwarty, rozproszony). Wyniki pomiarów należy umieścić w tabeli pomiarów.

7.4. Opracowanie wyników

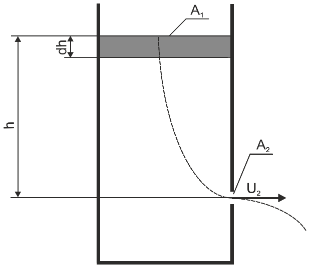
7.4.1. Obliczenia

Współczynnik wypływu μ określany jest na podstawie zależności na chwilowy strumień objętości

$$Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \tag{7.16}$$

gdzie V – objętość cieczy [m^3], t – czas [s].

W czasie $\mathrm{d}t$ przepływ traktujemy jako chwilowo ustalony i określamy zmianę położenia zwierciadła cieczy w zbiorniku $\mathrm{d}h$. Zwierciadło cieczy w zbiorniku obniża się o wartość $\mathrm{d}h$ co pokazuje rysunek 7.6.



Rys. 7.6. Schemat pomocniczy

Zatem zmiana objętości cieczy $\mathrm{d}V$ w zbiorniku wynosi

$$\mathrm{d}V = -A_1\,\mathrm{d}h. \tag{7.17}$$

Znak „minus” w zależności (7.17) oznacza ubytek objętości cieczy w zbiorniku. Przekształcając (7.16) do postaci $\mathrm{d}V = Q\,\mathrm{d}t$ oraz wyrażając strumień objętości Q_r za pomocą zależności

$$Q_r = \mu Q = \mu A_2 U_2 = \mu A_2 \sqrt{2gh}, \tag{7.18}$$

otrzymuje się wyrażenie

$$-\,A_1\,\mathrm{d}h = \mu A_2 \sqrt{2gh}. \tag{7.19}$$

Po uporządkowaniu i scałkowaniu równania (7.19), otrzymamy wyrażenie pozwalające wyznaczyć wartość współczynnika wypływu μ w postaci

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{A_1}{A_2}\,\frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\Delta t}, \tag{7.20}$$

gdzie h_1 – początkowa odległość osi otworu wypływowego od poziomu zwierciadła wody w zbiorniku [m], h_2 – końcowa odległość osi otworu wypływowego od poziomu zwierciadła wody w zbiorniku [m], Δt – czas opadania zwierciadła wody w zbiorniku od wysokości h_1 do wysokości h_2 [s].

Po wykonaniu obliczeń należy dla każdego kształtu otworu wypływowego obliczyć błąd bezwzględny Δ_μ wyznaczenia wartości współczynnika wypływu μ. Błąd Δ_μ wyznaczamy metodą różniczki zupełnej różniczkując zależność (7.20) względem h_1, h_2 oraz Δt, przyjmując pozostałe wielkości jako stałe. Błąd bezwzględny wyznaczenia wartości współczynnika wypływu $\Delta\mu$ dany jest zależnością

$$\Delta_\mu = \sqrt{\frac{1}{2g}\frac{A_1}{A_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} + \frac{1}{\sqrt{h_2}} \right) \frac{\Delta_h}{\Delta t} + \frac{2\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right) \Delta_{\Delta_t}}{\Delta t^2}, \tag{7.21}$$

gdzie Δ_h – błąd bezwzględny odczytu wysokości h_1 oraz h_2 [m], $\Delta_{\Delta t}$ – błąd bezwzględny odczytu czasu Δt [s].

Wartości średnie współczynnika wypływu $\bar{\mu}$ oraz błędu wyznaczenia tego współczynnika $\overline{\Delta_\mu}$ są średnimi arytmetycznymi wartości cząstkowych. Wyniki obliczeń należy umieścić w tabeli 7.1. Do obliczeń należy przyjąć średnicę zbiornika $D = 0.25$ m oraz średnicę małego otworu $d = 0.005$ m.

Tabela 7.1. Tabela obliczeń

Kształt	h_1	h_2	Δt	μ	$\bar{\mu}$	Δ_μ	$\overline{\Delta_\mu}$
	m	m	s	–	–	–	–

7.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać następujące elementy:

– stronę tytułową w/g podanego wzoru,
– wprowadzenie teoretyczne zawierające w szczególności charakterystykę wielkości wyznaczanej i opis metody pomiarowej,
– określenie celu ćwiczenia,
– schemat stanowiska pomiarowego,
– zestawienie wzorów i zależności użytych w obliczeniach wraz z objaśnieniami,
– zestawienie wyników pomiarów w formie załączonej karty pomiarów,

- zestawienie wyników obliczeń wraz ze szczegółowym tokiem obliczeń z podstawieniami do wzorów dla jednego pomiaru wraz z analizą błędów pomiarów,
- uwagi końcowe i wnioski dotyczące charakteru wypływu wody z otworu, zasięgu zrzutu wody oraz wartości współczynników wypływu dla każdego kształtu otworu wypływowego, wybór najlepszego otworu wypływowego wraz z uzasadnieniem.

7.5. Pytania kontrolne

i. Przedstaw i przeanalizuj założenia upraszczające równania Bernoulliego.
ii. Omów współczynnik wypływu.

Bibliografia

[1] J. Bukowski, *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa, 1976

[2] R. Gryboś, *Podstawy mechaniki płynów*, PWN, Warszawa, 1998

[3] W. Prosnak, *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa, 1970

[4] R. Puzyrewski, J. Sawicki, *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*, PWN, Warszawa, 1987

[5] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Rozdział 8

Pomiar strumienia cieczy płynącej w rurociągu

Marzena Banaszek

8.1. Cel ćwiczenia

Pomiary strumienia płynu należą do grupy najważniejszych i najczęściej wykonywanych pomiarów w przemyśle. Przepływomierze mierzą parametry przepływu płynów (cieczy i gazów) istotnych dla przebiegu różnych procesów produkcyjnych.

Celem ćwiczenia jest poznanie metod pomiaru i urządzeń stosowanych w pomiarach strumienia cieczy płynącej w rurociągu.

8.2. Wprowadzenie teoretyczne

8.2.1. Przepływomierze i metody pomiarowe

Pomiar strumienia płynu można wyznaczyć mierząc ilość płynu (masę lub objętość) w jednostce czasu stosując przepływomierze zliczające lub wielkość strumienia przepływającego płynu stosując przepływomierze strumieniowe. Przepływomierze stosowane są zarówno w pomiarach w kanałach zamkniętych (rurociągi, kanały prostokątne) jak i w kanałach otwartych.

Najczęściej przyjmowanym kryterium podziału przepływomierzy jest podział według fizycznych zasad ich działania. Wyróżnia się przepływomierze oparte na oddziaływaniu mechanicznym, zjawiskach falowych i istnieniu pola elektromagnetycznego.

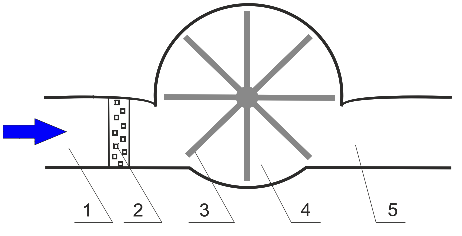
8.2.2. Przepływomierz skrzydełkowy

Przepływomierz skrzydełkowy jest przepływomierzem wirnikowym o osi wirnika ustawionym prostopadle do kierunku przepływu płynu. Zasada działania przepływomierza skrzydełkowego wykorzystuje proporcjonalność prędkości obrotowej wirnika przepływomierza do średniej prędkości przepływu płynu, a zatem także do strumienia objętości. Obroty wirnika przekazywane są do układu zliczania i odczytu.

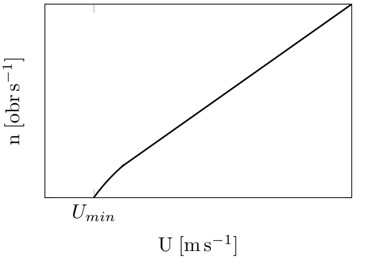
Średni strumień objętości określa się mierząc czas, w którym przez przepływomierz przepłynie określona objętość płynu.

W jednostrumieniowym przepływomierzu skrzydełkowym płyn dopływa do przepływomierza kanałem dolotowym (1), przepływa przez filtr (2), napływa na łopatki wirnika mające kształt płaskich skrzydełek (3) i wypływa kanałem wylotowym (5). Wskutek niesymetrycznego zasilania wirnika (4) strumieniem płynu, napór hydrodynamiczny na łopatki wirnika wprawia go w ruch obrotowy. Obroty wirnika przenoszone są do urządzenia zliczającego umieszczonego w obudowie. Przepływomierz posiada licznik wskazujący objętość przepływającego płynu.

Na rysunku 8.1 przedstawiono schemat przepływomierza skrzydełkowego jednostrumieniowego, a na rysunku 8.2 jego przykładową charakterystykę. U_{min} to minimalna prędkość przepływu płynu powodująca obrót wirnika wynikająca z oporów mechanicznych urządzenia.



Rys. 8.1. Przepływomierz skrzydełkowy



Rys. 8.2. Charakterystyka przepływomierza skrzydełkowego

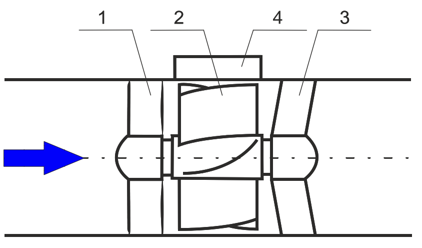
8.2.3. Przepływomierz turbinowy

Przepływomierz turbinowy to mała turbina pracująca na biegu luzem (bez obciążenia). Zasada działania oparta jest na zasadzie proporcjonalności prędkości obrotowej wirnika do strumienia płynu.

Wirnik przepływomierza posiada oś równoległą do kierunku napływu płynu i wprawiany jest w ruch wskutek reakcji płynu na układ łopatkowy wirnika. Obrót wirnika jest przekazywany za pomocą czujnika magnetycznego lub optycznego do elektronicznego układu zliczania i odczytu. Żądaną dokładność uzyskuje się poprzez wysoką precyzję wykonania elementów ruchomych miernika i indywidualną kalibrację przepływomierza.

Znaczący wpływ na dokładność pomiarów przepływomierzem turbinowym ma lepkość i gęstość płynu. Na zmianę własności płynu wpływ ma zmiana temperatury, która w trakcie eksploatacji powinna być monitorowana. Zaleca się kalibrację przepływomierza dla konkretnego płynu, którego przepływ będzie mierzony. Zaletą przepływomierzy turbinowych jest m.in. kompaktowa konstrukcja ułatwiająca instalację urządzeń tego typu w miejscach, gdzie występują ograniczenia przestrzenne (np. w maszynach).

Na rysunku 8.3 przedstawiono schemat przepływomierza turbinowego. Ciecz, przepływając przez promieniową kierownicę (1) napływa na łopatki wirnika (2), który ułożyskowany jest w dwóch łożyskach ślizgowych umieszczonych w opływce kierownicy (1) i opływce kierownicy wsporczej (3). Prędkość obrotowa wirnika mierzona jest w urządzeniu zliczającym (4).



Rys. 8.3. Schemat przepływomierza turbinowego. 1–kierownica, 2–wirnik, 3–kierownica wsporcza, 4–urządzenie zliczające

8.2.4. Przepływomierz pływakowy

Do najbardziej rozpowszechnionych przepływomierzy pływakowych należą rotametry, które służą do pomiaru strumienia płynu cieczy i gazów.

Rotametr jest przezroczystą rurką rozszerzającą się ku górze, ze swobodnie poruszającym się wewnątrz niej pływakiem. Woda przepływa przez rotametr od dołu ku górze przez szczelinę między pływakiem, a wewnętrzną powierzchnią rurki. Zmiana wartości strumienia płynu (natężenia przepływu) powoduje zmianę położenia pływaka. Zwiększenie przepływu powoduje wznoszenie się pływaka, przy czym wyższemu położeniu pływaka odpowiada większa powierzchnia szczeliny. Zmniejszenie przepływu powoduje opadanie pływaka, a powierzchnia szczeliny zmniejsza się. W celu stabilizacji położenia pływaka nadaje mu się ruch obrotowy wokół własnej osi za pomocą ukośnych rowków naciętych na obwodzie pływaka. Na zewnętrznej powierzchni rurki naniesiona jest podziałka umożliwiająca określenie jego położenia. Miarą strumienia płynu jest wysokość na jaką wznosi się pływak. Ruch płynu powoduje zmianę położenia pływaka do położenia, w którym zrównoważą się działające na niego siły. Pływak utrzymuje się w równowadze pod działaniem siły ciężkości G działającej ku dołowi oraz siły wyporu W i siły oporu F (siła oporu profilowego) działających ku górze (rysunek 8.4).

Warunek równowagi sił działających na pływak wyraża się równaniem

$$\vec{G} + \vec{W} + \vec{F} = \vec{0}. \tag{8.1}$$

Ciężar pływaka, siła wyporu oraz siła oporu wynoszą odpowiednio

$$G = m_p g = \rho_p V_p g, \tag{8.2}$$

$$W = mg = \rho V_p g, \tag{8.3}$$

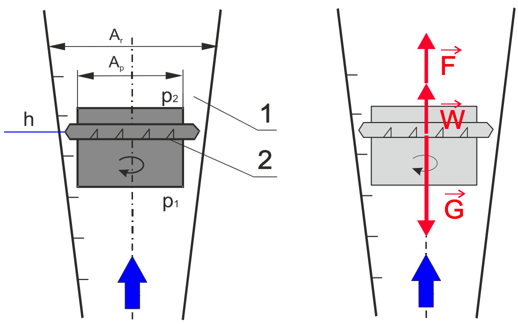
$$F = C A_p \frac{\rho U^2}{2}, \tag{8.4}$$

gdzie A_p [m^2] oznacza powierzchnię największego, poprzecznego przekroju pływaka, V_p – objętość pływaka [m^3], ρ_p – gęstość pływaka [kg m^{-3}], ρ – gęstość płynu [kg m^{-3}], C – współczynnik oporu pływaka [-], U – prędkość płynu w szczelinie [m s^{-1}].

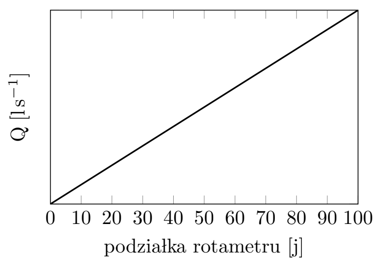
Strumień objętości płynu określony jest wzorem

$$Q = UA, \tag{8.5}$$

Gdzie $A = A_r - A_p$ [m^2] jest powierzchnią szczeliny między pływakiem, a rurką rotametru.



Rys. 8.4. Rotametr



Rys. 8.5. Charakterystyka rotametru

Prędkość U przepływu płynu wyraża się zależnością

$$U = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \tag{8.6}$$

gdzie p_1 jest ciśnieniem pod pływakiem [Pa], p_2 – ciśnieniem nad pływakiem [Pa]. Z zależności (8.6) wynika, iż różnica ciśnień Δp jest stała i nie zależy od wartości strumienia płynu.

Z równań (8.2) oraz (8.5) po przekształceniach otrzymuje się

$$Q = \sqrt{\frac{1}{C}} A \sqrt{\frac{2(\rho_p - \rho)V_p g}{\rho A_p}} = \mu A K, \tag{8.7}$$

gdzie $\mu = \sqrt{1/C}$ jest współczynnikiem przepływu [-], K stałą określoną zależnością

$$K = \sqrt{\frac{2(\rho_p - \rho)V_p g}{\rho A_p}}. \tag{8.8}$$

Współczynnik przepływu μ wyznaczany jest doświadczalnie i zależy od kształtu pływaka, chropowatości wewnętrznej powierzchni rury, chropowatości ścian pływaka oraz liczby Reynoldsa. Stała K określona jest dla stałych gęstości materiału pływaka i płynu oraz danego kształtu pływaka.

Ze wzoru (8.7) wynika, że strumień objętości płynu zależy od zmiennej powierzchni szczeliny A, która jest funkcją położenia pływaka h. Zatem

$$Q = f(h). \tag{8.9}$$

Strumień objętości płynu wyznacza się posługując się charakterystyką rotametru (rysunek 8.5) otrzymaną w czasie jego wzorcowania. Rotametry są wzorcowane indywidualnie dla określonego płynu, o określonej temperaturze i pod określonym ciśnieniem.

Zaletą stosowania rotametrów jest duży zakres pomiarowy i zdolność do pomiaru niewielkich przepływów. Zakres pomiarowy dla gazów $10^{-3} - 2 \cdot 10^{3}$ $\mathrm{m^3h^{-1}}$, dla cieczy $10^{-4} - 4 \cdot 10^{2}$. Zmianę zakresu można uzyskać przez zmianę ciężaru pływaka. Pomiar rotametrami cechuje się niewielkimi stratami ciśnienia, niezależnymi od wielkości przepływu. Urządzenie łatwo wykonać z materiałów odpornych na płyny agresywne, co umożliwia jego zastosowanie do pomiarów strumienia płynów silnie korodujących. Zaletą rotametrów jest także ich niski koszt, niewysokie koszty eksploatacji i serwisu, łatwość montażu, obsługi i naprawy, brak wymogu zasilania, dostępność części zamiennych oraz możliwość wyposażenia w czujniki i przetworniki.

Wadą stosowania rotametrów jest ich ograniczone zastosowanie. Dotyczy ono problemów związanych ze zmianą właściwości płynącego czynnika. Zmiana temperatury płynu powoduje zmianę lepkości i gęstości czyniąc podziałkę przyrządu bezużyteczną. Są one także wrażliwe na zanieczyszczenia, które osiadając na pływaku zmieniają jego masę oraz chropowatość powierzchni. Zmiana masy wpływa na zmianę różnicy ciśnień, a zmiana chropowatości na zmianę współczynnika natężenia przepływu, co prowadzi do błędów pomiarowych. Rotametry powinny być wzorcowane dla danego rodzaju płynu i dla temperatury, w jakiej będą eksploatowane.

Dokładność pomiaru w przypadku ścisłego przestrzegania warunków pomiarów wynosi około 1%, natomiast w przypadku pomiarów technicznych (złagodzone warunki przeprowadzania pomiarów) 2%.

8.3. Doświadczenie

8.3.1. Stanowisko pomiarowe

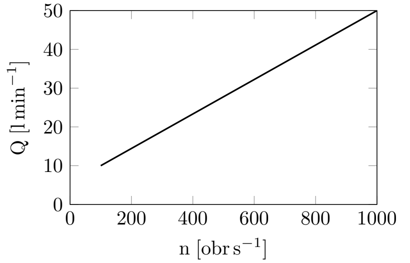
Stanowisko pomiarowe przedstawiono na rysunku 8.7. Na wspólnym rurociągu (1) zainstalowano następujące urządzenia pomiarowe: przepływomierz skrzydełkowy (wodomierz) (2), przepływomierz turbinowy (3), przepływomierz zwężkowy (kryza z przytarczowym pomiarem ciśnienia) (4), przepływomierz pływakowy (rotametr) (5) oraz zbiornik pomiarowy (6) z króćcem wylotowym (7). Zawór odpływowy (8) służy do opróżniania zbiornika po zakończeniu pomiaru. Do pomiaru napełnienia zbiornika służy szklana rurka piezometryczna (9) umieszczona na tle podziałki milimetrowej. Napełnianie zbiornika do żądanej wysokości realizowane jest przy pomocy pompy (10) pobierającej wodę ze zbiornika głównego (11). Zawór regulacyjny (11) służy do regulacji strumienia objętości (natężenia przepływu) wody płynącej w rurociągu.

Temperaturę wody mierzy się termometrem (12), ciśnienie atmosferyczne barometrem. Czas napełniania zbiornika mierzony jest przy pomocy stopera.

Przepływomierz zwężkowy wbudowany w instalację to kryza z przytarczowym pomiarem ciśnienia. Dane instalacji: rurociąg to rura walcowana stalowa o powierzchni wewnętrznej nowej, użytkowana kilka lat, średnica rurociągu w temperaturze 20 °C wynosi $D = 40$ mm. Zwężka pomiarowa ma średnicę w temperaturze 20 °C wynoszącą $d = 24$ mm.

Zainstalowany przepływomierz skrzydełkowy to licznik do wody (wodomierz) skrzydełkowy, jednostrumieniowy, suchy, do wody zimnej, Profit 2,5.

W instalacji zamontowano przepływomierz turbinowy PMB-6000. Przepływomierz składa się z obudowy, wirnika i urządzenia zliczającego. Obudowę przepływomierza wykonano z niemagnetycznej stali stopowej. Wirnik, ułożyskowany w tulejkach teflonowych, wykonano z materiału magnetycznie miękkiego (permalloju). Urządzenie zliczające zbudowane jest w postaci cewki elektrycznej, nawiniętej na rdzeń z magnesu trwałego. Obrót wirnika wywołany przepływem cieczy powoduje okresowe zmiany indukcji magnetycznej w szczelinie pomiędzy łopatkami wirnika, a rdzeniem cewki. Dzięki temu, na zaciskach cewki generuje się siła elektromotoryczna, której częstotliwość jest proporcjonalna do prędkości obrotowej wirnika i jednocześnie proporcjonalna do strumienia objętości cieczy. Impulsy wyświetlane są w postaci prędkości obrotowej [obr min^{-1}]. Charakterystyka przepływomierza pokazana jest na wykresie 8.6. Dane oraz charakterystykę przepływomierza turbinowego to: zakres natężeń przepływów $5 - 10\,\mathrm{l\,min^{-1}}$, prędkość obrotowa wirnika $100 - 1000\,\mathrm{obr\,min^{-1}}$, maksymalny opór hydrauliczny 0.048 MPa, maksymalne ciśnienie robocze 32 MPa, temperatura pracy $60 - 80$ °C, lepkość cieczy $\leqslant 7 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$.



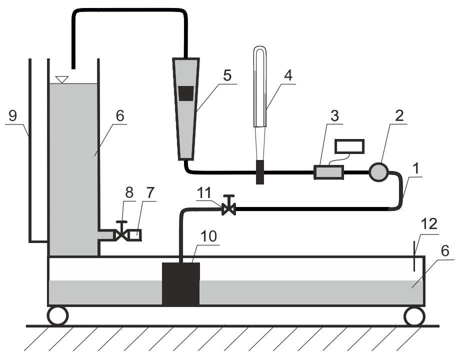
Rys. 8.6. Charakterystyka przepływomierza turbinowego PMB-6000

Na stanowisku wbudowano rotametr przemysłowy RIN-602 składający się ze stożkowej rury szklanej z niemianowaną skalą 0 . . . 10 i poruszającego się swobodnie pływaka. Położenia pływaka odczytywane jest na poziomie pierścienia pływaka znajdującego się w miejscu największej średnicy pływaka.

Zbiornik pomiarowy ma średnicę równą 0.250 m.

8.3.2. Przebieg eksperymentu

Pomiar wielkości służących do określenia strumienia objętości cieczy (natężenia przepływu) na stanowisku pomiarowym wykonywany jest przy pomocy wybranych urządzeń pomiarowych zamontowanych na wspólnym rurociągu. Pomiary wykonuje się niezależnie na poszczególnych stanowiskach pomiarowych.



Rys. 8.7. Stanowisko pomiarowe do pomiaru strumienia cieczy w rurociągu: 1–rurociąg, 2–przepływomierz skrzydełkowy (wodomierz), 3–przepływomierz turbinowy, 4–przepływomierz zwężkowy (kryza z przytarczowym pomiarem ciśnienia), 5–przepływomierz pływakowy (rotametr), 6–zbiornik pomiarowy, 7–króciec wylotowy, 8–zawór odpływowy, 9–rurka piezometryczna, 10–pompa, 11–zawór regulacyjny, 12–termometr

Po przygotowaniu stanowiska do pomiarów uruchamia się pompę i zaworem regulacyjnym ustala się przepływ odpowiednio do wskazań rotametru.

Za pomocą przepływomierza skrzydełkowego (wodomierza) mierzy się objętość wody, która przepłynie przez przepływomierz w określonym czasie. W tym celu uruchamia się stoper, dokonując jednocześnie odczytu początkowego wskazania przyrządu. Po otrzymaniu sygnału zakończenia pomiaru zatrzymuje się stoper, odczytując jednocześnie końcowe wskazanie przepływomierza.

Przepływomierz turbinowy podłączony jest do licznika prędkości obrotowej wirnika przepływomierza. W trakcie pomiaru odczytuje się średnie wskazanie przyrządu.

Przepływomierz zwężkowy (kryza z przytarczowym pomiarem ciśnienia) podłączony jest do manometru różnicowego U-rurkowego. Spadek ciśnienia statycznego na zwężce odczytuje się mierząc średnią różnicę napełnień rurek manometrycznych. Manometry wypełnione są wodą (parametry cieczy manometrycznej zgodne z parametrami wody płynącej w rurociągu).

Posługując się rotametrem odczytuje się średnie wskazanie przyrządu w czasie trwania pomiaru. Odczytu dokonuje się na podziałce naniesionej na zewnętrznej powierzchni rury, na wysokości górnej powierzchni pływaka.

Zbiornik pomiarowy jest przyrządem służącym do wzorcowania przepływomierzy. Pomiar polega na określeniu czasu napełniania zbiornika. Po ustaleniu początkowego i końcowego położenia zwierciadła wody w zbiorniku podaje się pozostałym uczestnikom ćwiczenia sygnał początku i końca pomiaru. Na sygnał początku pomiaru uruchamia się stoper, dokonując jednocześnie odczytu początkowego położenia zwierciadła wody w zbiorniku. Po sygnale zakończenia pomiaru zatrzymuje się stoper, odczytując jednocześnie końcowe położenie zwierciadła wody.

Przygotowując stanowisko do kolejnego pomiaru otwiera się zawór odpływowy pozwalając na swobodny wypływ wody ze zbiornika przez króciec wylotowy. Zaworem regulacyjnym pompy ustala się odpowiednie natężenie przepływu określając je wskazaniem podziałki rotametru.

Temperaturę wody mierzy się za pomocą termometru, a ciśnienie atmosferyczne odczytuje ze wskazań barometru.

Wyniki pomiarów należy umieścić w tabeli pomiarów.

8.4. Opracowanie wyników

8.4.1. Obliczenia

Jako pomiar wzorcowy traktowany jest pomiar strumienia objętości przy pomocy zbiornika pomiarowego

$$Q = \frac{V_{l,zb} - V_{p,zb}}{t_p - t_k} = \frac{\Delta V_{zb}}{\Delta t} = \frac{A_{zb}(h_{k,zb} - h_{p,zb})}{\Delta t} = \frac{\pi D_{zb}^2 (h_k - h_p)}{4\Delta t}, \tag{8.10}$$

gdzie V_p, V_k są początkowym i końcowym napełnieniem zbiornika [m^3], h_p, h_k są początkowym i końcowym położeniem zwierciadła cieczy w zbiorniku [m], Δt – czasem napełnienia zbiornika [s].

Przepływomierz skrzydełkowy (wodomierz) wyskalowany jest w m^3. Objętość wody, która przepłynęła przez wodomierz w czasie Δt równa jest

$$Q_w = \frac{V_{p,w} - V_{k,w}}{t_p - t_k} = \frac{\Delta V_w}{\Delta t}. \tag{8.11}$$

Strumień objętości wody płynącej przez instalację przy pomocy przepływomierza turbinowego wyznaczamy korzystając z charakterystyki podanej na rysunku 8.6. Dla zmierzonej prędkości obrotowej $n[obr\,\mathrm{min}^{-1}]$ wyznaczamy strumień objętości $Q_t = Q_t(n)$.

Należy sporządzić wykres skalowania rotametru traktując zbiornik pomiarowy jako urządzenie wzorcowe. Na osi odciętych należy nanieść działkę elementarną rotametru [jednostka rotametru], na osi rzędnych strumień objętości wyznaczony na podstawie obliczeń uzyskanych z pomiarów zbiornikiem [m^3 s^{-1}].

Sposób wyznaczania strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych podany został w skrypcie w rozdziale *Pomiar strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych*.

Błąd pomiaru wyznaczenia strumienia objętości poszczególnymi metodami należy wyznaczyć z zależności

$$\Delta_{Q_i} = \frac{Q_{zb} - Q_i}{Q_{zb}}\%. \tag{8.12}$$

Wyniki obliczeń należy umieścić w tabeli obliczeń wg wzoru podanego w tablicy 8.1. Wyniki strumienia objętości należy podać w jednostkach 10^{-3} l s^{-1}.

8.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać następujące elementy:

– stronę tytułową w/g podanego wzoru,

– wprowadzenie teoretyczne zawierające w szczególności charakterystykę wielkości wyznaczanej i opis metody pomiarowej,
– określenie celu ćwiczenia,
– schemat stanowiska pomiarowego,
– zestawienie wzorów i zależności użytych w obliczeniach wraz z objaśnieniami,
– zestawienie wyników pomiarów w formie załączonej karty pomiarów,
– zestawienie wyników obliczeń wraz ze szczegółowym tokiem obliczeń z podstawieniami do wzorów dla jednego pomiaru oraz analizą błędów pomiarów,
– wykres skalowania rotametru,
– uwagi końcowe i wnioski.

8.5. Pytania kontrolne

i. Omów zasadę działania rotametru.
ii. Podaj zalety i wady stosowania przepływomierzy wirnikowych w pomiarach strumienia objętości cieczy płynącej rurociągiem.

Bibliografia

[1] PN-EN 24006, PN-ISO 4006, Pomiar strumienia płynu i objętości przepływającego płynu w przewodach. Terminologia i symbole, PKNiM, Wyd. Normalizacyjne, Warszawa: 1997

[2] L. Kołodziejczyk, M. Rubik, S. Mańkowski, *Pomiary w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1974

[3] Z. Orzechowski, J. Prywer, R. Zarzycki, *Mechanika płynów w inżynierii środowiska*, WNT, Warszawa, 2001

[4] A. T. Troskolański, *Hydromechanika techniczna, t. III Pomiary wodne*, PWT, Warszawa, 1957

[5] H. Walden, J. Stasiak, *Mechanika cieczy i gazów w inżynierii sanitarnej*,Arkady, Warszawa, 1971

Tabela 8.1. Tabela obliczeń

Lp	Przepływomierz pływakowy Rotametr	Zwężka pomiarowa Kryza z pomiarem przytarczowym			Przepływomierz wirnikowy Wodomierz				Przepływomierz wirnikowy Turbinka			Zbiornik			t
	podz. jednostki	Δh mm	Q_{zw} $10^{-3}m^3$	ΔQ_{zw} %	V_p m^3	V_k m^3	Q_w $10^{-3}m^3$	ΔQ_w %	n obr min^{-1}	Q_t $10^{-3}m^3$	ΔQ_t %	h_p mm	h_k mm	Q_{zb} $10^{-3}m^3$	s
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															

Rozdział 9

Wiskozymetr Höpplera

Krzysztof Tesch

9.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenia zależności współczynnika lepkości dynamicznej od temperatury za pomocą wiskozymetru Höpplera.

9.2. Doświadczenie

9.2.1. Budowa wiskozymetru Höpplera

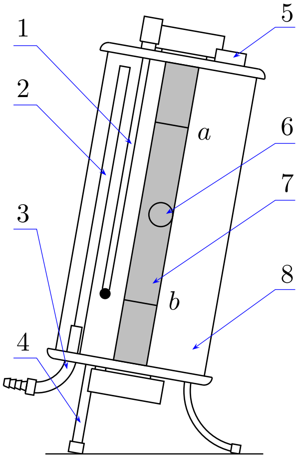
Wiskozymetr Höpplera[1)] pokazany jest na rysunku 9.1. Płaszcz wodny otoczony jest obudową (8). Wewnątrz obudowy znajduje się rurka (7) o średnicy D. W rurce znajduje się badany olej o gęstości ρ i wyznaczanej lepkości μ. Po wewnętrznej ściance rurki porusza się kulka (6) o średnicy D_k. Na rurce (7) znajdują się dwa znaczniki a i b, pomiędzy którymi mierzy się czas opadania t. Znaczniki są dobrane tak, aby przed osiągnięciem położenia a kulka poruszała się ruchem ustalonym. Oś rurki (7) odchylona jest od pionu o kąt α, który ustawia się za pomocą regulowanej nóżki (4). Do sprawdzania, czy wiskozymetr jest wyregulowany, służy poziomnica (5). Temperaturę płaszcza wodnego (8) ustawia się za pomocą grzałki lub termostatu (2), których wyjście oznaczono przez (3). Do pomiaru temperatury płaszcza wodnego służy termometr (1).

9.2.2. Zależność na współczynnik lepkości

Gdyby wiskozymetr był ustawiony w pionie i średnica kulki D_k byłaby dużo mniejsza od średnicy rurki D, to na kulkę działałyby siły opisane w rozdziale 4, a wzór na współczynnik lepkości μ dany byłby w postaci (4.16)

$$\mu = \frac{D_k^2 g}{18H} t \left(\rho_k - \rho\right). \tag{9.1}$$

[1)] Fritz Höppler (1897-1955) – niemiecki chemik i inżynier



Rys. 9.1. Woskozymetr Höpplera

Ponieważ jednak w dyskutowanym wiskozymetrze kulka nie opada swobodnie, a jej ruch jest bardziej złożony, to wzór (9.1) nie może być słuszny. Jest tak dlatego, że średnica kulki porównywalna jest do średnicy rurki, w której się ona porusza. Oprócz oddziaływania ścianek ze względu na porównywalne średnice, mamy do czynienia ze złożonym ruchem kulki, na który składa się między innymi ślizganie i toczenie po ściance. Zjawiska te nie zostały uwzględnione we wzorze Stokesa, a więc i we wzorze (9.1). Średnica kulki D_k, która jest porównywalna do średnicy rurki, oraz pochylenie rurki, zapewniają dłuższy czas opadania kulki t, co jest korzystne z punktu widzenia precyzji pomiaru.

Współczynnik lepkości μ badanej cieczy jest nieznaną funkcją F, która zależy od następujących zmiennych

$$F(\mu, t, \rho_k, \rho, D, D_k, \alpha, g, H) = 0. \tag{9.2}$$

W zależności powyższej przez α oznaczono kąt nachylenia wiskozymetru. Na podstawie analizy wymiarowej można pokazać (paragraf 1.5.2.2), że nieznana funkcja F (9.2), która zależy od ośmiu zmiennych wymiarowych i jednej bezwymiarowej, może być zapisana jako inna funkcja uwikłana f, która zależy od sześciu zmiennych bezwymiarowych

$$f\left(\frac{\mu t}{\rho D_k^2}, \frac{\rho_k}{\rho}, \frac{D}{D_k}, \frac{H}{D_k}, \frac{g t^2}{D_k}, \alpha\right) = 0. \tag{9.3}$$

Postać funkcji f jest nieznana i może być wyznaczana np. na drodze eksperymentalnej. Można zaproponować pewne proste postaci funkcji f, jeżeli zauważymy, że pewne wielkości zależą wyłącznie od budowy wiskozymetru i nie mają wpływu na współczynnik lepkości badanej cieczy. Do takich bezwymiarowych wielkości należą $\frac{D}{D_k}$, $\frac{H}{D_k}$, α. Ponadto można zauważyć, że są to wielkości związane wyłącznie z geometrią wiskozymetru. Mając powyższe na uwadze, można zaproponować następującą zależność, która jest szczególną postacią funkcji uwikłanej f (9.3)

$$\frac{\mu t}{\rho D_k^2} = \varphi\left(\alpha, \frac{D}{D_k}, \frac{H}{D_k}\right)\psi\left(\frac{\rho_k}{\rho}, \frac{gt^2}{D_k}\right). \tag{9.4}$$

Postać (9.4) składa się z iloczynu dwóch funkcji. Pierwsza z nich φ zależy wyłącznie od zmiennych związanych z geometrią wiskozymetru i jest dla danego urządzenia stała. Druga z nich ψ zawiera między innymi zmienne zależne od badanej cieczy. Zależność w postaci (9.4) jest nadal bardzo ogólna, ale przyjmując, że φ jest stałe, można poszukiwać zależności empirycznych dla pozostałych trzech zmiennych bezwymiarowych. Można również zaproponować jawną postać funkcji ψ. W najprostszym przypadku może ona wyglądać następująco

$$\psi := \left(\frac{\rho_k}{\rho} - 1\right)\frac{gt^2}{D_k}. \tag{9.5}$$

Nawias w definicji (9.5) jest o tyle sensowny, że zeruje się w przypadku, gdy gęstość kulki ρ_k równa jest gęstości badanej cieczy ρ.

Przyjmując następującą definicję stałej E wiskozymetru Höpplera

$$E := \varphi\left(\alpha, \frac{D}{D_k}, \frac{H}{D_k}\right) D_k\, g \tag{9.6}$$

i podstawiając (9.5) do (9.4), otrzymamy po przekształceniach

$$\mu = E\, t\left(\rho_k - \rho\right). \tag{9.7}$$

Stała E, podobnie jak φ, jest stała dla konkretnego wiskozymetru i nie zależy ona od lepkości i gęstości badanej cieczy. Może ona być wyznaczona poprzez kalibrację wiskozymetru. Kalibracja polega na badaniu cieczy o znanej lepkości. Zwykle stała E jest podawana przez producenta dla konkretnej kulki. W przypadku, gdyby wiskozymetr był ustawiony pionowo i średnica kulki byłaby dużo mniejsza niż średnica rurki, to słuszny byłby wzór (9.1), a wartość stałej E wyniosłaby $E := 18^{-1}D_k^2 gH^{-1}$, co oznacza, że funkcja φ miałaby postać $\varphi := (18H/D_k)^{-1}$. Jednostka stałej E wynosi $[E] = \mathrm{m^2 s^{-2}}$.

9.2.3. Przebieg eksperymentu

Eksperyment zaczyna się od napełnienia rurki (7) (rys. 9.1) badanym olejem. Do rurki wprowadza się odpowiednią kulkę i rurkę zatyka się ją korkiem. Kulka dobierana jest w zależności od lepkości oleju. Do dyspozycji są kulki szklane i stalowe o różnych średnicach. Kryterium doboru stanowi czas opadania, który powinien być wystarczająco długi, aby osiągnąć zamierzoną precyzję pomiaru. Dla danej temperatury płaszcza wodnego, a więc i badanego oleju, mierzy się czas opadania kulki między znacznikami a i b (rys. 9.1), a wyniki zapisuje się w tabeli 9.3.

9.3. Opracowanie wyników

9.3.1. Wyznaczanie gęstości w zależności od temperatury

Gęstość kulki ρ_k w stałej temperaturze T_{0k} wyznaczamy ze wzoru $\rho_k = m_k|V_k|^{-1}$. Jeżeli mamy do czynienia ze zmianami temperatury, należy uwzględnić rozszerzalność cieplną materiału kulki. Zmiany objętości, wywołane zmianą temperatury, określane są zależnością $|V_k(T)| = |V_k|(1 + \beta_k \Delta T)$, gdzie β_k jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej materiału kulki (tabela 9.5), a ΔT przyrostem temperatury $\Delta T = T_{0k} + T$. Temperatura $T_{0k} = 293$ K. W ten sposób gęstość kulki, która zależy od temperatury, dana jest wzorem

$$\rho_k = \frac{6m_k}{\pi D_k^3 (1 + \beta_k \Delta T)}. \tag{9.8}$$

Błąd bezwzględny pojedynczego pomiaru obliczamy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_{\rho_k} \approx \mathrm{d}\rho_k(m_k, D_k, \Delta T)$. Wynika stąd, że

$$\Delta_{\rho_k} = \left|\frac{\partial \rho_k}{\partial m_k}\Delta_{m_k}\right| + \left|\frac{\partial \rho_k}{\partial D_k}\Delta_{D_k}\right| + \left|\frac{\partial \rho_k}{\partial \Delta T}\Delta_{\Delta T}\right|. \tag{9.9}$$

Dzieląc wzór (9.9) obustronnie przez gęstość (9.8) i wykorzystując zależności na błędy względne $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, otrzymujemy wzór na błąd względny gęstości kulki

$$\delta_{\rho_k} = \delta_{m_k} + 3\delta_{D_k} + \frac{\beta_k \Delta T}{1 + \beta_k \Delta T}\delta_{\Delta T}. \tag{9.10}$$

Błąd bezwzględny pomiaru różnicy temperatur szacujemy jako $\Delta_{\Delta T} = 2\Delta_T$. Z powyższego wzoru można wyliczać błąd bezwzględny $\Delta_{\rho_k} = \rho_k \delta_{\rho_k}$.

Gęstość badanej cieczy (gliceryny) można wyznaczać z poniższej zależności empirycznej

$$\rho(T) = 1404.88 - 0.6157\,T \quad \mathrm{kg\,m^{-3}} \tag{9.11}$$

z błędem względnym nie większym niż $\delta_\rho = 1\%$. We wzorze powyższym temperatura gliceryny T podawana jest w skali Kelvina.[2] Gęstości wraz z błędami bezwzględnymi i względnymi zapisujemy w tabeli 9.1.

9.3.2. Wyznaczanie zależności współczynnika lepkości od temperatury

Lepkość w danej temperaturze wyznaczamy ze wzoru (9.7), gdzie stała E wiskozymetru podana jest w tabeli 9.5. Błąd bezwzględny pojedynczego pomiaru lepkości znajdujemy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_\mu \approx \mathrm{d}\mu(E, t, \rho_k, \rho)$. Można zapisać, że

$$\Delta_\mu = \left|\frac{\partial \mu}{\partial E}\Delta_E\right| + \left|\frac{\partial \mu}{\partial t}\Delta_t\right| + \left|\frac{\partial \mu}{\partial \rho_k}\Delta_{\rho_k}\right| + \left|\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Delta_\rho\right|. \tag{9.12}$$

[2] William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907) – brytyjski fizyk i matematyk

Tabela 9.1. Pomiary i obliczenia

Nr	1	2	...	n
t [s]				
T [K]				
ρ [kg m^{-3}]				
Δ_ρ [kg m^{-3}]				
δ_ρ [%]	1			
ρ_k [kg m^{-3}]				
Δ_{ρ_k} [kg m^{-3}]				
δ_{ρ_k} [%]				
μ [kg m^{-1}s^{-1}]				
Δ_μ [kg m^{-1}s^{-1}]				
δ_μ [%]				

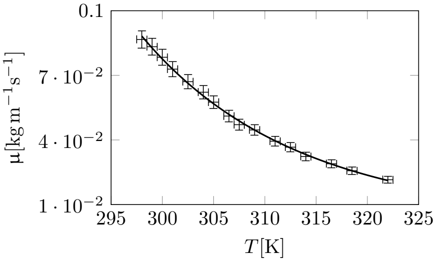
Tabela 9.2. Regresja liniowa

r	
A	
Δ_A	
δ_A [%]	
B	
Δ_B	
δ_B [%]	

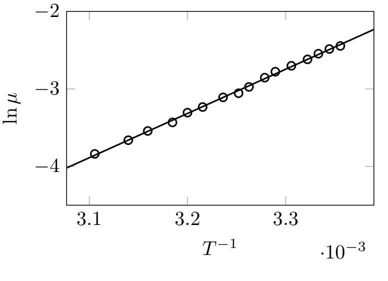
Błędy bezwzględne pomiaru lepkości określone zostały wcześniej. Błąd bezwzględny pomiaru czasu Δ_t podaje tabela 9.4, błąd stałej wiskozymetru Δ_E znajdujemy w tabeli 9.5. Dzieląc obustronnie zależność (9.12) przez współczynnik lepkości (9.7), znajdujemy błąd względny pomiaru lepkości w postaci

$$\delta_\mu = \delta_E + \delta_t + \frac{\delta_{\rho_k}}{1 - \frac{\rho}{\rho_k}} + \frac{\delta_\rho}{\frac{\rho_k}{\rho} - 1}. \tag{9.13}$$

Błędy ze wzorów (9.12) i (9.13) zapisujemy w tabeli 9.1.



Rys. 9.2. Wykres zależności lepkości od temperatury dla gliceryny 86% we współrzędnych T, μ



Rys. 9.3. Wykres zależności lepkości od temperatury dla gliceryny 86% we współrzędnych $\frac{1}{T}$, $\ln\mu$

Pomiar lepkości w zależności od temperatury dla n punktów umożliwia określenie zależności lepkości od temperatury. Poszukiwana zależność może mieć następujący, wykładniczy charakter

$$\frac{\mu}{\mu_0} = e^{\frac{T_0}{T}}, \tag{9.14}$$

gdzie stałe μ_0 i T_0 wyznacza się eksperymentalnie. Mają one odpowiednio jednostki współczynnika lepkości i temperatury, choć krzywa (9.14) nie przechodzi przez punkt (T_0, μ_0). Zależność (9.14) jest o tyle wygodna, że można ją, poprzez odpowiednie podstawienia, sprowadzić do postaci liniowej. Obustronne logarytmowanie (9.14) daje

$$\ln \mu = \ln \mu_0 + T_0 \frac{1}{T}. \tag{9.15}$$

Podstawiając $y := \ln \mu$, $A := \ln \mu_0$, $B := T_0$, $x := \frac{1}{T}$, otrzymujemy zależność liniową $y = A+Bx$. Współczynniki A i B wyznaczamy z regresji liniowej (paragraf 1.4). Błędy bezwzględne Δ_A, Δ_B i względne $\delta_A = \frac{\Delta_A}{A}$, $\delta_B = \frac{\Delta_B}{B}$ określenia współczynników A i B znajdujemy ze wzorów (1.51) dla $p = 0.95$. Wyniki zapisujemy w tabeli 9.2 wraz ze współczynnikiem korelacji r ze wzoru (1.45). Na podstawie znajomości A i B jesteśmy w stanie wyznaczyć stałe $T_0 = B$ i $\mu_0 = e^A$. Umożliwia to wykreślenie zależności (9.14) we współrzędnych T, μ (wykres 9.2) i zależności liniowej $\ln \mu = A + B\frac{1}{T}$ we współrzędnych $\frac{1}{T}, \ln \mu$ (wykres 9.3).

9.3.3. Przypadek kalibracji wiskozymetru

Kalibracja polega na wyznaczeniu stałej E ze wzoru (9.7), kiedy mamy do czynienia z płynem o znanej lepkości

$$E = \frac{\mu}{\bar{t}\,(\rho_k - \rho)}. \tag{9.16}$$

Przeprowadza się serię n pomiarów czasu opadania kulki t_i w stałej temperaturze. Do wzoru (9.16) wstawia się średni czas, gdzie średnia rozumiana jest tu w sensie arytmetycznym $\bar{t} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} t_i$. Błąd bezwzględny pomiaru czasu wyliczamy z zależności $\Delta_t = \sigma_t n^{-\frac{1}{2}} \mathrm{t}(p, n)$, gdzie σ_t jest odchyleniem standardowym $\sigma_t^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2$, a $\mathrm{t}(p, n)$ oznacza kwantyl rzędu p ($p = 0.95$) przy n stopniach swobody (pomiarach) do odczytania z tabeli 1.2. Błąd bezwzględny kalibracji stałej E znajdujemy metodą różniczki zupełnej $\Delta_E \approx \mathrm{d}E(\mu, t, \rho_k, \rho)$. Metoda postępowania jest analogiczna do tej, która rozważana była w przypadku określenia błędów pomiaru współczynnika lepkości (wzór (9.12) i (9.13)). Dla błędu względnego kalibracji wiskozymetru mamy

$$\delta_E = \delta_\mu + \delta_t + \frac{\delta_{\rho_k}}{1 - \frac{\rho}{\rho_k}} + \frac{\delta_\rho}{\frac{\rho_k}{\rho} - 1}. \tag{9.17}$$

Błąd względny δ_μ uwzględniamy w przypadku, gdy znany on jest wraz z lepkością płynu używanego do kalibracji.

Należy podkreślić, że dla danego wiskozymetru każda kulka wymaga osobnej kalibracji. Opisana wyżej metoda została wykorzystana do określenia stałej E z tabeli 9.5.

9.3.4. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać numer grupy laboratoryjnej, rok i kierunek studiów, datę i nazwę przeprowadzenia ćwiczenia. Dalej powinien być podany cel ćwiczenia, schemat stanowiska pomiarowego, tabele pomiarów i obliczeń, przykład obliczeniowy, wykres zależności lepkości od temperatury ze słupkami błędów w układzie T, μ oraz $\frac{1}{T}, \ln \mu$, wnioski.

9.4. Pytania kontrolne

i. Od jakich zmiennych zależy współczynnik lepkości w wiskozymetrze Höpplera?

ii. Jak można wyznaczyć wartość stałej wiskozymetru Höpplera?

iii. Dlaczego nie można stosować wzoru Stokesa w celu wyliczania lepkości w wiskozymetrze Höpplera?

Oznaczenia

A, B	współczynniki regresji liniowej
D	średnica
E	stała wiskozymetru Höpplera
f, F	funkcja
g	przyspieszenie ziemskie
H	wysokość
m	masa
n	liczba pomiarów
p	przedział ufności
r	współczynnik korelacji
t	czas
T	temperatura
$\|V\|$	objętość
x	wielkość, zmienna
α	kąt nachylenia wiskozymetru
β	współczynnik rozszerzalności objętościowej
δ	błąd względny
Δ	błąd bezwzględny
ΔT	przyrost temperatury
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
ρ	gęstość
φ, ψ	funkcja

Bibliografia

[1] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Dodatek – tabele pomiarowe

Tabele pomiarowe z dnia:

Tabela 9.3. Pomiary

Nr	t [s]	T [K]
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Tabela 9.4. Błędy bezwzględne

Δ_t [s]	
Δ_T [K]	

Tabela 9.5. Dane dla kulki w temperaturze $T_{0k} = 293$ K

D_k [mm]	15.15 ± 0.01
m_k [g]	4.3832 ± 0.0002
β_k [K^{-1}]	$9.9 \cdot 10^{-6}$
E [m^{2}s^{-2}]	$(1.30 \pm 0.03) \cdot 10^{-6}$

Rozdział 10

Wiskozymetr Englera

Krzysztof Tesch

10.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie zależności współczynnika lepkości badanej cieczy w funkcji temperatury za pomocą wiskozymetru Englera.

10.2. Doświadczenie

10.2.1. Budowa i zasada działania wiskozymetru Englera

Wiskozymetr Engleqra[1)] jest urządzeniem zaliczanym do klasy wiskozymetrów kapilarnych. Schemat wiskozymetru pokazany jest na rysunku 10.1. Obudowa (9) jest zarazem płaszczem wodnym, który służy do utrzymywania badanej cieczy (3) w określonej temperaturze za pomocą grzałki. Temperatura wody w płaszczu mierzona jest termometrem (7), a temperatura badanej cieczy – termometrem (2). Mieszadło (1) służy do wyrównywania temperatury płaszcza wodnego. Zatyczka (8) blokuje i otwiera kapilarę (10), przez którą badana ciecz wypływa do zlewki pomiarowej (4). Do poziomowania urządzenia służą regulowane nóżki (5). Wiskozymetr zamykany jest od góry przykrywką (6).

Zasada działania urządzenia polega na pomiarze czasu wypływu pewnej objętości badanej cieczy przez skalibrowany otwór. Do uproszczonego wyjaśnienie istoty metody można posłużyć się równaniem Bernoulliego. Przyjmując za punkt odniesienia dno obudowy (dolną krawędź kapilary), można napisać równanie Bernouliego dla górnego poziomu kapilary na wysokości h_1 i lustra badanej cieczy na wysokości h_2 w postaci $\rho g(h_2 - h_1) = p_1 - p_0$, gdyż ciśnienie p_2 równe jest ciśnieniu atmosferycznemu $p_2 = p_0$. W równaniu powyższym zaniedbano prędkości lustra badanej cieczy i jej prędkości na wysokości h_1. Wykorzystując dalej prawo Poiseuille'a (3.3), gdzie $\Delta p = p_1 - p_0$,

[1)] Carl Oswald Viktor Engler (1842-1925) – niemiecki chemik można współczynnik lepkości dynamicznej μ wyrazić w następujący sposób

$$\mu = \frac{\pi D^4}{128|V|}\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right)\rho\, t. \tag{10.1}$$

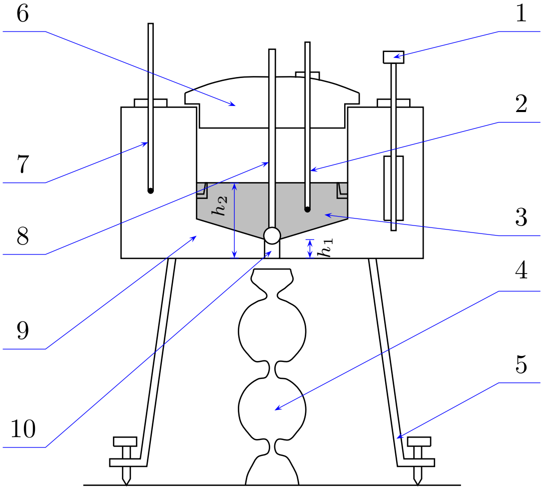
Założono, że objętościowe natężenie przepływu zmienia się niewiele i słuszna jest zależność $|V| = \dot{V}\, t$. Przez D oznaczono średnicę kapilary. Wprowadzając następującą definicję stałej E wiskozymetru Englera

$$E := \frac{\pi D^4}{128|V|}\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right), \tag{10.2}$$

można zależność (10.1) zapisać jako

$$\mu = E\rho\, t. \tag{10.3}$$

Stała E, według definicji (10.2), zależy od budowy wiskozymetru i nie zależy (w uproszczeniu) od badanej cieczy.



Rys. 10.1. Wiskozymetr Englera

Należy zdawać sobie sprawę z uproszczeń, które równanie Bernoulliego wprowadza. Przede wszystkim zakłada się, że płyn jest nielepki. Dodatkowo prędkość na wysokości h_1 nie jest zerowa, a przepływ w kapilarze nie jest rozwiniętym przepływem parabolicznym. Kolejnym uproszczeniem jest to, że lustro badanej cieczy nie znajduje się w tym samym położeniu, a więc wysokość h_2 zmienia się z czasem. Związane jest to również z tym, że objętościowe natężenie przepływu $\dot{V}$ nie jest stałe.

Jeżeli przyjmiemy, że równanie (10.3) jest słuszne i stała E nie zależy od badanej cieczy, to możemy napisać podobne równanie dla cieczy referencyjnej (np. wody) w postaci $\mu_r = E\rho_r t_r$. Z powyższego równania i (10.3), ze względu na równość E, otrzymamy następującą proporcję

$$\frac{\mu}{\mu_r} = \frac{\rho}{\rho_r}\frac{t}{t_r}. \tag{10.4}$$

Wykorzystując zależność między współczynnikiem lepkości dynamicznej μ i kinematycznej μ w postaci $\mu = \rho\,\nu$, możemy proporcję (10.4) zapisać jako

$$\frac{\nu}{\nu_r} = \frac{t}{t_r} =: \epsilon, \tag{10.5}$$

co tłumaczy istotę działania wiskozymetru Englera. Stosunek współczynników lepkości kinematycznej cieczy referencyjnej i badanej ma się tak, jak stosunek czasu wypływu obu cieczy. Stosunek czasów ϵ jest wielkością bezwymiarową i ma postać bezwymiarowego czasu, który czasami nazywany jest stopniami Englera ($^\circ$ E).

10.2.2. Przebieg doświadczenia

Zatykamy zatyczką (8) otwór pomiarowy (10) (rys. 10.1) i wlewamy badaną ciecz do zbiornika pomiarowego (3) wiskozymetru, aż lustro swobodne pokryje się ze znacznikami na obudowie. Urządzenie poziomujemy za pomocą pokręteł na nóżkach (5). Zamykamy obudowę (6) i wkładamy termometry (7) i (2). Pod urządzenie podkładamy naczynie pomiarowe (4). Płaszcz wodny podgrzewamy do takiej temperatury, aby uzyskać pożądany poziom temperatura badanej cieczy. Do wyrównania temperatury można posłużyć się mieszadłem (1). Podnosimy zatyczkę (8), jednocześnie włączając stoper. Stoper wyłączamy, gdy w naczyniu pomiarowym znajdzie się 200 ml badanej cieczy, jednocześnie zatykając zatyczkę (8). Następnie ważymy naczynie (4) wraz z badaną cieczą. Wyniki pomiarów czasu, temperatury badanej cieczy i łącznej masy cieczy i naczynia zapisujemy w tabeli 10.4. W tabeli 10.6 zapisujemy wagę pustego i suchego naczynia przez dokonaniem pomiarów.

Jeżeli wyliczamy współczynniki lepkości dla danej temperatury, to doświadczenie powtarzamy kilka razy. Jeżeli badamy zależność współczynników od temperatury, to za pomocą grzałki zmieniamy temperaturę (lub czekamy, aż ciecz ostygnie) i powtarzamy pomiary określoną liczbę razy. Przed badaniem właściwej cieczy należy kilkakrotnie przeprowadzić badanie czasu dla wody destylowanej w temperaturze 293 K i wyniki zapisać w tabeli 10.7. Pomiary te mają charakter referencyjny. Czas wypływu 200 ml wody destylowanej wynosi około 50 s.

10.3. Opracowanie wyników

10.3.1. Czas referencyjny i bezwymiarowy

Celem ustalenia czasu referencyjnego przeprowadza się n pomiarów czasu t_i (tab. 10.7) opróżniania wiskozymetru w stałej temperaturze 293 K. Średni czas referencyjny rozumiany jest jako średnia arytmetycznym

$$\bar{t}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i. \tag{10.6}$$

Błąd bezwzględny pomiaru czasu referencyjnego wyliczamy z zależności

$$\Delta_{t_r} = \frac{\sigma_{t_r}}{\sqrt{n}}\mathrm{t}(p,n), \tag{10.7}$$

gdzie σ_{t_r} jest odchyleniem standardowym

$$\sigma_{t_r}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}_r)^2, \tag{10.8}$$

a $\mathrm{t}(p,n)$ oznacza kwantyl rzędu p ($p = 0.95$) przy n stopniach swobody (pomiarach) do odczytania z tabeli 1.2. Ostatecznie błąd bezwzględny pomiaru czasu referencyjnego można zapisać jako

$$\Delta_{t_r} = \frac{\mathrm{t}(p,n)}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}_r)^2}. \tag{10.9}$$

Dla błędu względnego pomiaru czasu referencyjnego mamy następującą zależność

$$\delta_{t_r} = \frac{\Delta_{t_r}}{t_r}. \tag{10.10}$$

Obliczone wartości $\bar{t}_r$, Δ_{t_r}, δ_{t_r} zapisujemy w tabeli 10.3.

Tabela 10.1. Pomiary i obliczenia

Nr	1	2	...	n
t [s]				
T [K]				
ϵ				
Δ_ϵ				
δ_ϵ [%]				
ρ [kg m^{-3}]				
Δ_ρ [kg m^{-3}]				
δ_ρ [%]				
μ [kg m^{-1}s^{-1}]				
Δ_μ [kg m^{-1}s^{-1}]				
δ_μ [%]				

Tabela 10.2. Regresja liniowa

r	
A	
Δ_A	
δ_A [%]	
B	
Δ_B	
δ_B [%]	

Tabela 10.3. Czas referencyjny

$\bar{t}_r$ [s]	
Δ_{t_r} [s]	
δ_{t_r} [%]	

Bezwymiarowy czas ϵ definiuje zależność (10.5), gdzie w mianowniku posługujemy się średnim czasem referencyjnym

$$\epsilon = \frac{t}{\bar{t}_r}. \tag{10.11}$$

Błąd bezwzględny obliczamy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_\epsilon \approx \mathrm{d}\epsilon(t, \bar{t}_r)$

$$\Delta_\epsilon = \left|\frac{\partial\epsilon}{\partial t}\Delta_t\right| + \left|\frac{\partial\epsilon}{\partial t_r}\Delta_{t_r}\right|. \tag{10.12}$$

Obliczają pochodne i dzieląc obustronnie powyższą zależność przez ϵ można zapisać, że błąd względny bezwymiarowego czasu wyraża się wzorem

$$\delta_\epsilon = \delta_t + \delta_{t_r}. \tag{10.13}$$

Błąd względny $\delta_t = \frac{\Delta_t}{t}$ wyznaczamy na postawie błędów bezwzględnych Δ_t z tabeli 10.5 i pomiarów t z tabeli 10.4. Błąd względny δ_{t_r} dany jest równaniem (10.10) i zapisany jest w tabeli 10.3. Obliczone wartości ϵ, Δ_ϵ i δ_ϵ zapisujemy w tabeli 10.1.

10.3.2. Wyznaczanie gęstości cieczy

10.3.2.1. Pojedyncze pomiary w różnych temperaturach

Gęstość ρ badanej cieczy równa się masie całkowitej m_c (cieczy i naczynia) pomniejszonej o masę naczynia m_n i odniesioną do objętości naczynia $|V_n|$, co zapisujemy jako

$$\rho = \frac{m_c - m_n}{|V_n|}. \tag{10.14}$$

Objętość i masę naczynia znajdujemy w tabeli 10.6, całkowitą masę w danej temperaturze w tabeli 10.4. Błąd bezwzględny wyznaczania gęstości znajdujemy metodą różniczki zupełnej $\Delta_\rho \approx \mathrm{d}\rho(m_c, m_n, |V_n|)$, co daje

$$\Delta_\rho = \left|\frac{\partial \rho}{\partial m_c}\Delta_{m_c}\right| + \left|\frac{\partial \rho}{\partial m_n}\Delta_{m_n}\right| + \left|\frac{\partial \rho}{\partial |V_n|}\Delta_{|V_n|}\right|. \tag{10.15}$$

Odpowiednie błędy bezwzględne $\Delta_{m_c} = \Delta_{m_n} = \Delta_m$ znajdujemy w tabeli 10.5, natomiast błąd $\Delta_{|V_n|}$ w tabeli 10.6. Dzieląc obustronnie powyższe równanie przez gęstość według zależności (10.14), mamy błąd względny wyznaczania lepkości

$$\delta_\rho = \frac{\delta_{m_c}}{1 - \frac{m_n}{m_c}} + \frac{\delta_{m_n}}{\frac{m_c}{m_n} - 1} + \delta_{|V_n|}, \tag{10.16}$$

gdzie błędy względne definiowane są jako $\delta_{m_c} = \Delta_{m_c}\, m_c^{-1}$, $\delta_{m_n} = \Delta_{m_n}\, m_n^{-1}$ i $\delta_{|V_n|} = \Delta_{|V_n|}\, |V_n|^{-1}$. Błąd bezwzględny gęstości znajdujemy z zależności $\Delta_\rho = \rho\, \delta_\rho$. Obliczone wartości ρ, δ_ρ i Δ_ρ zapisujemy w tabeli 10.1.

10.3.2.2. Wielokrotne pomiary w tej samej temperaturze

W przypadku powtarzania pomiarów średnią wartość masy całkowitego naczynia wyliczamy analogicznym wzorem do (10.6)

$$\overline{m}_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{c,i}, \tag{10.17}$$

gdzie $m_{c,i}$ odczytujemy z tabeli 10.4. Gęstość wyliczamy ze wzoru (10.14), gdzie w miejsce m_c wstawiamy $\overline{m}_c$ ze wzoru (10.17).

W przypadku gdy błąd bezwzględny wagi jest duży, przyjmujemy $\Delta_{m_c} = \Delta_m$, a błąd względny oblicza się jako $\delta_{m_c} = \frac{\Delta_m}{\overline{m}_c}$. Błąd względny wyznaczania gęstości znajdujemy ze wzoru (10.16), a błąd bezwzględny jako $\Delta_\rho = \rho\, \delta_\rho$. W przypadku gdy waga jest dokładna i błędy systematyczne nie dominują nad przypadkowymi, można posłużyć się metodami statystycznymi. W takim przypadku korzystamy ze wzoru analogicznego do (10.9) i otrzymujemy

$$\Delta_{m_c} = \frac{\mathrm{t}(p,n)}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(m_{c,i} - \overline{m}_c)^2}. \tag{10.18}$$

Błąd względny pomiaru masy całkowitej podaje wzór $\delta_{m_c} = \frac{\Delta_{m_c}}{\overline{m}_c}$, gdzie błąd Δ_{m_c} wyznaczany jest ze wzoru (10.18). Mając w ten sposób wyliczony błąd względny δ_{m_c}, obliczamy błąd względny wyznaczania gęstości ze wzoru (10.16).

10.3.3. Wyznaczanie współczynników lepkości

10.3.3.1. Pomiary w danej temperaturze

Wartość współczynnika lepkości dynamicznej μ, lub kinematycznej ν, przy znajomości czasu bezwymiarowego ϵ, wyznaczamy na podstawie [2]. Można również korzystać z następującej aproksymacji [1]

$$\mu = \rho\left(7.319\,\epsilon - \frac{6.31}{\epsilon}\right)10^{-6} \quad \mathrm{m^2s^{-1}}, \tag{10.19}$$

gdzie gęstość ρ badanej cieczy podawana jest w [kg m^{-3}]. Wzór (10.19) słuszny jest dla jednokrotnego pomiaru w danej temperaturze, gdzie od temperatury zależy gęstość ρ i bezwymiarowy czas ϵ. W przypadku gdy mamy do czynienia z wielokrotnym pomiarem lepkości w tej samej temperaturze, do wzoru (10.19) wstawiamy gęstość ρ liczoną ze wzorów (10.14) i (10.17).

Błąd bezwzględny wyznaczania współczynnika lepkości znajdujemy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_\mu \approx \mathrm{d}\mu(\rho,\epsilon)$, co daje

$$\Delta_\mu = \left|\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Delta_\rho\right| + \left|\frac{\partial\mu}{\partial\epsilon}\Delta_\epsilon\right|. \tag{10.20}$$

Dzieląc obustronnie powyższe równanie przez μ według wzoru (10.19), mamy błąd względny wyznaczania współczynnika lepkości

$$\delta_\mu = \delta_\rho + \frac{7.319\,\epsilon + \frac{6.31}{\epsilon}}{7.319\,\epsilon - \frac{6.31}{\epsilon}}\delta_\epsilon. \tag{10.21}$$

Wzór powyższy nie uwzględnia błędu aproksymacji funkcji (10.19). W przypadku pojedynczego pomiaru korzystamy ze wzoru (10.16) i $\delta_{m_c} = \Delta_{m_c}\, m_c^{-1}$, dla wielokrotnych pomiarów ze wzorów (10.16), $\delta_{m_c} = \Delta_m\, \overline{m}_c^{-1}$ i (10.17). Obliczone wartości μ, δ_μ i $\Delta_\mu = \mu\,\delta_\mu$ zapisujemy w tabeli 10.1.

10.3.3.2. Zależność współczynnika lepkości od temperatury

Pomiar współczynnika lepkości w zależności od temperatury dla n punktów pozwala na wykreślenie zależności μ od T. Można posłużyć się zależnością wykładniczą (9.14)

$$\frac{\mu}{\mu_0} = e^{\frac{T_0}{T}}, \tag{10.22}$$

gdzie stałe μ_0 i T_0 wyznaczone zostaną za pomocą regresji liniowej. Obustronne logarytmowanie (10.22) daje

$$\ln\mu = \ln\mu_0 + T_0\frac{1}{T}. \tag{10.23}$$

Wykorzystując następujące podstawienia $y := \ln\mu$, $A := \ln\mu_0$, $B := T_0$, $x := \frac{1}{T}$, otrzymujemy zależność liniową $y = A + Bx$. Współczynniki A i B wyznaczamy z regresji liniowej (dodatek 1.4). Błędy bezwzględne Δ_A, Δ_B i względne $\delta_A = \frac{\Delta_A}{A}$, $\delta_B = \frac{\Delta_B}{B}$ określenia współczynników A i B znajdujemy ze wzorów (1.51) dla $p = 0.95$. Wyniki zapisujemy w tabeli 10.2 wraz ze współczynnikiem korelacji r ze wzoru (1.45). Wyliczone współczynniki A i B pozwalają wyznaczyć stałe $T_0 = B$ i $\mu_0 = e^A$. Umożliwia to wykreślenie zależności (10.22) we współrzędnych T, μ i zależności liniowej $\ln\mu = A + B\frac{1}{T}$ we współrzędnych $\frac{1}{T}, \ln\mu$.

10.3.4. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać numer grupy laboratoryjnej, rok i kierunek studiów, datę i nazwę przeprowadzenia ćwiczenia. Dalej powinien być podany cel ćwiczenia, schemat stanowiska pomiarowego, tabele pomiarów i obliczeń, przykład obliczeniowy, wykres zależności lepkości od temperatury ze słupkami błędów w układzie T, μ oraz $\frac{1}{T}, \ln\mu$, wnioski.

10.4. Pytania kontrolne

i. Na czym polega istota metody pomiaru lepkości za pomocą wiskozymetru Englera?

ii. Jakie uproszczenia należy poczynić, aby wyjaśnić zasadę działania wiskozymetru Englera za pomocą równania Bernoulliego?

Oznaczenia

A, B	współczynniki regresji liniowej
D	średnica
E	stała wiskozymetru Englera
h	wysokość
m	masa
n	liczba pomiarów
p	ciśnienie, przedział ufności
r	współczynnik korelacji
t	czas
t	kwantyle rozkładu Studenta
T	temperatura
$\lvert V\rvert$	objętość

$\dot{V}$	objętościowe natężenie przepływu
δ	błąd względny
Δ	błąd bezwzględny
ϵ	bezwymiarowy czas (stopnie Englera)
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
ν	współczynnik lepkości kinematycznej
ρ	gęstość
σ	odchylenie standardowe

Bibliografia

[1] L. Kołodziejczyk, M. Rubik, S. Mańkowski, *Pomiary w Inżynierii Sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1974

[2] PN-77/C-04014

[3] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Dodatek – tabele pomiarowe

Tabele pomiarowe z dnia:

Tabela 10.4. Pomiary dla cieczy

Nr	t [s]	T [K]	m_c [g]
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

Tabela 10.5. Błędy bezwzględne

Δ_t [s]	
Δ_T [K]	
Δ_m [g]	

Tabela 10.6. Naczynie pomiarowwe

m_n [g]	
$\|V_n\|$ [ml]	200 ± 2

Tabela 10.7. Pomiary t_r dla wody przy 293 K

i	t_i [s]
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Rozdział 11

Analogia hydrogazodynamiczna

Krzysztof Tesch

11.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest prezentacja zjawisk zachodzących w przepływie płytkiej wody, które są analogiczne do zjawisk gazodynamicznych. Na podstawie elementarnej jednowymiarowej teorii dyskutowane są analogiczne wielkości w obu zjawiskach. Na stanowisku z płytką wodą weryfikowany jest eksperymentalnie teoretyczny wzór na prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń.

11.2. Wprowadzenie

11.2.1. Wstęp

Równania, które opisują propagację zaburzeń zarówno w gazie jak i równania opisujące rozprzestrzenianie się zaburzeń na powierzchni płytkiej wody mają identyczną postać [1, 2, 3]. Podobnie jest z warunkami brzegowymi i początkowymi, które są niezbędne do rozwiązywania tych równań. Wynikiem tego jest tzw. analogia hydrogazodynamiczna, która pozwala przenosić obserwacje i wnioski z jednego zjawiska na drugie, o ile ustalone zostaną odpowiedniki pomiędzy poszczególnymi wielkościami w obu zjawiskach. Można również w łatwiejszy sposób przeprowadzać eksperymenty na płytkiej wodzie, niż przy przepływach gazu. Umożliwia to między innymi łatwą wizualizację i obserwację takich zjawisk jak fala uderzeniowa, która w przypadku płytkiej wody ma postać odskoku hydraulicznego.

11.2.2. Analogie

Elementarna teoria rozprzestrzeniania się zaburzeń wymaga znajomości warunków zgodności na powierzchni S, gdzie formuje się zaburzenie. Warunki zgodności wynikają z zapisu równań zachowania za pomocą twierdzenie Reynoldsa o transporcie [3].

Warunek zgodności dla równania zachowania masy ma postać

$$\iint\limits_S \hat{n} \cdot \left[\rho \vec{U}\right] \,\mathrm{d}S = 0, \tag{11.1}$$

gdzie symbol $[f]$ oznacza $[f] := f_1 - f_2$. Indeksy 1 i 2 odnoszą się do poszczególnych stron powierzchni S. Warunek (11.1) mówi o tym, że strumień masy przez powierzchnię S pozostaje niezmienny.

Dla równania zachowania pędu warunek zgodności zapisujemy w następującej postaci

$$\iint\limits_S \hat{n} \cdot \left[\rho \vec{U}\vec{U} - \boldsymbol{\sigma}\right] \,\mathrm{d}S = \vec{0}. \tag{11.2}$$

Warunek (11.2) mówi, że różnica pomiędzy strumieniem pędu $\rho\vec{U}\vec{U} \cdot \hat{n}$ i wektorem naprężenia $\hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ przez powierzchnię S nie zmienia się. Zarówno w przypadku gazodynamiki i zagadnienia płytkiej wody zakłada się, że mamy do czynienia z płynem nielepkim $\mu = 0$. Tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ dla płynu nielepkiego ma postać $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta}$, co znacznie upraszcza rozważania.

11.2.2.1. Gazodynamika

W przypadku propagacji małych zaburzeń w gazie mamy do czynienia z niewielkimi zmianami ciśnienia i gęstości. Zaburzenia te w nieruchomym gazie rozprzestrzeniają się z prędkością dźwięku a. Ponieważ zaburzenia są małe, więc przy przejściu przez powierzchnię S zmieniają się w sposób ciągły i różnią się niewielkimi przyrostami tak, jak na rysunku 11.1.

$$\begin{array}{cc|cc}
\rightarrow & a & a + \mathrm{d}a & \rightarrow \\
\rightarrow & p & p + \mathrm{d}p & \rightarrow \\
\rightarrow & \rho & \rho + \mathrm{d}\rho & \rightarrow
\end{array}$$

Rys. 11.1. Małe zaburzenia w gazie

W przypadku jednowymiarowego ruchu gazu w cylindrze powierzchnia S nie zmienia swojego kształtu, więc warunki zgodności (11.1) i (11.2) można rozważać w postaci wyłącznie funkcji podcałkowych. Warunek wynikający z równania zachowania masy (11.1), przyjmie teraz postać $[\rho U_n] = 0$. Dla $U_n = a$ i ρ z jednej strony powierzchni oraz $U_n = a + \mathrm{d}a$ i $\rho + \mathrm{d}\rho$ z drugiej, otrzymamy z warunku (11.1) następującą zależność $\rho \,\mathrm{d}a = -a \,\mathrm{d}\rho$. Pominięte tu zostały małe wyższego rzędu typu $\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}a$. Warunek (11.2) wynikający z równania zachowania pędu, przy założenie nielepkości, sprowadzi się do postaci $[\rho U_n^2 + p] = 0$. Według rysunku 11.1 otrzymamy następującą zależność (po pominięciu małych wyższego rzędu) $\mathrm{d}p = -2\rho a \,\mathrm{d}a - a^2 \,\mathrm{d}\rho$, która umożliwia nam sformułowanie zależności na prędkość dźwięku w postaci

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = a^2. \tag{11.3}$$

Powyższy wzór można przedstawić w prostszej postaci, jeżeli mamy do czynienia z założeniem izentropowości. Przez izentropowość rozumie się jednoczesne założenie braku przewodnictwa cieplnego i braku wewnętrznych źródeł entropii (dyssypacji). Dyssypacja w przypadku założenia nielepkości jest i tak zerowa, więc jedynym nowym założeniem jest brak przewodnictwa. Założenie izentropwości związane jest również z odwracalnością procesu i słuszna jest wtedy zależność $p\rho^{-\kappa} = const$, zwana adiabatą Poissona. Adiabata Poissona umożliwia zapisanie wzoru (11.3) w postaci

$$a^2 = \kappa RT. \tag{11.4}$$

Z powyższego wzoru wynika, że prędkość rozprzestrzeniania się małych zaburzeń w gazie (prędkość dźwięku) zależy od własności gazu poprzez κR i jego temperatury T. Dla warunków normalnych wynosi ona $a \approx 331\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

W oparciu o prędkość dźwięku a definiuje się lokalną liczbę Macha w postaci

$$Ma := \frac{U}{a}, \tag{11.5}$$

gdzie U jest lokalną prędkością płynu, a przez a rozumie się lokalną prędkość dźwięku. Oprócz lokalnej liczby Macha można mówić o globalnej (referencyjnej) liczbie Macha, gdzie w definicji (11.5) znajdują się prędkości referencyjne. Alternatywnie przez U można rozumieć prędkość obiektu, który porusza się np. w nieruchomym powietrzu. Dla $Ma < 1$ mówimy o przepływach poddźwiękowych, dla $Ma = 1$ – dźwiękowych i dla $Ma > 1$ – naddźwiękowych. Jeżeli $Ma \approx 1$, często mówi się o przepływach okołodźwiękowych.

11.2.2.2. Płytka woda

W przypadku rozpatrywania propagacji małych zaburzeń w nieruchomej płytkiej wodzie mamy do czynienia z niewielkimi zamianami prędkości c i wysokości powierzchni swobodnej y (rys. 11.2). Zakłada się, że woda jest nieściśliwa, więc nie ma tutaj zmian gęstości. Poszukiwana jest zależność na prędkość c propagacji zaburzeń.

$$\begin{array}{ccc|cc}
\rightarrow & & c & c + \mathrm{d}c & \rightarrow \\
\rightarrow & & y & y + \mathrm{d}y & \rightarrow \\
\rightarrow & & \rho & \rho & \rightarrow
\end{array}$$

Rys. 11.2. Małe zaburzenia w płytkiej wodzie

Podobnie jak w przypadku gazodynamiki zakłada się niewielkie zaburzenia, więc rozważane wielkości przy przejściu przez powierzchnię S różnią się niewielkimi przyrostami. O ile powierzchnia S w przypadku gazodynamiki nie zmienia się, o tyle w przypadku płytkiej wody zmienia się o $\mathrm{d}y$ tak, jak ma to postać w przypadku grzbietu fali. Wynika z tego, że warunki zgodności (11.1) i (11.2) muszą być rozważane w postaci całkowej, gdyż powierzchnia przed zaburzeniem jest inna niż za zaburzeniem. Warunek wynikający z równania zachowania masy (11.1), ze względu na założenie nieściśliwości, będzie miał postać

$$\iint\limits_S [U_n]\ \mathrm{d}S = 0. \tag{11.6}$$

W powyższej zależności wystarczy rozważać całki pojedyncze wzdłuż wysokości y, gdyż szerokość kanału jest stała. Przed zaburzeniem mamy prędkość $U_n = c$ i granice całkowania od 0 do y, natomiast za zaburzeniem $U_n = c + \mathrm{d}c$ i granice całkowania od 0 do $y + \mathrm{d}y$. Pomijając małe wyższego rzędu, mamy $y\,\mathrm{d}c = -c\,\mathrm{d}y$.

Podobnie jak poprzednio zakładamy, że mamy do czynienia z płynem nielepkim, co powoduje, że tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ sprowadza się do postaci $\boldsymbol{\sigma} = -p\delta$. Dodatkowym założeniem jest brak składowych prędkości w kierunku y prostopadłym do lustra niezaburzonej wody. W takim przypadku ciśnienie p można przybliżać wyłącznie ciśnieniem hydrostatycznym słupa wody $p \approx \rho g y$. Ostatecznie warunek (11.2), wynikający z równania zachowania pędu, przyjmuje postać

$$\iint\limits_S \left[U_n^2 + gy\right] \mathrm{d}S = 0. \tag{11.7}$$

Podobnie jak poprzednio przed zaburzeniem mamy $U_n = c$ i granice od 0 do y oraz za zaburzeniem $U_n = c + \mathrm{d}c$ i granice od 0 do $y + \mathrm{d}y$. Pomijając małe wyższego rzędu i wykorzystując pierwszy warunek, można otrzymać zależność $gy\,\mathrm{d}y = -2yc\,\mathrm{d}c - c^2 dy$, z której wynika, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{gy^2}{2}\right) = c^2. \tag{11.8}$$

Zależność (11.8) jest odpowiednikiem wzoru (11.3). Widać stąd, że prędkości dźwięku a odpowiada prędkość propagacji zaburzeń w płytkiej wodzie c. Odpowiednikiem gęstości ρ jest wysokość y, a ciśnieniu p odpowiada wielkość $2^{-1}gy^2$. Te i kolejne analogie zebrane są w tabeli 11.1.

Tabela 11.1. Analogie

gaz	woda
a	c
T, ρ	y
p	$\frac{gy^2}{2}$
κ	2
c_p	g
c_v, R	$\frac{g}{2}$
Ma	Fr

Bezpośrednio z równania (11.8) otrzymujemy następujący odpowiednik zależności (11.4), która określa w prosty sposób prędkość propagacji c, która zależy od głębokości płytkiej wody h i wartości przyspieszenia ziemskiego g

$$c^2 = gy. \tag{11.9}$$

Znając odpowiedniki ciśnienia p i gęstości ρ, z powyższego wzoru można pokazać, że wykładnikowi izentropy κ musi odpowiadać liczba 2. Posługując się równaniem stanu gazu, wzorem na wykładnik izentropy $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ i stałą gazową $R = c_p - c_v$ oraz zależnością (11.4), można wykazać dalsze analogie, ujęte w tabeli 11.1.

Podobnie jak w przypadku liczby Macha można wprowadzić lokalną liczbę Froude'a, która definiowana jest jako stosunek lokalnej prędkości wody, do lokalnej prędkości rozprzestrzeniania się małych zaburzeń na powierzchni płytkiej wody

$$Fr := \frac{U}{c}. \tag{11.10}$$

Dla $Fr < 1$ mówimy o przepływie podkrytycznym (ruch spokojny), a dla $Fr > 1$ mówimy o przepływie nadkrytycznym (ruch rwący).

11.3. Doświadczenie

11.3.1. Stanowisko pomiarowe

Stanowisko pomiarowe składa się z kanału, który w rzucie z góry ma kształt prostokąta. Ruch płytkiej wody wymuszany jest pompą. W kanale ustawiać można różne przedmioty i obserwować zjawiska, które są analogiczne do zjawisk znanych z gazodynamiki. Dystans pomiarowy L przyjmowany jest wzdłuż kanału. Dystans ten zaburzenia pokonują w czasie t_i. Zaburzenia generowane są na wlocie do kanału i śledzony jest dystans L, który pokonuje czoło fali.

11.3.2. Przebieg eksperymentu

Eksperyment polega na pomiarze wielkości potrzebnych do porównania teoretycznej prędkości c rozprzestrzeniania się zaburzeń na powierzchni płytkiej wody (11.9) i średniej prędkości $\bar{c}$ generowanych na stanowisku pomiarowym zaburzeń, na podstawie zależności $\bar{c} = L\,\bar{t}^{-1}$, gdzie $\bar{t}$ jest średnim czasem przemieszczania się zaburzenia na dystansie L (pomiary w tabeli 11.5). Średni czas $\bar{t}$ obliczany jest na podstawie serii pomiarów czasów t_i, które zapisywane są w tabeli 11.6. Do obliczenia prędkości teoretycznej potrzebna jest znajomość poziomu płytkiej wody, którą mierzy się podczas eksperymentu i zapisuje w tabeli 11.5.

11.4. Opracowanie wyników

11.4.1. Obliczenia

11.4.1.1. Pomiary czasu

Czas w jakim zaburzenia pokonują dystans L wyznaczamy na podstawie serii pomiarów z tabeli 11.6. Jako średni czas $\bar{t}$ przyjmuje się średnią arytmetyczną

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i. \tag{11.11}$$

Wariancję dla pojedynczego pomiaru σ_t^2 wyznaczmy ze wzoru

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2, \tag{11.12}$$

skąd dalej wyznacza się odchylenie standardowe σ_t. Wielkość ta charakteryzuje błąd pojedynczego pomiaru. Dla serii n pomiarów błąd bezwzględny wyznaczamy z zależności

$$\Delta_t = \frac{\sigma_t}{\sqrt{n}}\,\mathrm{t}(p,n). \tag{11.13}$$

W powyższej zależności przez $\mathrm{t}(p,n)$ oznaczono kwantyl rzędu p (przedział ufności) przy n stopniach swobody (pomiarach). Wartości $\mathrm{t}(p,n)$ odczytywane są z tabeli 1.2. Przedział ufności p przyjmuje się na poziomie 95%, czyli $p = 0.95$. Błąd względny pomiaru czasu δ_t wyliczamy z zależności $\delta_t = \frac{\Delta_t}{\bar{t}}$. Wyniki zamieszczamy w tabeli 11.2.

Tabela 11.2. Obliczenia czasu pomiaru

$\bar{t}$ [s]	
Δ_t [s]	
δ_t [%]	

11.4.1.2. Prędkość rozprzestrzeniania się zaburzeń

Teoretyczna prędkość zaburzeń określona jest zależnością (11.9)

$$c = \sqrt{gH}, \tag{11.14}$$

gdzie przez H oznaczono wysokość warstwy cieczy (płytkiej wody), której pomiar zapisany jest w tabeli 11.5. Wartość przyspieszenia ziemskiego g z błędem bezwzględnym Δ_g odczytujemy również z tabeli 11.5.

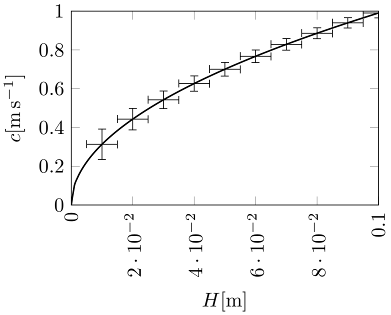
Błąd bezwzględny określenia teoretycznej prędkości c rozprzestrzeniania się zaburzeń określamy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_c \approx \mathrm{d}c(g,H)$

$$\Delta_c = \left|\frac{\partial c}{\partial g}\Delta_g\right| + \left|\frac{\partial c}{\partial H}\Delta_H\right|. \tag{11.15}$$

Z powyższego równania, po podzieleniu obustronnym przez c, można wyznaczyć błąd względny pomiaru teoretycznej prędkości c

$$\delta_c = \frac{1}{2}\left(\delta_g + \delta_H\right). \tag{11.16}$$

Znając błąd względny $\delta_c = \frac{\Delta_c}{c}$, można z powyższej zależności określić błąd bezwzględny pomiaru prędkości $\Delta_c = c\,\delta_c$. Na podstawie zależności (11.14) można sporządzić wykres 11.3.



Rys. 11.3. Teoretyczna prędkość c rozprzestrzeniania się zaburzeń dla $\Delta_H = \pm 0.005$ m i $\Delta_g = \pm 0.01\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

Eksperymentalną (średnią) prędkość $\bar{c}$ rozprzestrzeniania się zaburzeń znajdujemy na podstawie pomiaru czasu $\bar{t}$ z zależności (11.11) (tabela 11.2) i dystansu L (tabela 11.5) na podstawie wzoru

$$\bar{c} = \frac{L}{\bar{t}}. \tag{11.17}$$

Błąd bezwzględny określenia eksperymentalnej prędkości $\bar{c}$ rozprzestrzeniania się zaburzeń określamy za pomocą różniczki zupełnej $\Delta_{\bar{c}} \approx \mathrm{d}\bar{c}(L, \bar{t})$

$$\Delta_{\bar{c}} = \left|\frac{\partial \bar{c}}{\partial L}\Delta_L\right| + \left|\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}}\Delta_{\bar{t}}\right|. \tag{11.18}$$

Dzieląc obustronnie powyższe równanie przez $\bar{c}$, można wyznaczyć błąd względny pomiaru eksperymentalnej prędkości rozprzestrzeniania się zaburzeń

$$\delta_{\bar{c}} = \delta_L + \delta_t. \tag{11.19}$$

Powyższa zależność umożliwia obliczenie błędu bezwzględnego $\Delta_{\bar{c}}$ pomiaru eksperymentalnej prędkości w postaci $\Delta_{\bar{c}} = \bar{c}\,\delta_{\bar{c}}$. Wyniki zamieszczamy w tabeli 11.3.

Tabela 11.3. Obliczenia prędkości zaburzeń

$c\,[\mathrm{m\,s^{-1}}]$	
$\Delta_c\,[\mathrm{m\,s^{-1}}]$	
$\delta_c\,[\%]$	
$\bar{c}\,[\mathrm{m\,s^{-1}}]$	
$\Delta_{\bar{c}}\,[\mathrm{m\,s^{-1}}]$	
$\delta_{\bar{c}}\,[\%]$	

11.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać numer grupy laboratoryjnej, rok i kierunek studiów, datę i nazwę przeprowadzenia ćwiczenia. Dalej powinien być podany cel ćwiczenia, schemat stanowiska pomiarowego, tabele pomiarów i obliczeń, przykład obliczeniowy, wnioski. Dodatkowo należy sporządzić wykres 11.3 i nanieść obie obliczone prędkości c i $\bar{c}$ wraz ze słupkami błędów.

11.5. Pytania kontrolne

i. Przy jakich założeniach otrzymuje się wzór na prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń w gazie (a), a przy jakich w cieczy (c)?

ii. Pomiędzy jakimi wielkościami zachodzą analogie i jaką one mają postać?

iii. Ile wynosi prędkość dźwięku dla warunków normalnych?

Oznaczenia

a	prędkość dźwięku
c	prędkość propagacji małych zaburzeń na powierzchni płytkiej wody
C	stała
c_i	ciepła właściwe
c_p	współczynnik ciśnienia
F	funkcja
Fr	liczba Froude'a
g	przyspieszenie ziemskie
H	wysokość warstwy cieczy
$\hat{n}$	wersor normalny
J	funkcjonał
L	dystans, krzywa
Ma	liczba Macha
n	wykładnik
p	ciśnienie
R	stała gazowa
$\vec{R}$	opór
R_i	składowa oporu wzdłuż osi i
S	powierzchnia
t	czas
T	temperatura
U	prędkość, moduł prędkości
$\vec{U}$	wektor prędkości
U_n	składowa normalna prędkości
y	wysokość, zmienna
α	kąt
δ	błąd względny

$\boldsymbol{\delta}$	delta Kroneckera
Δ	błąd bezwzględny
κ	wykładnik izentropy
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
ρ	gęstość
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor naprężenia
$\vec{\sigma}_n$	wektor naprężenia

Bibliografia

[1] E. Krause, *Fluid Mechanics*, Springer, Berlin, 2005

[2] R. Puzyrewski, J. Sawicki, *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*, PWN, Warszawa, 1987

[3] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Dodatek – tabele pomiarowe

Tabele pomiarowe z dnia:

Tabela 11.4. Błędy bezwzględne

Δ_L [m]	
Δ_t [s]	
Δ_H [m]	

Tabela 11.5. Pomiary

L [m]	
H [m]	
g [m s^{-2}]	9.81 ± 0.01

Tabela 11.6. Pomiary czasu

Nr	t_i [s]
1	
2	
3	
4	
5	

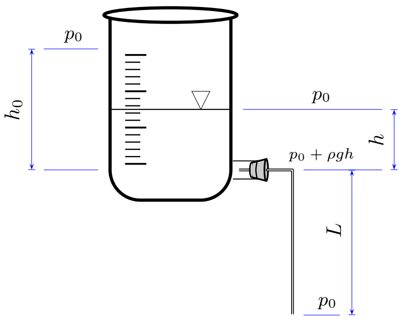
Rozdział 12

Czas opróżniania zbiornika

Krzysztof Tesch

12.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest pomiar czasu opróżniania zbiornika i porównanie otrzymanych wyników z rozwiązaniami teoretycznymi. Dyskutowane są dwa rozwiązania teoretyczne, które różnią się założeniami. Dodatkowo, wprowadzony jest model empiryczny.



Rys. 12.1. Schemat stanowiska

12.2. Doświadczenia

12.2.1. Opis stanowiska

Zbiornik o promieniu R_0 pokazany jest na rysunku 12.1. Zbiornik ten opróżnia się w czasie t_0 przez kapilarę o promieniu R i długości L. Przez h_0 oznaczono wysokość słupa wody w zbiorniku dla czasu początkowego $t = 0$. Poziom bieżący lustra wody oznaczony jest symbolem h. Na powierzchni swobodnej i na wylocie z kapilary panuje ciśnienie atmosferyczne p_0. Na wlocie do kapilary panuje ciśnienie atmosferyczne powiększone o wysokość słupa woda $p = p_0 + \rho g h$.

12.2.2. Przebieg eksperymentu

Eksperyment polega na pomiarze czasów t_i na wysokości h_i, na jakiej znajduje się lustro wody. Skala na której można odczytywać wysokości h_i zamocowana jest na zbiorniku (rys. 12.1). Wyniki pomiarów zapisuje się w tabeli 12.4. Pozostałe wielkości geometryczne zapisywane są w tabeli 12.6 wraz z błędami bezwzględnymi 12.5. Temperatura wody T mierzona jest termometrem i zapisywana w tabeli 12.7. W oparciu o tę temperaturę i dodatek A wyznacza się współczynnik lepkości μ i gęstość ρ wody.

12.2.3. Czas opróżniania zbiornika

12.2.3.1. Metoda oparta na prawie Poiseuille'a

Opróżnianie zbiornika jest zjawiskiem niestacjonarnym. Ponieważ przebiega ono zwykle wolno, o ile promień wylotowy jest dużo mniejszy od promienia zbiornika $R \ll R_0$, więc zwykle traktuje się je jako zjawisko quasi-stacjonarne. Do obliczanie objętościowego natężenia przepływu w kapilarze stosuje się prawo Poiseuille'a (3.3) przy założeniu, że spadek ciśnienia zależy od wysokości słupa wody $\Delta p = \rho g h$. Wysokość h słupa wody zmniejsza się stopniowo z czasem. Prawo Poiseuille'a przyjmuje zatem postać

$$\dot{V} = \frac{\pi \rho g h}{8 \mu L} R^4. \tag{12.1}$$

Do ustalenia czasu opróżniania zbiornika wykorzystywana jest zależność na objętościowe natężenie przepływu w kapilarze $\dot{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|V|$. Elementarna objętość $\mathrm{d}|V|$ równa jest iloczynowi pola powierzchni $|S_0|$ zbiornika cylindrycznego i elementarnej wysokości $\mathrm{d}h$. Zapisuje się to jako

$$\dot{V}\,\mathrm{d}t = -|S_0|\,\mathrm{d}h. \tag{12.2}$$

Zależność powyższa jest słuszna w przypadku płynów nieściśliwych. Jeżeli pole powierzchni zbiornika cylindrycznego dane jest wzorem $|S_0| = \pi R_0^2$, to z równań (12.1) i (12.2) otrzymujemy następujące równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{\mathrm{d}h}{h} = -\frac{\rho g R^4}{8 \mu L R_0^2}\,\mathrm{d}t. \tag{12.3}$$

Całkując je z lewej strony od 0 do t_P, a z prawej od h_0 do h, mamy następujące rozwiązanie

$$t_P = -\frac{8 \mu L R_0^2}{\rho g R^4} \ln \frac{h}{h_0}, \tag{12.4}$$

które opisuje czas t_P opróżniania zbiornika według modelu Poiseuille'a. Rozwiązanie (12.4) nie pozwala na wyliczenie czasu opróżnienia zbiornika w całości dla $h = 0$, gdyż wtedy $t_P \to \infty$. Jest to największa ułomność dyskutowanego modelu. Można natomiast z tej zależności obliczać czasy częściowego opróżnienia. Porównanie przykładowych danych eksperymentalnych z czasami t_P pokazane jest na wykresie 12.2. Widać słabą zgodność rozwiązania (12.4) z pomiarami. Niemniej istnieje taka wysokość $h \approx 0.1h_0$, dla której można wyliczyć czas t_P dokładnie. Metoda oparta na prawie Poiseuille'a dotyczy wyłącznie zbiorników cylindrycznych. Do zalet dyskutowanej metody zaliczyć można to, że nie wymaga ona kalibrowania, tj. wprowadzania współczynników eksperymentalnych. Należy zaznaczyć, że dyskutowany tu model nie uwzględnia wszystkich zjawisk, które mają miejsce na stanowisku z rysunku 12.1. Nie uwzględnianie są chociażby straty w poziomej części kapilary i na wlocie do niej.

12.2.3.2. Metoda oparta na wzorze Torricellego

W metodzie opartej na wzorze Torricellego[1)] wykorzystuje się zależność analogiczną do wzoru (12.2), z tą różnicą, że stałe pole powierzchni $|S_0|$ zastępowane jest polem $|S_h|$, które może się zmieniać z wysokością h

$$\mathrm{d}t = -\frac{|S_h|}{\dot{V}}\,\mathrm{d}h. \tag{12.5}$$

Możliwość uwzględnienia zmiennej geometrii zbiornika jest przewagą tej metody w porównaniu do metody opartej na prawie Poisuille'a.

Całkując lewą stronę równania (12.5) od 0 do t_T i prawą od h_0 do h otrzymujemy

$$t_T = \int_h^{h_0} \frac{|S_h(h)|}{\dot{V}(h)}\,\mathrm{d}h. \tag{12.6}$$

Dalsza postać wzoru (12.6) zależy od kształtu zbiornika, poprzez zmiany jego pola powierzchni wzdłuż wysokości $|S_h(h)|$ i od sposobu wyznaczania objętościowego natężenia przepływu $\dot{V} = |S|\bar{U}$. Zgodnie z nazwą metody wykorzystywany jest tu wzór Torricellego w postaci $\bar{U} = \varphi\sqrt{2gh}$, gdzie φ jest współczynnikiem wypływu $\varphi \leqslant 1$. Dla $\varphi = 1$ mamy przypadek płynu nielepkiego

$$t_T = \frac{1}{\varphi|S|\sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{|S_h(h)|}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h. \tag{12.7}$$

W przypadku zbiornika cylindrycznego wzór (12.7) przyjmuje następującą postać

$$t_T = \frac{R_0^2}{\varphi R^2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(1 - \sqrt{\frac{h}{h_0}}\right), \tag{12.8}$$

która może być jeszcze bardzie uproszczona dla przypadku całkowitego opróżnienia zbiornika $h = 0$. Współczynnik przed nawiasem po prawej stronie wzoru (12.8) jest czasem całkowitego opróżnienia zbiornika.

[1)] Evangelista Torricelli (1608-1647) – włoski fizyk i matematyk

Metoda oparta na wzorze Torricellego daje lepszą zgodność z eksperymentem w porównaniu z metodą opartą na prawie Poiseuille'a. Jest tak, o ile znana jest wartość współczynnika wypływu φ. Jego wartość zależy od zbiornika, cieczy i temperatury (poprzez współczynnik lepkości dynamicznej). Bez kalibracji współczynnika ($\varphi = 1$) metoda daje gorsze rezultaty niż metoda oparta na prawie Poiseuille'a. Możliwe jest dokładne wyznaczenie czasu całkowitego opróżniania zbiornika, gdyż rozwiązanie to nie ma osobliwości dla $h \to 0$. Porównanie z eksperymentem pokazane jest na wykresie 12.2. Do największych wad metody opartej na wzorze Torricellego zalicza się konieczność kalibracji współczynnika wypływu dla różnych cieczy i warunków.

12.2.3.3. Metoda empiryczna

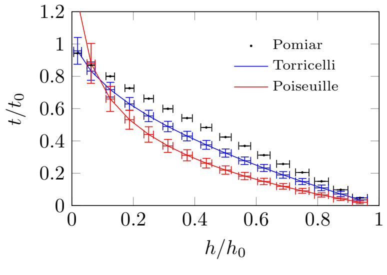
Zarówno rozwiązanie wynikające z prawa Poiseuille'a (12.4), jak i rozwiązanie wynikające ze wzoru Torricellego (12.8) nie dają satysfakcjonującej dokładności. Z wykresu 12.2 wynika, że oba modele nie oddają dobrze zmian czasu opróżniania t na skutek zmian wysokości h. Lepszy pod tym względem jest model (12.8), gdyż przynajmniej pozwala dobrze określić czas całkowitego opróżnienia zbiornika.

Postać tego rozwiązania (wzór (12.8)) może sugerować następującą zależność empiryczną na czas opróżniania zbiornika

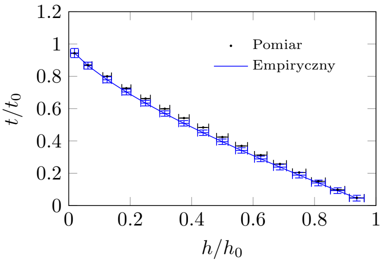
$$\frac{t_e}{t_0} = 1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^m, \tag{12.9}$$

gdzie m jest wykładnikiem odpowiedzialnym za dynamikę zmian czasu opróżniania na skutek zmian wysokości, a t_0 jest czasem całkowitego opróżniania zbiornika.

Rozwiązanie (12.9) wymaga również kalibracji współczynnika m, który dla przypadku modelu opartego na wzorze Torricellego (12.8) wynosi $\frac{1}{2}$. Z porównania danych eksperymentalnych z teoretycznymi (wykres 12.2) można wnioskować, że $\frac{1}{2} < m < 1$. Dokładna wartość m może być wyznaczona metodą regresji liniowej. Porównanie modelu empirycznego (12.9) z danymi eksperymentalnymi pokazane jest na wykresie 12.3. Widać bardzo dobrą zgodność czasów w całym zakresie wysokości h.



Rys. 12.2. Modele teoretyczne



Rys. 12.3. Model empiryczny

12.3. Opracowanie wyników

12.3.1. Obliczenia

12.3.1.1. Błędy pomiarów

Dane pomiarowe z tabeli 12.4 nanosimy na wykres 12.2. Na osi odciętych znajdują się współrzędne bieżącej wysokości h odniesionej do wysokości początkowej h_0. Błędy bezwzględne tak zdefiniowanej współrzędnej liczymy w każdym punkcie z różniczki zupełnej, jak dla błędów pojedynczych pomiarów $\Delta_{h/h_0} \approx \mathrm{d}h/h_0$, czyli

$$\Delta_{h/h_0} = \left|\frac{\partial}{\partial h}\frac{h}{h_0}\Delta_h\right| + \left|\frac{\partial}{\partial h_0}\frac{h}{h_0}\Delta_{h_0}\right| = \delta_{h/h_0}\frac{h}{h_0} = (\delta_h + \delta_{h_0})\,\frac{h}{h_0}, \tag{12.10}$$

gdzie $\delta_h = \frac{\Delta_h}{h}$ i $\delta_{h_0} = \frac{\Delta_{h_0}}{h_0}$. Błędy bezwzględne pomiarów h i h_0 są sobie równe $\Delta_h = \Delta_{h_0}$ i zamieszczone w tabeli 12.5.

Na osi rzędnych zapisywany jest czas bezwymiarowy $\frac{t}{t_0}$, gdzie t jest czasem bieżącym dla danej wysokości h, a t_0 jest całkowitym czasem opróżniania zbiornika. Błędy bezwzględne tak zdefiniowanej współrzędnej liczone są w każdym punkcie z różniczki zupełnej $\Delta_{t/t_0} \approx \mathrm{d}t/t_0$

$$\Delta_{t/t_0} = \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{t}{t_0}\Delta_t\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{t}{t_0}\Delta_t\right| = \delta_{t/t_0}\frac{t}{t_0} = (\delta_t + \delta_{t_0})\,\frac{t}{t_0}, \tag{12.11}$$

gdzie $\delta_t = \frac{\Delta_t}{t}$ i $\delta_{t_0} = \frac{\Delta_t}{t_0}$. Błąd bezwzględny pomiaru czasu zamieszczony jest w tabeli 12.5.

12.3.1.2. Metoda oparta na prawie Poiseuille'a

Do obliczenia błędu bezwzględnego czasu opróżniania zbiornika wykorzystuje się metody typowe dla błędów pojedynczych pomiarów. Z metody różniczki zupełnej mamy $\Delta_{t_P} \approx \mathrm{d}t_P(L, R, R_0, h_0, h)$. Można więc zapisać na podstawie wzoru (12.4), że

$$\Delta_{t_P} = \left|\frac{\partial t_P}{\partial L}\Delta_L\right| + \left|\frac{\partial t_P}{\partial R}\Delta_R\right| + \left|\frac{\partial t_P}{\partial R_0}\Delta_{R_0}\right| + \left|\frac{\partial t_P}{\partial h_0}\Delta_{h_0}\right| + \left|\frac{\partial t_P}{\partial h}\Delta_h\right|. \tag{12.12}$$

Obliczając poszczególne pochodne i dzieląc obustronnie przez t_P w postaci (12.4), otrzymujemy wzór na błąd względny pomiaru czasu opróżniania zbiornika δ_{t_P} na podstawie wzoru Poiseuille'a

$$\delta_{t_P} = \delta_L + 4\delta_R + 2\delta_{R_0} + \frac{\delta_{h_0} + \delta_h}{\ln\frac{h_0}{h}}. \tag{12.13}$$

Błędy względne wielkości x liczymy jako $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}$. Poszczególne błędy bezwzględne odczytywane są z tabeli 12.5 i 12.6, gdzie $\Delta_h = \Delta_{h_0}$. Błąd bezwzględny z zależności (12.13) może być wyliczony jako $\Delta_{t_P} = \delta_{t_P} t_P$. Wyniki obliczeń t_P, Δ_{t_P} i δ_{t_P} zapisujemy w tabeli 12.1. Czas bezwymiarowy $\frac{t_P}{t}$ naniesiony zostaje na wykres 12.2.

Błąd bezwzględny na osi odciętych liczony jest ze wzoru (12.10), natomiast błąd bezwzględny na osi rzędnych ze wzoru analogicznego do (12.11) w postaci

$$\Delta_{t_P/t_0} = (\delta_{t_P} + \delta_{t_0})\,\frac{t_P}{t_0}. \tag{12.14}$$

Tabela 12.1. Pomiary i obliczenia

i	1	2	...	n
t_i [s]				
h_i [m]				
t_P [s]				
Δ_{t_P} [s]				
δ_{t_P} [%]				
t_T [s]				
Δ_{t_T} [s]				
δ_{t_T} [%]				
t_e [s]				
Δ_{t_e} [s]				
δ_{t_e} [%]				

Tabela 12.2. Regresja liniowa – Torricelli

r	
B	
Δ_B	
δ_B [%]	
φ	

Tabela 12.3. Regresja liniowa – empiryczny

r	
B	
Δ_B	
δ_B [%]	
m	

12.3.1.3. Metoda oparta na wzorze Torricellego

Podobnie jak poprzednio wykorzystuje się metodę różniczki zupełnej do szacowania błędu bezwzględnego pojedynczych pomiarów $\Delta_{t_T} \approx \mathrm{d}t_T(R, R_0, h, h_0)$. Po wykonaniu obliczeń i podzieleniu obustronnie przez t_T według wzoru (12.8), mamy następującą zależność na błąd względny czasu opróżniania zbiornika metodą opartą na wzorze Torricellego

$$\delta_{t_T} = 2\delta_R + 2\delta_{R_0} + \frac{1}{2}\,\frac{\delta_h}{\sqrt{\frac{h_0}{h}} - 1} + \frac{1}{2}\,\frac{\delta_{h_0}}{1 - \sqrt{\frac{h}{h_0}}}. \tag{12.15}$$

Poszczególne błędy względne wielkości x liczymy jako $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}$, błędy bezwzględne odczytywane są z tabeli 12.5 i 12.6. Tak jak poprzednio $\Delta_h = \Delta_{h_0}$. Błąd bezwzględny z zależności (12.15) wyliczony jako jako $\Delta_{t_T} = \delta_{t_T} t_T$. Wyniki obliczeń t_T, Δ_{t_T} i δ_{t_T} zapisujemy w tabeli 12.1. Czas bezwymiarowy $\frac{t_T}{t}$ nanosimy na wykres 12.2. Błąd bezwzględny na osi odciętych liczony jest ze wzoru (12.10), natomiast błąd bezwzględny na osi rzędnych ze wzoru

$$\Delta_{t_T/t_0} = (\delta_{t_T} + \delta_{t_0})\,\frac{t_T}{t_0}. \tag{12.16}$$

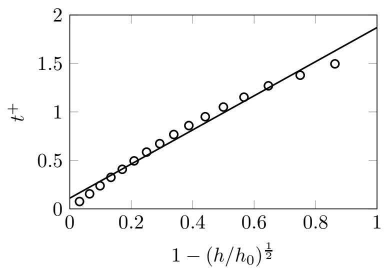
Współczynnik wypływu φ we wzorze (12.8) może być kalibrowany za pomocą regresji liniowej. Jeżeli bezwymiarowy czas t^+ zdefiniujemy jako

$$y \equiv t^+ := \frac{t}{\frac{R_0^2}{R^2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \tag{12.17}$$

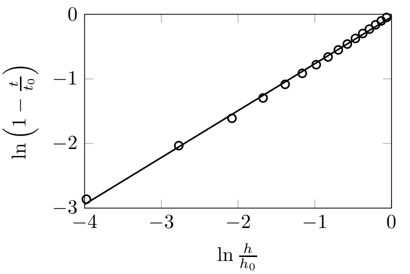
i wykorzystamy następujące podstawienia $x := 1 - \sqrt{h/h_0}$, $B := \varphi^{-1}$, to wzór (12.8) zostaje sprowadzony do postaci liniowej $y = Bx$. Stosując metodę regresji liniowej do wyznaczenia wartości współczynnika B (wzory (1.44)-(1.47)), można określić wartość współczynnika wypływu φ jako

$$\varphi = \frac{1}{B}. \tag{12.18}$$

Współczynnik korelacji liniowej r obliczamy ze wzoru (1.45). Błędy bezwzględne określenia współczynnika Δ_B można określić za pomocą zależności (1.51). Błąd Δ_B przeliczamy na błąd względny $\delta_B = \frac{\Delta_B}{B}$. Wyniki obliczeń zamieszczamy w tabeli 12.2. Przykładowe graficzne przedstawienie wyników pokazane jest na wykresie 12.4. Ponieważ wzór (12.8) nie opisuje dokładnie zjawiska, więc przy omawianej transformacji wzoru do postaci liniowej $y = Bx$ nie otrzymujemy idealnie liniowego rozkładu punktów pomiarowych. Wynika to z wykładnika $\frac{1}{2}$ we wzorze (12.8).



Rys. 12.4. Regresja liniowa – Torricelli



Rys. 12.5. Regresja liniowa – empiryczny

12.3.1.4. Metoda empiryczna

Wykorzystując metodę różniczki zupełnej do szacowania błędu bezwzględnego pojedynczych pomiarów, mamy $\Delta_{t_e} \approx \mathrm{d}t_e(t_0, h, h_0)$, gdzie błąd wyznaczania wykładnika m jest pomijany. Po wykonaniu obliczeń i podzieleniu obustronnie przez t_e według wzoru (12.9), mamy następującą zależność na błąd względny czasu opróżniania zbiornika metodą empiryczną

$$\delta_{t_e} = \delta_{t_0} + \frac{m}{\left(\frac{h_0}{h}\right)^m - 1}\left(\delta_h + \delta_{h_0}\right). \tag{12.19}$$

Poszczególne błędy względne wielkości x liczone są jako $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}$, a błędy bezwzględne odczytywane są z tabeli 12.5. Tak jak poprzednio $\Delta_h = \Delta_{h_0}$. Błąd bezwzględny z zależności (12.19) wyliczamy jako jako $\Delta_{t_e} = \delta_{t_e} t_e$. Wyniki obliczeń t_e, Δ_{t_e} i δ_{t_e} zapisujemy w tabeli 12.1. Czas bezwymiarowy $\frac{t_e}{t}$ nanosimy na wykres 12.2. Błąd bezwzględny na osi odciętych liczony jest ze wzoru (12.10), natomiast błąd bezwzględny na osi rzędnych ze wzoru

$$\Delta_{t_e/t_0} = (\delta_{t_e} + \delta_{t_0}) \frac{t_e}{t_0}. \tag{12.20}$$

Wartość wykładnika m może być skalibrowana na podstawie pomiarów metodą regresji linowej. W tym celu zapisuje się wzór (12.9) w następującej postaci

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^m = 1 - \frac{t}{t_0}. \tag{12.21}$$

Po wykorzystaniu następujących podstawień $x := \ln \frac{h}{h_0}$, $y := \ln(1 - t/t_0)$ i $B := m$, otrzymujemy zależność liniową $y = Bx$. Współczynnik korelacji liniowej r obliczany jest ze wzoru (1.45). Błędy bezwzględne określenia współczynnika Δ_B można wyznaczyć za pomocą zależności (1.51). Błąd Δ_B przeliczany jest na błąd względny $\delta_B = \frac{\Delta_B}{B}$. Wyniki obliczeń zamieszczamy w tabeli 12.2. Graficzne przedstawienie wyników pokazane jest na wykresie 12.5. Widać dużo większą liniowość rozkładu pomiarów w porównaniu z wykresem 12.4. Wynika to z tego, że na ogół $m \neq \frac{1}{2}$ tak, jak miało to miejsce w przypadku rozwiązania wynikającego ze wzoru Torricellego (12.8).

12.3.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać numer grupy laboratoryjnej, rok i kierunek studiów, datę i nazwę przeprowadzenia ćwiczenia. Dalej powinien być podany cel ćwiczenia, schemat stanowiska pomiarowego, tabele 12.1, 12.2, 12.3, 12.5, 12.6, 12.7 pomiarów i obliczeń, przykład obliczeniowy, wykresy 12.2, 12.3 ze słupkami błędów, wykresy regresji liniowej 12.4 i 12.5, wnioski.

12.4. Pytania kontrolne

i. Jakie są zalety i wady metody opartej na prawie Poiseuille'a?

ii. Jakie są zalety i wady metody opartej na wzorze Torricellego w porównaniu z metodą opartą na prawie Poiseuille'a?

Oznaczenia

B	współczynnik kierunkowy
g	przyspieszenie ziemskie
h	wysokość
L	długość
m	wykładnik
n	liczba pomiarów
p	ciśnienie
R	promień

$\lvert S\rvert$	pole powierzchni
t	czas
U	prędkość
$\lvert V\rvert$	objętość
$\dot{V}$	objętościowe natężenie przepływu
x	zmienna niezależna
δ	błąd względny
Δ	błąd bezwzględny
μ	współczynnik lepkości dynamicznej
ρ	gęstość
φ	współczynnik wypływu

Bibliografia

[1] K. Tesch, *Mechanika Płynów*, Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2008

Dodatek – tabele pomiarowe

Tabele pomiarowe z dnia:

Tabela 12.4. Pomiary wysokości i czasu

i	t_i [s]	h_i [mm]
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Tabela 12.5. Błędy bezwzględne

Δ_{R_0} [mm]	
Δ_h [mm]	
Δ_t [s]	

Tabela 12.6. Pomiary

L [mm]	170 ± 5
R_0 [mm]	
R [mm]	1.285 ± 0.005
h_0 [mm]	

Tabela 12.7. Parametry wody

T [K]	
$\rho\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$	
$\mu\,[\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}]$	

Rozdział 13

Pomiar strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych

Marzena Banaszek

13.1. Cel ćwiczenia

Jednym z najbardziej rozpowszechnionych sposobów pomiaru strumienia płynu jest pomiar za pomocą zwężek pomiarowych. Ogólne zasady pomiaru i obliczania strumienia płynu przepływającego przez rurociąg za pomocą zwężek pomiarowych (kryz, dysz i zwężek Venturiego) określa norma PN-EN ISO 5167:2005 *Pomiary strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych wbudowanych w całkowicie wypełnione rurociągi o przekroju kołowym.* Norma określa ogólne wymagania dotyczące metod pomiaru, instalacji oraz wyznaczania niepewności pomiaru strumienia płynu.

Zwężki są wygodnymi urządzeniami ze względu na prostą konstrukcję (brak części ruchomych), uniwersalność (przeznaczone są do większości cieczy i gazów jednofazowych, mieszanin dwufazowych typu gaz-ciecz, gaz-pył itp.), szeroki zakres stosowania (zakres ciśnień i temperatur ograniczony jest jedynie wytrzymałością i odpornością materiałów rurociągu i zwężki), niezawodność działania i niski koszt. Przy starannym zaprojektowaniu, wykonaniu i eksploatacji układu pomiarowego osiąga się wysoką dokładność pomiaru (niepewność pomiaru rzędu 0.6%).

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych wbudowanych w rurociągi o przekroju kołowym.

13.2. Wprowadzenie teoretyczne

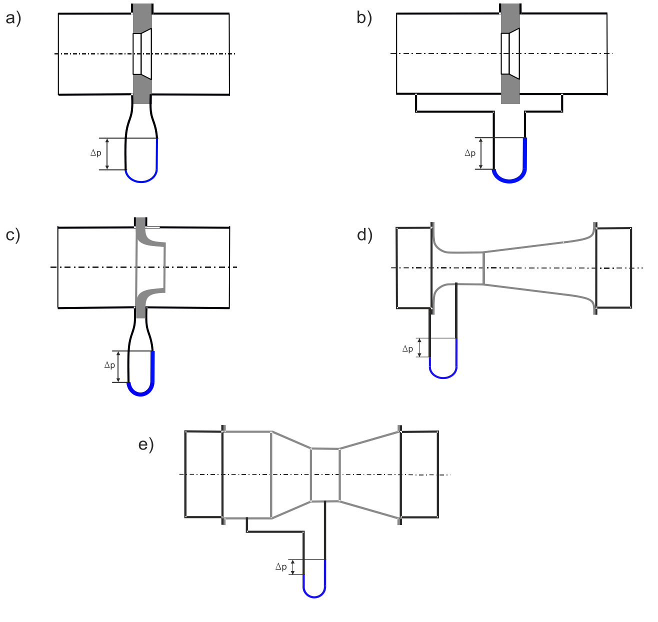
13.2.1. Zwężki pomiarowe

Przepływomierz zwężkowy jest urządzeniem służącym do pomiaru strumienia płynu, tj. masy lub objętości płynu przepływającego przez otwór zwężki (lub gardziel) w jednostce czasu. Przepływomierz zwężkowy składa się ze zwężki pomiarowej wbudowanej w prosty odcinek rurociągu, przewodów impulsowych wraz z armaturą oraz manometru różnicowego z ewentualnym przetwornikiem i miernikiem wtórnym.

Zwężka pomiarowa składa się z elementu dławiącego wykonanego jako przegroda z otworem o przekroju mniejszym niż przekrój rurociągu oraz obudowy zwężki obejmującej otwory impulsowe służące do przyściennego pomiaru ciśnienia płynu płynącego przez rurociąg. Spadek ciśnienia statycznego między dopływem, a odpływem ze zwężki pomiarowej jest miarą strumienia płynu.

Zwężki pomiarowe dzielimy na trzy zasadnicze grupy: kryzy, dysze i zwężki Venturiego. W kryzach płynący płyn odrywa się od krawędzi wlotowej, w dyszach płynie wzdłuż jej powierzchni wewnętrznej, a w zwężkach Venturiego jest ograniczony właściwą zwężką w kształcie dyszy i częścią rozbieżną. Różnice w przepływie płynu przez element dławiący wywierają decydujący wpływ na charakter przepływu płynu oraz wielkość strat energii.

Różne rodzaje zwężek pomiarowych przedstawiono na rysunku 13.1.

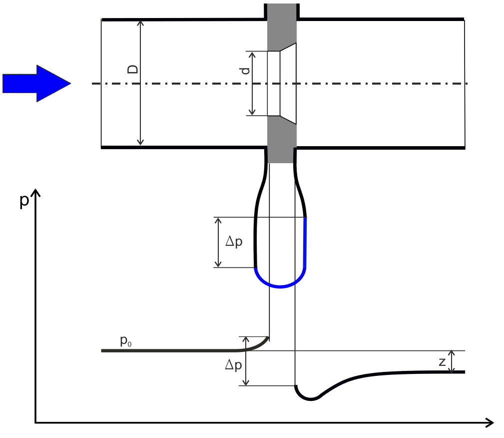


Rys. 13.1. Różne rodzaje zwężek pomiarowych: a) kryza ISA z przytarczowym pomiarem ciśnienia, b) kryza ISA z pomiarem ciśnienia w odległości D i $D/2$, c) dysza ISA, d) dysza Venturiego, e) klasyczna zwężka Venturiego

13.2.2. Zasada pomiaru strumienia płynu zwężką pomiarową

Zwężkę pomiarową (kryzę, dyszę lub klasyczną zwężkę Venturiego) wbudowuje się w prosty odcinek rurociągu o określonej długości minimalnej. Wbudowanie zwężki pomiarowej powoduje przewężenie przepływającej strugi płynu i spadek ciśnienia statycznego za zwężką (zdławienie przepływu). W pewnej odległości za zwężką ciśnienie ustala się i jest niższe od ciśnienia p_0 panującego przed zwężką o stałą stratę ciśnienia z. Znajomość różnicy ciśnienia statycznego między dopływem, a odpływem (lub gardzielą) ze zwężki Δp, rodzaju zwężki pomiarowej, danych rurociągu, charakteru przepływu oraz charakterystyki płynu pozwala na wyznaczenie strumienia płynu.

Rysunek 13.2 przedstawia zwężkę pomiarową o średnicy d wbudowaną w rurociąg o średnicy D wraz z manometrem różnicowym mierzącym różnice ciśnień statycznych przed i za zwężką Δp. Na rysunku przedstawiono zmianę ciśnienia statycznego wzdłuż rurociągu przy przepływie przez zwężkę.



Rys. 13.2. Rozkład zmian ciśnienia statycznego przy przepływie przez zwężkę pomiarową

13.2.3. Wybrane rodzaje zwężek pomiarowych

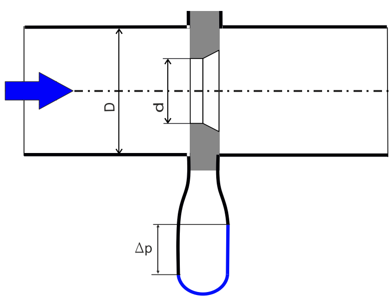
Przedstawiono kilka wybranych, najczęściej stosowanych rodzajów zwężek pomiarowych wbudowanych w całkowicie wypełnione rurociągi o przekroju kołowym.

Kryzy

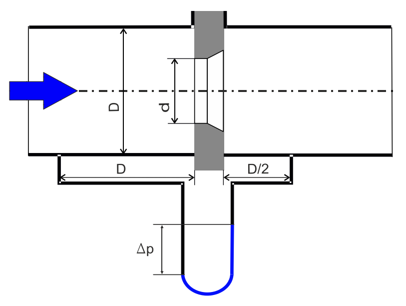
Kryzy są przepływowymi zwężkami pomiarowymi składającymi się z kryzy ISA i obudowy zawierającej otwory impulsowe do pomiaru ciśnienia różnicowego. Wykonane są w kształcie cienkościennej tarczy z kołowym otworem współosiowym z rurociągiem, o prostokątnej (w przekroju) krawędzi wlotowej. Kryzy są podstawowym typem zwężek do wykonywania pomiarów technicznych, przy których dopuszczalna jest powstająca w nich strata ciśnienia i istnieją dostatecznie długie odcinki pomiarowe (proste odcinki rurociągu o stałej średnicy przed i za zwężką). Kryzy zapewniają dużą dokładność pomiarów, jednak cechują się małą odpornością na płyny oddziałujące korozyjnie lub erozyjnie, które niszczą szybko ostrą krawędź kryzy, kluczową ze względu na dokładność pomiaru. Na rysunkach 13.3 i 13.4 przedstawiono podstawowe typy kryz ISA: kryzę z przytarczowym pomiarem ciśnienia i kryzę z pomiarem ciśnienia w odległości D i $D/2$.

Kryzę ISA z przytarczowym pomiarem ciśnienia wbudowuje się bezpośrednio między kołnierze rurociągu, a otwory impulsowe umieszcza się bezpośrednio przy tarczy.

Kryza ISA z pomiarem ciśnienia w odległości D i $D/2$ (tzw. kryzę z pomiarem vena contracta) posiada otwory impulsowe umieszczone w odległościach D i $D/2$ ściśle określonych przez normę. Odległość D równa jest wewnętrznej średnicy rurociągu, zaś odległość $D/2$ odpowiada miejscu największego przewężenia strumienia płynu przepływającego przez zwężkę, tzw. vena contracta. Takie umiejscowienie otworów impulsowych zapewnia pomiar największej różnicy ciśnień Δp. Wadą pomiaru jest duża strata ciśnienia, podobnie jak w przypadku kryzy ISA z pomiarem przytarczowym oraz konieczność stosowania długich odcinków pomiarowych. Kryzy ISA z pomiarem ciśnienia w odległości D i $D/2$ zalecane są do stosowania w przypadku pomiarów dokładnych.

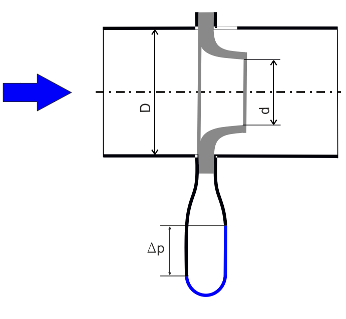


Rys. 13.3. Kryza ISA z przytarczowym pomiarem ciśnienia

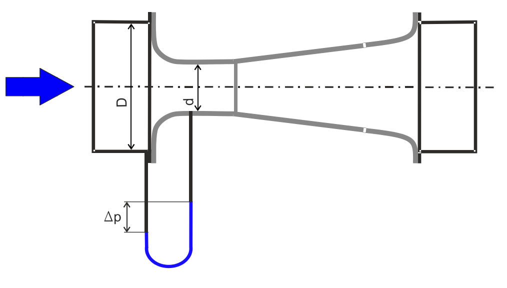


Rys. 13.4. Kryza ISA z pomiarem ciśnienia w odległości D i $D/2$

Tę samą kryzę ISA można stosować do pomiarów metodą przytarczową i vena contracta, po wykonaniu w odpowiednich odległościach otworów impulsowych do pomiaru ciśnienia różnicowego.



Rys. 13.5. Dysza ISA



Rys. 13.6. Dysza Venturiego

Dysze i dysze Venturiego

Dysze są przepływowymi zwężkami pomiarowymi składającymi się z dyszy oraz obudowy obejmująca otwory impulsowe do pomiaru ciśnienia różnicowego.

Dysza ISA jest to element dławiący, osiowo symetryczny. Część dyszy znajdująca się wewnątrz rurociągu ma kształt kołowy. Dysza składa się z części zbieżnej o zaokrąglonym kształcie i cylindrycznej gardzieli.

Dysza Venturiego ma kształt osiowo-symetryczny. Składa się ze zbieżnego wlotu o zaokrąglonym kształcie, cylindrycznej gardzieli i części rozbieżnej.

Dokładność pomiaru dyszami jest rzędu dokładności pomiaru kryzami ISA. W porównaniu z pomiarem kryzami mierzona różnica ciśnień jest mniejsza o około 40%, a trwały spadek ciśnienia jest mniejszy o 15 – 50%. Dysze są mniej wrażliwe na zanieczyszczenia i zaburzenia przepływu, ale trudniejsze do wykonania, montażu i demontażu oraz droższe. Z tego względu zaleca się stosować dysze tylko do pomiarów o dużej dokładności, w przypadku, gdy nie jest dopuszczalna duża strata ciśnienia.

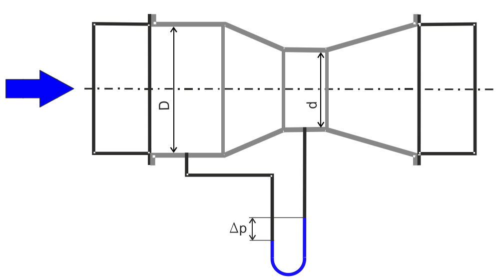
Na rysunkach 13.5 i 13.6 przedstawiono dyszę ISA i dyszę Venturiego.

Zwężka Venturiego

Klasyczna zwężka Venturiego jest urządzeniem, które składa się z walcowej części wlotowej połączonej ze stożkową częścią zbieżną (konfuzorem), walcowej gardzieli oraz stożkowej części rozbieżnej (dyfuzora). Otwory impulsowe umieszczone są w walcowej części wlotowej oraz gardzieli. Rodzaj znormalizowanych klasycznych zwężek Venturiego zależy od metody wykonania wewnętrznej powierzchni części wlotowej oraz kształtu przecięcia tej części z gardzielą.

Zwężka Venturiego powoduje małą stratę ciśnienia (o około 70% niższą niż dysza ISA) oraz wymaga 2 do 5 razy krótszego odcinka pomiarowego w porównaniu z kryzami i dyszami ISA. Klasyczną zwężkę Venturiego zaleca się stosować do pomiarów mniej dokładnych (głównie technicznych) w przypadkach, gdy niedopuszczalna jest duża strata ciśnienia powodowana przez kryzy lub dysze ISA.

Przekrój klasycznej zwężki Venturiego wzdłuż osi gardzieli pokazano na rysunku 13.7.



Rys. 13.7. Klasyczna zwężka Venturiego

13.2.4. Wyznaczenie strumienia płynu zwężką pomiarową

Strumień masy wyznaczany jest z zależności opisanej równaniem (13.1)

$$\dot{m} = \frac{C}{\sqrt{1-\beta^4}}\varepsilon\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2\Delta p\,\rho_1}, \tag{13.1}$$

gdzie: $\dot{m}$ – strumień masy [kg s^{-1}], C – współczynnik przepływu [-], β – współczynnik przewężenia zwężki [-], ε – liczba ekspansji [-], d – średnica zwężki [m], ρ_1 – gęstość płynu przed zwężką w temperaturze i pod ciśnieniem, dla którego wyznaczany jest strumień masy [kg m^{-3}], Δp – różnica ciśnień statycznych przed i za zwężką [Pa]. Wyrażenie $\frac{C}{\sqrt{1-\beta^4}}$ określa liczbę przepływu α danej zwężki.

Strumień objętości można obliczyć stosując równanie (13.2)

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho}, \tag{13.2}$$

gdzie: Q – strumień objętości [m^3 s^{-1}].

Liczba przepływu zwężki pomiarowej α wyznaczana jest w oparciu o teorię podobieństwa. Podobieństwo geometryczne zapewnia identyczność przewężeń zwężek. Przewężenie zwężki β jest jej charakterystycznym parametrem i stanowi stosunek średnicy otworu zwężki do średnicy rurociągu

$$\beta = \frac{d}{D}, \tag{13.3}$$

gdzie: d – średnica otworu zwężki [m], D – średnica rurociągu [m].

Ponadto zachowane musi być podobieństwo geometrii powierzchni wewnętrznej ścian rurociągu wyrażone stosunkiem Ra/D, gdzie Ra jest średnim arytmetycznym odchyleniem profilu chropowatości od linii średniej powierzchni wewnętrznej ścian rurociągu [m].

Warunkiem podobieństwa hydromechanicznego, tj. podobieństwa parametrów przepływu jest identyczność liczb Reynoldsa

$$Re_D = \frac{UD}{\nu}, \tag{13.4}$$

gdzie: Re_D – liczba Reynoldsa wyznaczona dla przepływu w rurociągu o średnicy D [-], ν – kinematyczny współczynnik lepkości [m^2 s^{-1}].

Współczynnik przepływu C charakteryzuje zależność między rzeczywistym, a teoretycznym strumieniem płynu. Podawany jest on w postaci zależności

$$C = f(\beta, Re_D) \tag{13.5}$$

dla określonego przedziału chropowatości wewnętrznej powierzchni rurociągu Ra/D. Współczynnik przepływu C dla kryzy ISA z przytarczowym pomiarem ciśnienia określony jest równaniem Stoltza

$$C = 0.5959 + 0.0312\beta^{2.1} - 0.1840\beta^3 + 0.0029\beta^{2.5}\left(\frac{10^6}{Re_D}\right)^{0.75}. \tag{13.6}$$

Ograniczenia stosowania równania Stoltza dotyczą stosowanych średnic zwężki d, średnic rurociągu D, współczynników przewężenia zwężek β, liczby Reynoldsa Re_D oraz chropowatości wewnętrznej powierzchni rurociągu Ra. Ograniczenia określone są następująco:

$$
\begin{aligned}
&d \geqslant 12.5 \text{ mm},\\
&50 \text{ mm} \leqslant D \leqslant 1000 \text{ mm},\\
&0.20 \leqslant \beta \leqslant 0.45 \quad \wedge \quad Re_D \geqslant 5000,\\
&0.45 \leqslant \beta \leqslant 0.75 \quad \wedge \quad Re_D \geqslant 10000.
\end{aligned}
$$

Niepewności pomiaru określone normą PN-EN ISO 5167-2 nie będą przekroczone, jeżeli chropowatość wewnętrznej powierzchni rurociągu będzie spełniać następujące wymagania: wartość średniego arytmetycznego odchylenia profilu chropowatości od linii średniej Ra jest taka, że wartość $10^4 Ra/D$ jest mniejsza od wartości maksymalnej podanej w tablicy 13.1 oraz większa od wartości minimalnej podanej w tablicy 13.2.

Tabela 13.1. Wartość maksymalna $10^4 Ra/D$

β	Re_D								
	$\leqslant 10^4$	$3 \cdot 10^4$	10^5	$3 \cdot 10^5$	10^6	$3 \cdot 10^6$	10^7	$3 \cdot 10^7$	10^8
$\leqslant 0.20$	15	15	15	15	15	15	15	15	15
0.30	15	15	15	15	15	15	15	14	13
0.40	15	15	10	7.2	5.2	4.1	3.5	3.1	2.7
0.50	11	7.7	4.9	3.3	2.2	1.6	1.3	1.1	0.9
0.60	5.6	4.0	2.5	1.6	1.0	0.7	0.6	0.5	0.4
> 0.65	4.2	3.0	1.9	1.2	0.8	0.6	0.4	0.3	0.3

Tabela 13.2. Wartość minimalna $10^4 Ra/D$

β	Re_D			
	$\leqslant 3 \cdot 10^6$	310^7	$3 \cdot 10^7$	10^8
$\leqslant 0.20$	0.0	0.0	0.0	0.0
0.60	0.0	0.0	0.003	0.004
> 0.65	0.0	0.013	0.016	0.012

W tablicy 13.3 podano przykłady chropowatości powierzchni wewnętrznej rurociągu Ra [mm] wg normy PN-76/M-34034

Ponieważ nie jest znana średnia prędkość przepływu, współczynnik przepływu C należy wyznaczyć w sposób iteracyjny. W pierwszym kroku należy założyć liczbę Reynoldsa Re_D. Na wstępnym etapie należy ją przyjąć w wysokości $Re_D = 10^6$, a wyliczoną na jej podstawie wartość współczynnika C' traktować jako przybliżoną. Dla wartości C' obliczamy strumień objętości Q, na podstawie którego wyznaczamy prędkość przepływu U z zależności

$$Q = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}}. \tag{13.7}$$

W następnym kroku wyznaczamy kolejną wartość liczby Reynoldsa Re_D i skorygowany współczynnik C''. W ten sposób postępujemy aż do momentu, kiedy ostateczne

Tabela 13.3. Chropowatość powierzchni wewnętrznej rurociągu Ra [mm]

Lp.	Materiał i rodzaj rury	Stan powierzchni i warunki eksploatacji	Ra [-]
1	Rury walcowane z miedzi, mosiądzu, brązu	gładkie	0.0015-0.010
	Rury walcowane z aluminium	gładkie	0.0015-0.060
2	Rury walcowane stalowe	nowe, nieużywane	0.02-0.10
		oczyszczone, eksploat. kilka lat	do 0.04
		nieznacznie skorodowane	0.4
		po kilku latach eksploatacji w różnych warunkach (skorodowane lub z niedużymi osadami)	0.15-1.0
		przewody wody w eksploatacji	1.2-1.5
3	Rury spawana stalowe	nowe lub stare w dobrym stanie, połączenia spawana lub zgrzewane	0.04-0.1
		będące w eksploatacji, powłoka częściowo usunięta, skorodowane	około 0.1
		będące w eksploatacji, równomiernie skorodowane	około 0.1
4	Rury żeliwne	nowe	0.25-1.0
		wodne, będące w eksploatacji	1.4
		będące w eksploatacji, skorodowane	1.0-1.5
		ze znacznymi osadami	2.0-4.0
		oczyszczone, po kilku latach eksploatacji	0.3-1.5
		silnie skorodowane	do 3.0

wyrażenie względny błąd określenia wartości współczynnika przepływu C będzie nie większy niż 0.001

$$\left|\frac{C' - C''}{C''}\right| \leqslant 0.001. \tag{13.8}$$

Liczba ekspansji ε (ściśliwości) koryguje błędy spowodowane przez przyjęcie stałej objętości właściwej płynu (przy dużym spadku ciśnienia należy uwzględnić efekt rozprężania). Liczba ekspansji jest wyznaczana w zależności od rodzaju zwężki, współczynnika przewężenia zwężki, ciśnienia różnicowego oraz charakterystyki płynu. Dla płynów nieściśliwych (cieczy) liczba ekspansji wynosi 1.

13.3. Doświadczenie

13.3.1. Stanowisko pomiarowe

Na stanowiskach pomiarowych wbudowano zwężki pomiarowe w proste odcinki rurociągu, który w czasie trwania doświadczenia jest całkowicie wypełniony płynem.

Dane instalacji na stanowisku laboratoryjnym do pomiaru strumienia objętości cieczy przy przepływie przez rurociąg

Na stanowisku wbudowano kryzę z przytarczowym pomiarem ciśnienia zgodnie z normą ISO/TR 15377:2007 Measurement of fluid flow by means of pressure-differential devices-Guidelines for the specification of orifice plates, nozzles and Venturi tubes beyond the scope of ISO 5167. Norma podaje warunki stosowania kryz wbudowanych w rurociągi o średnicach $25 \leqslant D < 50$ i przewężeniach kryz w granicach $0.23 \leqslant \beta \leqslant 0.7$.

Rurociąg – rura walcowana stalowa powierzchnia wewnętrzna nowa, użytkowana kilka lat średnica w temperaturze 20°C, D=40 mm,

Zwężka – średnica zwężki w temperaturze 20°C. d=24 mm.

Dane instalacji na stanowisku laboratoryjnym do pomiaru strat energii mechanicznej przy przepływie cieczy przez rurociąg

Na stanowisku wbudowano kryzę ISA z przytarczowym pomiarem ciśnienia zgodnie z normą PN-EN ISO 5167:2005 Pomiary strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych wbudowanych w całkowicie wypełnione rurociągi o przekroju kołowym. W części 2: Kryzy podane są warunki stosowania kryz wbudowanych w rurociągi o średnicach 50 mm $\leqslant D \leqslant$ 1000 mm i przewężeniach kryz w granicach $0.20 \leqslant \beta \leqslant 0.75$ (dla określonego zakresu liczb Reynoldsa Re_D).

Rurociąg – rura walcowana stalowa powierzchnia wewnętrzna po kilku latach eksploatacji skorodowana, z osadami średnica w temperaturze 20°C, D = 58 mm,

Zwężka – średnica zwężki w temperaturze 20°C, d=34.8 mm.

13.3.2. Przebieg eksperymentu

Na stanowisku pomiarowym należy zmierzyć spadek ciśnienia na zwężce pomiarowej odczytując na manometrze U-rurkowym różnicę napełnień rurek Δh. Manometry wypełnione są wodą (parametry cieczy manometrycznej zgodne z parametrami płynącej wody w rurociągu).

Pomiary dla różnych strumieni objętości należy zapisać w tabelach pomiarowych zgodnych z tabelami określonymi dla danych ćwiczeń laboratoryjnych.

13.4. Opracowywanie wyników pomiarów

13.4.1. Obliczenia

Obliczenia strumienia objętości wyznaczonego za pomocą zwężki pomiarowej należy wykonać zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 13.2.4.

Spadek ciśnienia na zwężce należy określić zgodnie z zależnością

$$\Delta p = \rho_c g \Delta h, \tag{13.9}$$

gdzie: Δp – spadek ciśnienia statycznego na zwężce pomiarowej [Pa], ρ_c – gęstość cieczy manometrycznej w warunkach pomiaru [$\mathrm{kg\,m^{-3}}$], Δh – spadek ciśnienia statycznego na zwężce pomiarowej odczytany na manometrze U-rurkowym [m].

Po określeniu współczynnik przepływu C do dalszych obliczeń przyjąć wyznaczoną na tej podstawie liczbę przepływu zwężki α.

13.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdania należy sporządzić zgodnie z instrukcjami podanymi dla danych ćwiczeń laboratoryjnych.

13.5. Pytania kontrolne

i. Opisać zasadę pomiaru strumienia płynu za pomocą zwężki pomiarowej.
ii. Scharakteryzować wybraną zwężkę pomiarową.

Bibliografia

[1] PN-EN ISO 5167:2005 Pomiary strumienia płynu za pomocą zwężek pomiarowych wbudowanych w całkowicie wypełnione rurociągi o przekroju kołowym. Część 1: Zasady I wymagania ogólne. Część 2: Kryzy. Część 3: Dysze i dysze Venturiego. Część 4: Klasyczna zwężka Venturiego.

[2] ISO/TR 15377:2007 Measurement of fluid flow by means of pressure-differential devices-Guidelines for the specification of orifice plates, nozzles and Venturi tubes beyond the scope of ISO 5167

[3] L. Kołodziejczyk, M. Rubik, S. Mańkowski, *Pomiary w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1974

[4] A. T. Troskolański, *Hydromechanika techniczna, t. III Pomiary wodne*, PWT, Warszawa, 1957

[5] H. Walden, J. Stasiak, *Mechanika cieczy i gazów w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1971

Rozdział 14

Pomiar prędkości przepływu wody w kanale otwartym

Marzena Banaszek

14.1. Cel ćwiczenia

Określenie prędkości średniej w przekroju poprzecznym kanału otwartego stanowi ważne zagadnienie przy rozwiązywaniu większości rozważań dotyczących przepływu cieczy rzeczywistej. Średnia prędkość przepływu jest jednym z podstawowych parametrów niezbędnych do wyznaczenia charakterystyk hydraulicznych kanałów otwartych takich jak: przepustowość kanału czy układ zwierciadła wody. Posługiwanie się uśrednionymi wartościami prędkości przepływu, zwłaszcza w przypadku naturalnych koryt rzecznych charakteryzujących się dużym zróżnicowaniem warunków przepływu, obarczone jest niepewnością (błędem). Stosowanie wzorów empirycznych jest konieczne w przypadku niewystarczającej liczby pomiarów prędkości w pełnym zakresie zmienności warunków przepływu lub braku danych z pomiarów bezpośrednich.

Pomiar prędkości cieczy płynącej w kanałach otwartych (naturalnych i sztucznych, takich jak np. koryta rzek, strumieni, kanały melioracyjne, sztolnie, itp.) można przeprowadzić różnymi metodami. Do najbardziej rozpowszechnionych należą pomiary wykonane za pomocą prędkościomierzy piętrzących, anemometrów lub termoanemometrów.

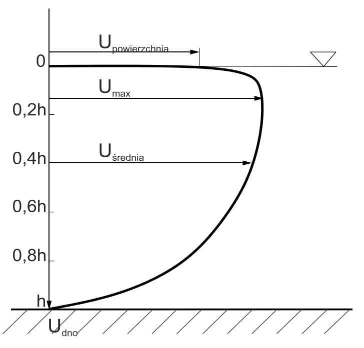
Celem ćwiczenia jest wyznaczenie rozkładu prędkości przepływu wody w wybranym pionie hydrometrycznym modelowego kanału otwartego przy pomocy różnych prędkościomierzy piętrzących, porównanie wartości prędkości średniej przepływu uzyskanej na drodze pomiarów z empirycznymi zależnościami podanymi w literaturze.

14.2. Wprowadzenie teoretyczne

14.2.1. Rozkład prędkości w przekroju hydrometrycznym

Przekrojem hydrometrycznym nazywamy przekrój poprzeczny kanału otwartego (kanału z powierzchnią swobodną) wybrany do pomiaru, prostoliniowy, regularny, wytyczony prostopadle do kierunku przepływu wody. W przekroju hydrometrycznym wyróżniamy linie pionowe i poziome, tzw. piony i poziomy hydrometryczne. Wykres przedstawiający rozkład prędkości w przekroju hydrometrycznym nazywa się tachoidą.

Rozkład prędkości w pionie hydrometrycznym nie jest równomierny. Najniższe prędkości przepływu występują przy dnie kanału, prędkość rośnie w kierunku zwierciadła wody osiągając wartości największe w strefie przypowierzchniowej. Prędkość maksymalna występuje nie na poziomie zwierciadła wody, a nieco poniżej, ze względu na opory występujące na granicy ośrodka woda-powietrze.



Rys. 14.1. Profil prędkości w pionie hydrometrycznym

Prędkość średnia w pionie hydrometrycznym może być określona zależnością

$$\bar{U} = \frac{\int_0^h U \, \mathrm{d}h}{h}. \tag{14.1}$$

Prędkość średnią można w praktyce określać za pomocą wzorów zależnych od wybranej, skróconej metody pomiarowej lub wzorów opracowanych przez Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej. Pomiary skrócone prędkości przepływu wody wykonywane są w wybranych punktach pionów hydrometrycznych. Poprzez zmniejszenie liczby punktów pomiarowych skraca się czas trwania pomiarów.

Stosuje się pomiary:

- jednopunktowe na głębokości $0.4\,h$, w których prędkość średnia przepływu jest zbliżona do prędkości mierzonej na głębokości $0.4\,h$

$$\bar{U} = U_{0.4h}, \tag{14.2}$$

- dwupunktowe na głębokościach $0.2\,h$ i $0.8\,h$, w których prędkość średnia przepływu jest zbliżona do średniej arytmetycznej prędkości mierzonej na głębokościach $0.2\,h$

i 0.8 h

$$\bar{U} = \frac{1}{2}\left(U_{0.2h} + U_{0.8h}\right), \tag{14.3}$$

gdzie h – głębokość wody w pionie hydrometrycznym mierzona od zwierciadła wody w kanale w kierunku dna [m].

W tabeli 14.1 podano skrócone wzory IMGW do obliczania prędkości średniej w pionie hydrometrycznym, gdzie U_d – prędkość zmierzona w pobliżu dna [$\mathrm{m\,s^{-1}}$], U_p – prędkość zmierzona przy powierzchni [$\mathrm{m\,s^{-1}}$].

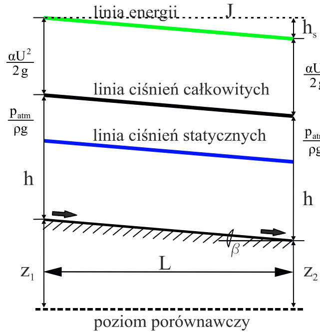
Tabela 14.1. Skrócone wzory IMGW do obliczania prędkości średniej w pionie hydrometrycznym. h – głębokość w pionie hydrometrycznym, $\bar{U}$ – prędkość średnia dla przepływu swobodnego

Lp.	h [m]	$\bar{U}$ [$\mathrm{m\,s^{-1}}$]
1	$h < 0.2$	$\bar{U} = U_{0.4h}$
2	$0.2 < h < 0.6$	$\bar{U} = \frac{1}{4}\left(U_{0.2h} + 2U_{0.4h} + U_{0.8h}\right)$
3	$h > 0.6$	$\bar{U} = \frac{1}{10}\left(U_d + 2U_{0.2h} + 3U_{0.4h} + 3U_{0.8h} + U_p\right)$

14.2.2. Wzory empiryczne określające średnią prędkość przepływu

W ruchu ustalonym jednostajnym parametry przepływu wzdłuż kanału są niezmienne w czasie. Ruch taki występuje w kanałach otwartych o jednorodnej chropowatości powierzchni dna i ścian, jednakowych przekrojach poprzecznych, jednostajnym spadku dna, stałym natężeniu przepływu oraz stałym napełnieniu.

Na rysunku 14.2 przedstawiono układ linii energii i linii ciśnień w ustalonym jednostajnym ruchu wody w kanałach otwartych.



Rys. 14.2. Układ linii ciśnień i linii energii w ustalonym jednostajnym ruchu wody w kanale otwartym

W ruchu ustalonym jednostajnym zwierciadło wody układa się równolegle do dna. Linia piezometryczna (linia ciśnień statycznych), linia ciśnień całkowitych oraz linia energii przebiega równolegle do zwierciadła wody. W ruchu wody w kanałach otwartych część energii mechanicznej strumienia zużyta jest na pokonanie oporów przepływu h_s

$$h_s = JL, \tag{14.4}$$

gdzie h_s – jest spadem hydraulicznym (stratą energii mechanicznej), określanym jako różnica rzędnych linii energii między oddalonymi o długość L przekrojami strumienia [m], J – spadek hydrauliczny jest wartością hydraulicznego spadu przypadającą na jednostkę długości kanału [-].

Spadek hydrauliczny wyznaczany jest z zależności

$$J = \frac{z_1 - z_2}{L} = i_d = i = \sin\beta \tag{14.5}$$

i równy jest spadkowi niwelacyjnemu dna i_d [-] oraz spadkowi zwierciadła swobodnego i [-].

Średnia prędkość przepływu wody w kanale otwartym wg Chezy'ego przedstawiona jest zależnością

$$\bar{U} = \sqrt{RJ}, \tag{14.6}$$

gdzie R – jest promieniem hydraulicznym, definiowanym jako stosunek pola powierzchni przekroju poprzecznego kanału A do obwodu zwilżonego L_0 [m]

$$R = \frac{A}{L_0} \tag{14.7}$$

(obwodem zwilżonym jest długość obrysu przekroju kanału stykająca się z wodą, do obwodu zwilżonego nie należy linia zwierciadła wody w tym przekroju), C – jest współczynnikiem prędkości Chezy'ego charakteryzującym opory przepływu w kanale otwartym zależny od promienia hydraulicznego oraz chropowatości ścian kanału [$\mathrm{m}^{\frac{1}{2}}\mathrm{s}^{-1}$].

Manning podał empiryczną zależność do obliczania średniej prędkości przepływu w kanałach otwartych. Formuła Manninga w postaci (14.8) uzależnia średnią prędkość przepływu od szorstkości dna i ścian kanału

$$\bar{U} = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} J^{\frac{1}{2}}, \tag{14.8}$$

gdzie n – współczynnik szorstkości dna i ścian kanału wprowadzony przez Manninga dla scharakteryzowania oporów przepływu [$\mathrm{m}^{-\frac{1}{3}}\mathrm{s}$].

Zależności między współczynnikami prędkości Chezy'ego, a współczynnikiem szorstkości Manninga dana jest zależnością

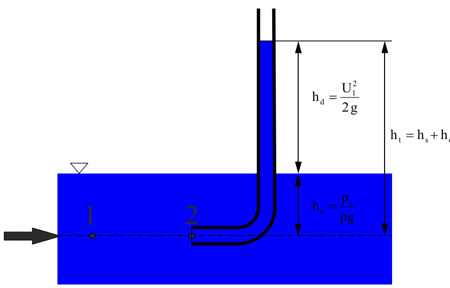
$$\bar{U} = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}. \tag{14.9}$$

Dla wyjątkowo gładkich powierzchni współczynnik szorstkości Manninga wynosi $n = 0.009$ [$\mathrm{m}^{-\frac{1}{3}}\mathrm{s}$]. Wzory Chezy'ego, Manninga są powszechnie stosowane w hydraulice rzecznej.

14.2.3. Rurka Pitota

Rurka Pitota jest przyrządem służącym do pomiaru prędkości poprzez pomiar ciśnienia całkowitego płynącego płynu. Rurka została skonstruowana i po raz pierwszy zaprezentowana w 1973 roku przez francuskiego inżyniera Henriego Pitota. Pierwotnie używana była do pomiaru prędkości wody na różnych głębokościach Sekwany.

W zastosowaniu do pomiaru prędkości cieczy płynącej w kanałach otwartych rurka Pitota jest szklaną rurką, o jednym ramieniu zagiętym pod kątem 90° i zwróconym wlotem w kierunku przepływu oraz drugim ramieniu pionowym. W ramieniu pionowym rurki ustala się słup wody o pewnej wysokości względem zwierciadła wody w kanale (rysunek 14.3), na podstawie którego wyznacza się średnią prędkość przepływu.



Rys. 14.3. Rurka Pitota

Średnia prędkość przepływu wyznaczana jest na podstawie równania Bernoulliego. Rurka Pitota umieszczona jest w jednostajnym przepływie płynu poruszającego się z prędkością U_1 pod ciśnieniem p_1. Strumień płynu opływając rurkę rozdziela się, a bezpośrednio przed nią (w punkcie 2) następuje spiętrzenie przepływu. W punkcie spiętrzenia prędkość przepływu jest równa zeru $U_2 = 0$. Dla rozpatrywanej linii prądu 1-2 można zapisać równanie Bernoulliego w postaci

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2, \tag{14.10}$$

gdzie U_1 – prędkość przepływu niezakłóconego [$\mathrm{m\,s^{-1}}$], U_2 – prędkość w punkcie spiętrzenia $U_2 = 0$ [$\mathrm{m\,s^{-1}}$], p_1 – ciśnienie w przepływie niezakłóconym [Pa], p_2 – ciśnienie w punkcie spiętrzenia [Pa], $z_1 - z_2$ – wysokość położenia punktów 1, 2 względem poziomu odniesienia [m], $z_1 = z_2 = 0$. Zatem

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho U_1^2}{2}. \tag{14.11}$$

Ciśnienie całkowite w punkcie spiętrzenia p_2 jest sumą ciśnienia statycznego w przepływie niezakłóconym p_s oraz ciśnienia dynamicznego p_d.

Prędkość przepływu U_1 wyznaczana jest z zależności (14.11)

$$U_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}, \tag{14.12}$$

gdzie ciśnienie statyczne określane jest z zależności (rysunek 14.3)

$$p_1 = \rho g h_s, \tag{14.13}$$

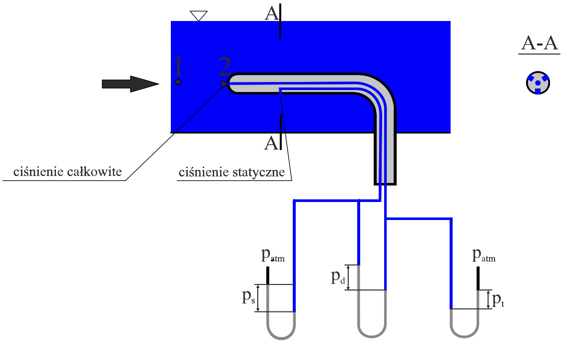
ciśnienie dynamiczne z zależności (rysunek 14.3)

$$p_2 - p_1 = \rho g h_d. \tag{14.14}$$

14.2.4. Rurka Prandtla

Rurka Prandtla, opracowana przez Henry Darcy'ego oraz Ludwiga Prandtla, jest udoskonaleniem wcześniejszego wynalazku Henriego Pitota, zwanego rurką Pitota.

Rurka Prandtla jest przyrządem służącym do pomiaru prędkości przepływu płynu poprzez pomiar ciśnienia całkowitego oraz statycznego. Składa się on z dwóch osadzonych w sobie rurek, z czego pierwsza wewnętrzna służy do badania ciśnienia całkowitego płynu, natomiast zewnętrzna do badania ciśnienia statycznego. Ciśnienie całkowite mierzone jest w otworku znajdującym się na półkolistej, czołowej części rurki połączonej z manometrem. Ciśnienie statyczne mierzone jest w otworkach umieszczonych w pewnej odległości od czoła rurki, w kilku symetrycznie rozmieszczonych otworkach na jej powierzchni. Ciśnienia odczytywane są na manometrach U-rurkowych.



Rys. 14.4. Rurka Prandtla

Ciśnienia odczytywane na manometrach (rysunek 14.4) wyznaczyć można z zależności:

- ciśnienie statyczne mierząc wysokość słupa h_s cieczy manometrycznej o gęstości ρ_m

$$p_s = p_1 - p_{atm} = \rho_m g h_s, \tag{14.15}$$

- ciśnienie dynamiczne mierząc wysokość słupa h_d cieczy manometrycznej o gęstości ρ_m

$$p_d = p_2 - p_1 = p_t - p_s = \rho_m g h_d, \tag{14.16}$$

- ciśnienie całkowite mierząc wysokość słupa h_t cieczy manometrycznej o gęstości ρ_m

$$p_t = p_2 - p_{atm} = \rho_m g h_t. \tag{14.17}$$

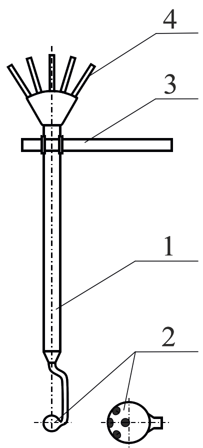
Prędkość przepływu U_1 wyznaczana jest na podstawie wzoru

$$U_1 = \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}. \tag{14.18}$$

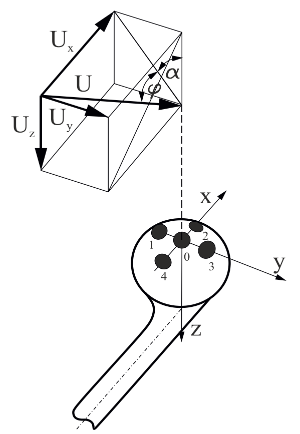
14.2.5. Sonda kulowa

Do określenia wektora prędkości płynącego czynnika, tj. jego kierunku w przestrzeni i wartości oraz ciśnienia całkowitego i statycznego w danym punkcie pomiarowym służy sonda kulowa pięciootworkowa. Czułkę sondy stanowi kulka o średnicy od 5 do 10 mm, w której nawierconych jest pięć otworków impulsowych. Od każdego otworka odchodzi rurka wyprowadzona przez trzon sondy na zewnątrz, połączona z manometrem U-rurkowym. Sondę umieszcza się w specjalnym uchwycie, który umożliwia obroty sondy w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Pomiar ciśnień w pięciu otworkach sondy oraz kąta ustawienia sondy umożliwia wyznaczenie wektora prędkości płynącego czynnika.

Na rysunku 14.5 przedstawiono sondę kulową pięciootworkową, na rysunku 14.6 oznaczenie kątów i składowych wektora prędkości.



Rys. 14.5. Sonda kulowa pięciootworkowa



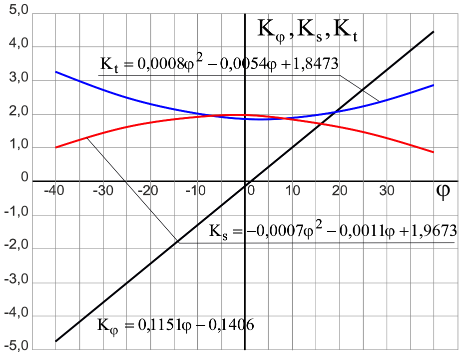
Rys. 14.6. Oznaczenie kątów i składowych wektora prędkości

Na rysunkach 14.8 i 14.8 przedstawiono charakterystyki sondy kulowej.

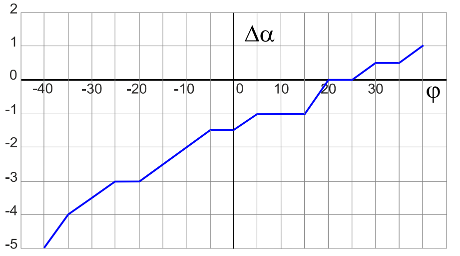
Sposób obliczenia parametrów przepływu sondą kulową pięciootworkową jest następujący:

1) Sondę należy ustawić tak, aby ciśnienia w otworkach 1 i 3 były jednakowe (wektor prędkości leży w płaszczyźnie symetrii otworków 2 i 3) i dla ustalonego położenia sondy odczytać kąt α. Określić ciśnienia w otworkach sondy p_{s0}, p_{s1}, p_{s2}, p_{s3}, p_{s4}
2) Wyznaczyć współczynnik K_φ z zależności

$$K_\varphi = \frac{p_{s4} - p_{s2}}{q}, \tag{14.19}$$



Rys. 14.7. Charakterystyka sondy kulowej: zależność współczynników $K_\varphi = K_\varphi(\varphi)$, $K_t = K_t(\varphi)$, $K_s = K_s(\varphi)$



Rys. 14.8. Charakterystyka sondy kulowej: zależność poprawki kąta α

gdzie

$$q = p_{s0} - \frac{p_{s3} + p_{s1}}{2}. \tag{14.20}$$

3) Na podstawie wyznaczonego K_φ z charakterystyki sondy $\varphi = \varphi(K_\varphi)$ podanej na rysunku 14.8 określić kąt φ.
4) Dla danego kąta φ z charakterystyki sondy określić wskaźnik ciśnienia statycznego K_s oraz wskaźnik ciśnienia całkowitego K_t. Na ich podstawie ciśnienie statyczne p_s i ciśnienie całkowite p_t wyznaczyć można z zależności

$$p_s = p_{s0} - qK_s, \tag{14.21}$$
$$p_t = p_{s0} - qK_t, \tag{14.22}$$
$$p_d = p_t - p_s. \tag{14.23}$$

5) Poprawka kąta α określona jest zależnością

$$\alpha_0 = \alpha + \Delta\alpha \tag{14.24}$$

i dana charakterystyką $\Delta\alpha = \Delta\alpha(\varphi)$ przedstawioną na rysunku 14.8.
Prędkość przepływu U wyznaczana jest na podstawie wzoru

$$U = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}. \tag{14.25}$$

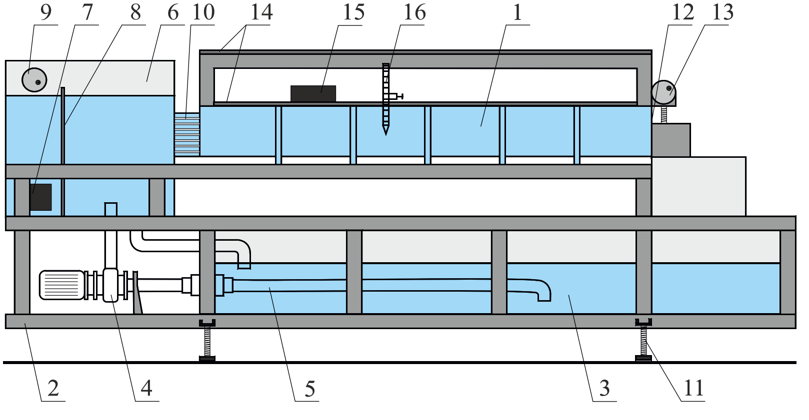
Określenie składowych wektora prędkości

$$U_x = U \sin\varphi, \tag{14.26}$$
$$U_y = U \cos\varphi \sin\alpha, \tag{14.27}$$
$$U_z = U \cos\varphi \cos\alpha. \tag{14.28}$$

14.3. Doświadczenie

14.3.1. Stanowisko pomiarowe

Zasadniczym elementem konstrukcyjnym modelowego kanału przepływowego jest komora pomiarowa (1), w której dokonuje się obserwacji modelowanych procesów, wizualizacji zjawisk przepływowych oraz realizuje pomiary. Kanał przepływowy jest wykonany z profili stalowych i posadowiony na konstrukcji nośnej (2). Wymiary kanału wynoszą: długość – 3000 mm, szerokość – 100 mm, wysokość – 400 mm. Przekrój kanału jest prostokątny. Ściany boczne wykonano z przezroczystych płyt akrylowych, umożliwiających bezpośrednią obserwację modelowanego procesu. Stanowisko pomiarowe pracuje w obiegu zamkniętym. Zbiornik główny (3) służy do poboru i zrzutu wody wypływającej z kanału przepływowego oraz magazynowania wody zasilającej stanowisko. Pompa wirowa (4) o odpowiedniej wydajności umożliwia transport wody rurociągiem (5) ze zbiornika głównego do zbiornika wyrównawczego (6). Zmiana prędkości obrotowej pompy regulowana jest za pomocą falownika (7). Zbiornik wyrównawczy wyposażony w przelew nadmiarowy (8) o regulowanej wysokości podnośnikiem śrubowym (9) zasila kanał przepływowy. Woda kierowana jest ze zbiornika wyrównawczego do kanału przepływowego przez system prostowników (10), których zadaniem jest uporządkowanie i uspokojenie przepływu. Zmiana położenia dna kanału możliwa jest poprzez regulację jego nachylenia (spadku hydraulicznego) podnośnikiem śrubowym (11). Na wylocie z kanału przepływowego znajduje się przelew prostokątny ostrokrawędziowy (12). Regulacja położenia przelewu za pomocą podnośnika (13) pozwala na zmianę głębokości przepływu. Szyny urządzenia pomiarowego (14) umożliwiają ruch wózka (15). Wózek jest konstrukcją, na której można montować odpowiednią aparaturę i urządzenia pomiarowe (np. rurki piętrzące Pitota, Prandtla, sondę kulową, szpilki hydrometrycznej, itp). Szpilka hydrometryczna (16) umożliwia precyzyjny pomiar rzędnej wysokości zwierciadła wody. Konstrukcja kanału przepływowego umożliwia montaż wymiennych modeli, np. modeli przelewów mierniczych.



Rys. 14.9. Stanowisko pomiarowe do badań modelowych przepływu w otwartym kanale wodnym

Na rysunku 14.9 przedstawiono schemat stanowiska pomiarowego do badań modelowych przepływu w otwartym kanale wodnym.

14.3.2. Przebieg eksperymentu

Pomiar wielkości służących do określenia rozkładu prędkości w pionie hydrometrycznym na stanowisku pomiarowym wykonywany jest przy pomocy wybranych urządzeń pomiarowych montowanych na pręcie pomiarowym w specjalnych uchwytach. Pomiary wykonuje się niezależnie od siebie.

Po przygotowaniu stanowiska do pomiarów uruchamia się pompę i falownikiem ustala odpowiednie natężenie przepływu.

Po umieszczeniu rurek piętrzących na określonej głębokości zanurzenia wlotu rurek w kanale należy zwrócić głowice rurek czołem w kierunku dopływającego wody, równolegle do kierunku przepływu. Głębokość zanurzenia odczytywana na podziałce milimetrowej pręta pomiarowego.

Rurką Pitota mierzona jest wysokość słupa wody powyżej zwierciadła wody w kanale i odczytywana na podziałce milimetrowej rurki.

Rurką Prandtla mierzone jest ciśnienie statyczne oraz ciśnienie całkowite za pomocą manometrów różnicowych U-rurkowych na ustalonych głębokościach zanurzenia wlotu rurki, odczytywanych na podziałce milimetrowej pręta pomiarowego. Cieczą manometryczną manometrów jest woda o parametrach ustalonych w trakcie pomiarów.

Sondą kulową pięciotworkową mierzone są ciśnienia w pięciu otworkach sondy. Otworki połączone są elastycznymi przewodami z manometrami wypełnionymi wodą (piezometrami). Parametry wody ustalane są w trakcie pomiaru. Kąt obrotu mierzony jest na podziałce kątowej zamontowanej przy uchwycie sondy. Czułka sondy powinna być oddalona od ścian kanału i dna o minimalną odległość równą 1.5 średnicy kulki (dla sondy o średnicy kulki 5 mm pierwszy punkt pomiarowy powinien znajdować się w odległości 8 mm mierzonej od ścian ograniczających kanał do osi czułki sondy). Procedura pomiaru sondą kulową podana jest w rozdziale 14.2.5.

Przygotowując stanowisko do kolejnego pomiaru natężenie przepływu regulowane jest za pomocą falownika. Wysokość napełnienia kanału regulowana jest wysokością ustawienia przelewu prostokątnego. Temperaturę wody mierzy się za pomocą termometru, a ciśnienie atmosferyczne odczytuje ze wskazań barometru.

Wyniki pomiarów należy umieścić w tabeli pomiarów.

14.4. Opracowanie wyników

14.4.1. Obliczenia

Wartości prędkości przepływu wyznaczone rurką Pitota uzyskamy mierząc wysokość ciśnienia statycznego h_s oraz ciśnienia dynamicznego h_d na określonej głębokości zanurzenia h. Ciśnienie statyczne, dynamiczne oraz prędkość przepływu wyznaczana jest z zależności (14.13), (14.2.3) oraz (14.12).

Wartości prędkości przepływu wyznaczone rurką Prandtla uzyskamy mierząc wysokość ciśnienia statycznego h_s oraz ciśnienia całkowitego h_t na określonej głębokości zanurzenia h manometrem U-rurkowym. Ciśnienie statyczne, całkowite, dynamiczne oraz prędkość przepływu wyznaczana jest z zależności (14.15), (14.17), (14.16) oraz (14.18).

Wartości prędkości przepływu wyznaczone sondą kulową pięciootworkową, umieszczoną na określonej głębokości zanurzenia h, uzyskuje się mierząc wysokości ciśnień H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 w otworkach sondy oraz kąt ustawienia sondy α postępując zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 14.2.5. Współczynnik K_φ oraz wartość ciśnienia q wyznacza się z zależności

$$K_\varphi = \frac{H_4 - H_2}{H_0 - H_1}, \tag{14.29}$$

$$q = H_) - H_1. \tag{14.30}$$

Na podstawie wyznaczonego K_φ z charakterystyki sondy $\varphi = \varphi(K_\varphi)$ podanej na rysunku 14.8 wyznacza się kąt φ. Dla danego kąta φ z charakterystyki sondy (rysunek 14.8) określa się wskaźnik ciśnienia statycznego K_s oraz wskaźnik ciśnienia całkowitego K_t. Na ich podstawie wyznacza się ciśnienie statyczne p_s, całkowite p_t oraz ciśnienie dynamiczne zależnościami

$$p_s = \rho g\,(H_0 - K_s(H_0 - H_1)) + p_{atm}, \tag{14.31}$$

$$p_t = \rho g\,(H_0 - K_t(H_0 - H_1)) + p_{atm}, \tag{14.32}$$

$$p_d = p_t - p_s. \tag{14.33}$$

Prędkość przepływu oraz jej składowe wyznaczyć można z zależności określonej wzorem (14.25), (14.26), (14.27), (14.28).

Wartości prędkości średniej uzyskamy planimetrując wykresy określające rozkład prędkości uzyskany za pomocą rurek piętrzących: rurki Pitota, Prandtla i sondy kulowej. Wartość średnią prędkości uzyskamy korzystając z zależności

$$\bar{U} = \frac{\int_0^h U\,\mathrm{d}h}{h} = \frac{A k_h k_U}{h}, \tag{14.34}$$

gdzie A – pole pod wykresem zależności $U = U(h)$ [m^2], k_h – podziałka skalująca wysokość h na wykresie, k_U – podziałka skalująca prędkość przepływu U na wykresie.

Wartości prędkości średniej uzyskane za pomocą wzorów literaturowych wyznaczamy korzystając z zależności:

- podanych przez IMGW wzorem (14.2),
- wzorem Chezy'ego wzorem (14.6) wraz z formułą Manninga (14.9).

Wyniki obliczeń należy zamieścić w tabeli wyników wg wzoru podanego w tablicy 14.2, 14.3, 14.4, 14.5.

Tabela 14.2. Tabela wyników: pomiar rurką Pitota

Lp.	$h = h_s$	h_d	p_s	p_d	p_t	U
	mm	mm	Pa	Pa	Pa	m/s
1						
2						
3						

Tabela 14.3. Tabela wyników: pomiar rurką Prandtla

Lp.	$h =$	Δh_s	Δh_t	p_s	p_t	p_d	U
	mm	mm	mm	Pa	Pa	Pa	m/s
1							
2							
3							

Tabela 14.4. Tabela wyników: pomiar sondą kulową pięciootworową

Lp.	$h =$	α_0	H_0	$H_1 = H_3$	H_2	H_4	K_φ	ϕ	α	K_s	K_t	p_s	p_t	p_d	U	U_x	U_y	U_z
	mm	deg	mm	mm	mm	mm	-	deg	deg	-	-	Pa	Pa	Pa	m/s	m/s	m/s	m/s
1																		
2																		
3																		

Tabela 14.5. Porównanie średnich prędkości przepływu uzyskanych z eksperymentu z prędkościami średnimi wyznaczonymi wzorami teoretycznymi

Rurka Pitota	Rurka Prandtla	Sonda kulowa	Wzór IMGW (rurka Pitota)	Wzór IMGW (rurka Prandtla)	Wzór IMGW (sonda kulowa)	Wzór Chezy'ego
$\bar{U}$ m/s	$\bar{U}$ m/s	$\bar{U}$ m/s	$\bar{U}$ m/s	$\bar{U}$ m/s	$\bar{U}$ m/s	$\bar{U}$ m/s

14.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać następujące elementy:
- stronę tytułową w/g podanego wzoru,
- wprowadzenie teoretyczne zawierające w szczególności charakterystykę wielkości wyznaczanej i opis metody pomiarowej,
- określenie celu ćwiczenia,
- schemat stanowiska pomiarowego,
- zestawienie wzorów i zależności użytych w obliczeniach wraz z objaśnieniami,
- zestawienie wyników pomiarów w formie załączonej karty pomiarów,
- zestawienie wyników obliczeń wraz ze szczegółowym tokiem obliczeń z podstawieniami do wzorów dla jednego pomiaru, wyniki obliczeń należy zamieścić wg wzoru podanego w tablicach,
- profile prędkości w dowolnym pionie hydrometrycznym, uzyskane dla określonego natężenia przepływu za pomocą rurki Pitota, rurki Prandtla oraz sondy kulowej pięciootworkowej,
- wyniki obliczeń średniej prędkości przepływu dla wyznaczonych rozkładów prędkości,
- porównanie średnich prędkości przepływu uzyskanych z eksperymentu z prędkościami średnimi wyznaczonymi wzorami teoretycznymi,
- uwagi końcowe i wnioski.

14.4.3. Pytania kontrolne

i. Przedstaw rozkład prędkości w pionie hydrometrycznym prostokątnego kanału otwartego.
ii. Omów pomiar prędkości przepływu rurką Pitota i Prandtla.

Bibliografia

[1] K. Jeżowiecka-Kabsch (red.), *Mechanika płynów*, Wyd. PWr., Wrocław, 1984

[2] L. Kołodziejczyk, M. Rubik, S. Mańkowski, *Pomiary w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1974

[3] Z. Orzechowski, J. Prywer, R. Zarzycki, *Mechanika płynów w inżynierii środowiska*, WNT, Warszawa, 2001

[4] A. T. Troskolański, *Hydromechanika techniczna, t. III Pomiary wodne*, PWT, Warszawa, 1957

[5] H. Walden, J. Stasiak, *Mechanika cieczy i gazów w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1971

Rozdział 15

Metody pomiaru i wyznaczania natężenia przepływu wody w kanałach otwartych – metoda pływakowa

Marzena Banaszek

15.1. Cel ćwiczenia

Pomiar natężenia przepływu dotyczy pomiaru ilości wody przepływającej przez poprzeczny przekrój kanału w jednostce czasu i odnosi się zazwyczaj do konkretnego przekroju. Wyniki natężenia przepływu są jedną z głównych informacji wykorzystywanych do opisu sytuacji hydrologicznej. Tworzone bazy danych pomiarów hydrologicznych przetwarzane są dla konkretnych zastosowań: m.in. w hydrotechnice, hydrologii, gospodarce wodnej, energetyce wodnej, itp. Wykorzystywane są m.in. do prognozowania zagrożeń (susza, stany powodziowe), kontrolowania stanu nawodnienia terenów objętych siecią kanałów melioracyjnych, prognozowania stanów krytycznych na terenach polderowych, sterowania zapasami wody w zbiornikach retencyjnych czy prognozowaniu stanów pracy dla energetyki wodnej i żeglugi śródlądowej.

Metody pomiaru natężenia przepływu dotyczą pomiarów wykonywanych w kanałach naturalnych (ciekach): rzekach, potokach, strumieniach, i kanałach sztucznych: kanałach żeglugowych, melioracyjnych, sztolniach, itp. Uwzględnia się w nich czas trwania pomiarów (metody okresowe, ciągłe), zakres stosowania (od bardzo małych cieków naturalnych lub sztucznych kanałów przepływowych do rzek o szerokościach osiągających setki metrów) oraz ich dokładność (rzędu 1-10% w zależności od metody). Rozwój urządzeń i aparatury pomiarowej ma przede wszystkim na celu zwiększenie dokładności prowadzonych pomiarów oraz zapewnienie ich rzetelności.

Celem ćwiczenia jest określenie średniej prędkości przepływu wody w modelowym kanale otwartym metodą pomiaru prędkość-powierzchnia za pomocą pływaków oraz wyznaczenie na podstawie tych pomiarów natężenia przepływu.

15.2. Wprowadzenie teoretyczne

15.2.1. Metody pomiaru natężenia przepływu w kanałach otwartych

Metody pomiaru i rejestracji parametrów przepływu (natężenia i prędkości) wody w kanałach otwartych oraz urządzenia pomiarowe, ich podział i stosowanie w zależności od stopnia zanieczyszczenia i agresywności wód określa norma branżowa BN/6210-04.

Natężenie przepływu wody w kanale otwartym może być mierzone metodą pośrednią: jednoparametrową lub wieloparametrową. Podział dokonywany jest według liczby zmiennych pomiarowych wykorzystywanych do obliczenia wartości natężenia przepływu; w metodach jednoparametrowych funkcja opisująca przepływ zależy od jednej zmiennej mierzonej (np. wysokości spiętrzenia w metodzie przelewowej), w metodach wieloparametrowych funkcja opisująca przepływ zależy od dwóch i więcej zmiennych mierzonych (np. wartości prędkości miejscowej i współrzędnych położenia punktu pomiarowego w przekroju hydrometrycznym).

Do metod jednoparametrowych zalicza się:
- metodę wolumetryczną, wagową,
- metodę przepustową, zwężkową, przelewową,
- metodę wskaźnikową.

Metodami wieloparametrowymi są:
- metoda odcinkowa (metoda pływakowa),
- metoda spadku podłużnego zwierciadła wody,
- metoda punktowa (metoda pomiaru prędkości młynkiem hydrometrycznym),
- metoda ultradźwiękowa, optyczna, elektromagnetyczna.

15.2.1.1. Metoda wolumetryczna (objętościowa)

Metoda wolumetryczna jest metodą polegającą na nieciągłym pomiarze objętości w jednostce czasu przy pomocy zbiorników pomiarowych, a następnie obliczeniu średniego natężenia przepływu z zależności $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, gdzie V – objętość przepływającego płynu przez daną powierzchnię [m^3], t – czas [s].

Zakres stosowania metody wolumetrycznej ogranicza się do odcinków cieków wodnych o małym przepływie, wypływów źródłowych, w których wypływ następuje zwartą strugą i wypływów źródłowych, z których można przechwycić całą wypływającą wodę. Zaletą tej metody jest prostota pomiaru, łatwość wykonania pomiarów w terenie i duża dokładność pomiarów (błąd względny pomiaru $< 1\%$), wadą natomiast jest jej ograniczone zastosowanie.

15.2.1.2. Metoda wagowa

Metoda wagowa polega na wyznaczeniu natężenia przepływu przez pomiar ciężaru wody i czasu. Natężenie przepływu stanowi iloraz ciężaru przez czas, jest średnim natężeniem przepływu ciężarowym. Metoda ta nadaje się do pomiaru małych przepływów wód, charakteryzuje się dużą dokładnością, lecz nie nadaje się do ciągłych pomiarów.

15.2.1.3. Metoda przepustowa

Metoda przepustowa jest metodą pomiaru przepływu przy pomocy przepustów (zasuw). Wypływ spod zasuwy może być niezatopiony (swobodny), jeżeli odskok hydrauliczny (próg wodny) powstanie w pewnej odległości od zasuwy lub zatopiony w przypadku powstania bezpośrednio za zasuwą odskoku zatopionego. Natężenie przepływu wyznacza się w oparciu o zależność $Q = Q(h)$, gdzie h jest wysokością przepustu [m].

Zaletą tej metody jest łatwość jej stosowania na jazach z regulowanymi zastawkami.

15.2.1.4. Metoda zwężkowa

Metoda zwężkowa jest metodą polegającą na miejscowym zwężeniu przekroju poprzecznego kanału otwartego i pomiarze wywołanej wysokości spiętrzenia. W kanały przepływowe wstawia się zwężki miernicze, tzw. koryta pomiarowe: np. koryta Parshalla, Venturiego, Parkera-Bowlusa. Natężenie przepływu jest funkcją wysokości spiętrzenia $Q = Q(h)$. Metoda ta nadaje się do ciągłego pomiaru przepływu wód.

15.2.1.5. Metoda przelewowa

Metoda przelewowa jest metodą wyznaczania natężenia przepływu polegającą na pomiarze swobodnego przekroju przelewowego i wysokości spiętrzenia wywołanego wstawieniem przegrody w przekrój kanału. Pomiar wysokości spiętrzenia wywołanego przez szczelną przegrodę ustawioną pionowo i prostopadle do osi cieku lub kanału; dla przelewu prostego (tj. usytuowanego prostopadle do osi cieku wodnego), nie zatopionego (tj. takiego, przy którym poziom wody dolnej znajduje się poniżej dolnej krawędzi przelewu) i o ostrej krawędzi, natężenie przepływu jest funkcją wysokości spiętrzenia $Q = Q(h)$, gdzie h jest wysokością spiętrzenia.

Do najczęściej stosowanych przelewów mierniczych należą:
- przelew prostokątny bez zwężenia bocznego (przelew Bazina),
- przelew prostokątny z obustronnym zwężeniem bocznym (przelew Ponceleta),
- przelew trapezowy (przelew Cipollettiego),
- przelew trójkątny (przelew Thomsona).

Metodę tę stosuje się do pomiaru małych i średnich natężeń przepływu wód od 0.0005 do 10 [$\mathrm{m^3 s^{-1}}$], przy czym dany przelew może pracować w dość wąskich granicach; w przypadku dużych amplitud wahań przepływu stosuje się przelewy kombinowane lub przelewy dwudzielne. Przelewy miernicze instaluje się na ciekach małych, ciekach o małych głębokościach i ciekach o małych prędkościach przepływu. Metoda nadaje się do ciągłych pomiarów oraz rejestracji.

15.2.1.6. Metoda wskaźnikowa

Metoda wskaźnikowa jest metodą pomiaru natężenia przepływu polegającą na wprowadzeniu zaburzenia w obszarze płynącej wody o określonym charakterze, np. termicznym, chemicznym, izotopowym i pomiarze zmian w przekroju hydrometrycznym położonym w określonej odległości poniżej miejsca zaburzenia. Miarą natężenia przepływu jest zmiana stanu, np. rozcieńczenie barwnika lub innej substancji chemicznej. Do metod tego rodzaju należą metody termiczne, chemiczne, elektryczne, kolorymetryczne i izotopowe.

Metoda kolorymetryczna. Metoda kolorymetryczna inaczej (metoda rozcieńczonego wskaźnika) jest metodą polegającą na pomiarze czasu przejścia wprowadzonego stężonego barwnika między obranymi przekrojami hydrometrycznymi położonymi w określonej odległości od siebie (metoda nadaje się do pomiarów okresowych) lub polegająca na pomiarze ilości i stężenia wprowadzanego barwnika oraz pomiarze rozcieńczenia jego w przekroju hydrometrycznym położonym w określonej odległości od miejsca wprowadzenia zaburzenia (metoda nadaje się do pomiarów ciągłych i rejestracji). Zawartość danej substancji oznaczana jest na podstawie intensywności zabarwienia jej roztworu i porównaniu z barwą roztworów wzorcowych tej substancji. Natężenie barwy roztworu jest ściśle związane ze stężeniem zawartej w nim substancji barwnej. Najczęściej stosowanym wskaźnikiem (substancją barwiącą) jest fluoresceina barwiąca wodę na zielono; stosuje się ją ze względu na posiadanie barwy nawet przy bardzo dużych rozcieńczeniach rzędu 1:10000000. Przyrządem pomiarowym jest kolorymetr. Metoda pomiarowa stosowana jest na ciekach o dużej burzliwości przepływu, co gwarantuje wymieszanie wskaźnika w całej objętości przepływającej wody; burzliwym przepływie występującym w ciekach o dużym spadku zwierciadła i dużej chropowatości dna, czyli w małych rzekach i potokach na terenach górskich.

Metoda termoelektryczna. Metoda termoelektryczna jest metodą polegającą na pomiarze czasu przejścia zaburzenia termicznego przez dwa przekroje hydrometryczne położone w określonej odległości od siebie. Zaburzeniem jest dawkowana ciecz o temperaturze wyższej od temperatury płynącej wody, a czas przejścia zaburzenia sygnalizowany jest na urządzeniach pomiarowych umieszczonych w przekrojach hydrometrycznych. Metoda nadaje się do pomiarów okresowych. W przypadku wprowadzenia do przepływu cieczy gorącej można też mierzyć temperaturę mieszaniny cieczy doprowadzonej i wody płynącej w przekroju hydrometrycznym położonym w określonej odległości od miejsca wprowadzenia zaburzenia. Taka metoda nadaje się do pomiarów ciągłych i rejestracji.

Metoda chemiczna. Metoda chemiczna jest metodą pomiaru stężenia roztworu soli wtryskiwanego do przepływającej wody. Natężenie przepływu wyznacza się na podstawie pomiaru stopnia stężenia roztworu soli w badanej próbce i porównaniu otrzymanej wartości z wartością stężenia soli we wtryskiwanym roztworze.

Metoda chemiczno-elektryczna. Metoda chemiczno-elektryczna (metoda Allena, metoda chmur soli) jest metodą wykorzystującą zmianę przewodnictwa elektrycznego wody czystej i zasolonej. Natężenie przepływu wyznacza się na podstawie rejestracji wzrostu przewodnictwa elektrycznego podczas przejścia przez wybrane przekroje hydrometryczne dawki stężonego roztworu soli (chmury solnej).

Metodę chemiczną i chemiczno-elektryczną stosuje się w ciekach, w których następuje zupełne wymieszanie się wtryśniętej dawki roztworu soli z płynącą wodą: w strumieniach i rzekach górskich, w miejscach w których nie zachodzi obawa wchłonięcia soli przez zawiesiny w wodzie, ściany koryta cieku lub rośliny wodne. Metoda nadaje się do pomiarów okresowych.

Metoda izotopowa. Metoda izotopowa polega na pomiarze czasu przejścia dawki izotopu między dwoma przekrojami hydrometrycznymi położonymi w określonej odległości od siebie. Określona dawka izotopu o krótkim czasie połowicznego rozpadu zostaje wprowadzona do płynącej wody. Pomiar opiera się na bezpośrednim pomiarze licznikiem Geigera-Müllera aktywności promieniotwórczej cieku lub poborze próbek wody i pomiarze ich aktywności. Metoda nadaje się do pomiarów okresowych.

15.2.1.7. Metody prędkość-powierzchnia

Metody prędkość-powierzchnia są metodami opartymi o pomiar prędkości i przekroju poprzecznego kanału (przekroju hydrometrycznego).

W przypadku metod wykorzystujących pomiar pola prędkości, aby wyznaczyć natężenie przepływu należy określić przekrój hydrometryczny oraz zmierzyć prędkości w kilkunastu wybranych punktach tego przekroju. Do pomiaru średniej prędkości przepływu można użyć pływaków, do pomiaru miejscowego prędkości służą młynki hydrometryczne oraz prędkościomierze piętrzące: rurki, pazury, cylindry i kule piętrzące.

15.2.1.8. Metoda odcinkowa: pływakowa

Metoda pływakowa wyznaczenia prędkości miejscowej za pomocą pływaka opiera się na pomiarze obranego odcinka drogi przebytego przez pływak i czasu. Do pomiaru prędkości przepływu używane są pływaki powierzchniowe, głębinowe i całkujące.

Metoda służy do wstępnej, zgrubnej oceny wartości natężenia przepływu, a jej dokładność wynosi 8-10%.

15.2.1.9. Metoda spadku podłużnego zwierciadła wody

Obliczanie natężenia przepływu na podstawie spadku podłużnego zwierciadła wody jest stosowane w sytuacjach, gdy inne metody pomiarowe nie mogą być zastosowane lub są trudne do wykonania. Warunki takie występują najczęściej przy wysokich stanach wód, które nie pozwalają na pomiar za pomocą np. młynka hydrometrycznego. W tej metodzie do obliczenia przepływu niezbędne są informacje dotyczące przekrojów poprzecznych na wybranym odcinku (przynajmniej 3 przekrojów) cieku oraz spadek zwierciadła wody na tym odcinku.

15.2.1.10. Metoda punktowa (metoda pomiaru prędkości młynkiem hydrometrycznym)

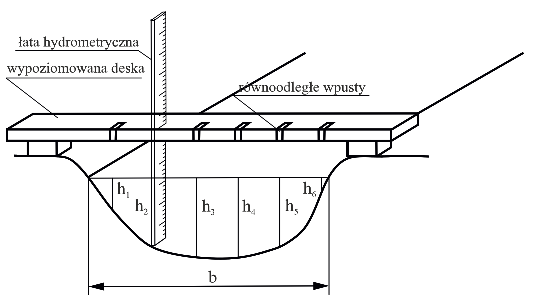
Młynek hydrometryczny jest przyrządem do pomiaru lokalnej prędkości przepływu. Wirnik młynka posiada łopatki w kształcie czarek, skrzydełek, śruby. Obroty wirnika generują impulsy elektryczne, które zliczane są przez pewien czas. Wyniki zliczania służą do wyznaczenia prędkości wody na podstawie krzywych wzorcowania przyrządu. Przemieszczając młynek w kierunku pionowym i poziomym w szereg położeń (o określonych współrzędnych w przekroju hydrometrycznym), można uzyskać pole prędkości w przekroju, a następnie obliczyć natężenie przepływu.

15.2.1.11. Metoda ultradźwiękowa, optyczna, elektromagnetyczna

Metoda ultradźwiękowa. Metoda ultradźwiękowa (akustyczna) opiera się na analizie wpływu strumienia wody na warunki propagacji fali ultradźwiękowej transmitowanej w strefie pomiarowej kanału przepływowego. Może być wykorzystywana do pomiaru przepływów cechujących się występowaniem zmiennego kierunku (np. spowodowanego występowaniem cofki). Zapewnia dobrą dokładność pomiaru, dla kanału sztucznego niepewność pomiaru nie przekracza 0.5%, dla cieku naturalnego ok. 1%.

Metoda optyczna. Metoda optyczna bazuje na śledzeniu ruchu zawirowań cząstek stałych, zawiesin itp. w przekroju strumienia cieczy lub na swobodnej powierzchni cieku. Wśród tej grupy najpopularniejsza jest metoda PIV (ang. Particle Image Velocimetry) oraz metody anemometrii laserowej LA (ang. Laser Anemometry).

Metoda elektromagnetyczna. Metoda elektromagnetyczna jest metodą, w której pomiar prędkości przepływu oparty jest na prawie Faradaya. Wiąże ono wartość potencjału elektrycznego indukowanego w strefie pomiarowej przepływomierza z wektorem prędkości wody i wektorem indukcji magnetycznej pola wzbudzanego w strefie pomiarowej. Sygnałem pomiarowym w przepływomierzu elektromagnetycznym jest różnica potencjałów mierzona na elektrodach umieszczonych na przeciwległych brzegach kanału przepływowego.



Rys. 15.1. Pomiar pola przekroju poprzecznego kanału

15.2.2. Pomiar prędkości średniej za pomocą pływaków

Metoda pływakowa jest metodą odcinkową, opartą o pomiar średniej prędkości przepływu i przekroju poprzecznego kanału. Pomiar średniej prędkości przepływu w kanałach otwartych polega na pomiarze czasu przebycia określonego odcinka drogi przez pływak. Do pomiaru prędkości przepływu używane są pływaki powierzchniowe, głębinowe i całkujące.

Odcinek cieku, na którym ma być przeprowadzony pomiar pływakowy powinien być prostoliniowy, o długości przynajmniej trzykrotnie większej od szerokości cieku.

Pomiar pola powierzchni przekroju poprzecznego kanału otwartego polega na pomiarze uśrednionej wielkości przekroju poprzecznego kanału (rysunek 15.1).

Pomiaru szerokości kanału dokonuje się za pomocą liny lub wypoziomowanej deski. W odpowiednich odległościach od brzegu kanału mierzy się jego głębokość. Pomiar głębokości przeprowadza się przy użyciu łat hydrometrycznych, sond drążkowych (sztywne drążki drewniane lub metalowe z podziałką centymetrową, zaopatrzone w dolnym końcu w talerz i krótki kolec, co pozwala na ich dobre oparcie o dno), sond ciężarkowych (obciążniki zawieszone na linie stalowej).

Pole przekroju poprzecznego dzieli się na szereg trapezów i wyznacza z zależności

$$A = b\sum_{i=1}^{n}\frac{h_{i-1}+h_i}{2}, \tag{15.1}$$

gdzie: A – całkowite pole poprzeczne kanału [m^2], b – szerokość kanału [m], h_i – głębokość kanału w miejscu sondowania [m].

15.2.2.1. Pływak powierzchniowy

Pływak powierzchniowy najczęściej wykonany jest z materiału o gęstości mniejszej niż gęstość wody (np. styropianu, korka, drewna balsa, itp.). Najprostszy pływak to krążek wykonany z suchego drewna o średnicy 10-20 cm. Stosuje się również butelki częściowo napełnione wodą w takiej ilości, aby nad wodą wystawała tylko szyjka butelki. Dokładność pomiaru pływakami powierzchniowymi wynosi 8-15%.

Zakres stosowania pływaków powierzchniowych ogranicza się do cieków płynących ze stosunkowo niewielką prędkością, cieków o małym przepływie (niską prędkością przepływu i małym przekrojem poprzecznym) lub do cieków, na których trzeba wykonać pomiary w krótkim czasie. W tym celu ustala się maksymalną prędkość powierzchniową przepływu.

Metoda pomiaru polega określeniu prędkości przepływu kilkunastu pływaków. Do określenia średniej prędkości przepływu wybiera się dwa pływaki, które najszybciej przepłynęły odcinek pomiarowy. Największa prędkość powierzchniowa jest średnią arytmetyczną prędkości ruchu dwóch wybranych pływaków, przy czym różnica prędkości tych pływaków nie może przekroczyć 10%. Prędkość średnią w mierzonych przekrojach na szerokości kanału wyznacza się z zależności

$$\bar{U} = 0.85\bar{U}_p, \tag{15.2}$$

gdzie $\bar{U}_p$ jest średnią największą prędkością powierzchniową [m s^{-1}].

Natężenie przepływu otrzymamy mnożąc średnią prędkość przepływu przez średnią wielkość przekroju poprzecznego kanału

$$Q = \bar{U}A. \tag{15.3}$$

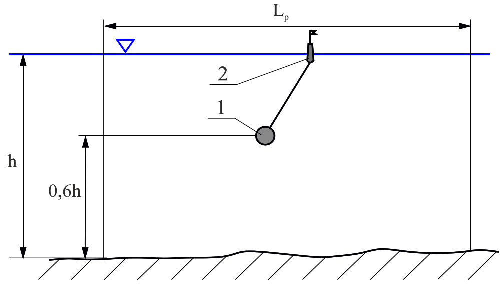
15.2.2.2. Pływak głębinowy

Układ pomiarowy z pływakiem głębinowym składa się z pływaka powierzchniowego (2), który podtrzymuje i wskazuje ruch połączonego z nim pływaka zanurzonego

(1). Pływak powierzchniowy jest znacznie mniejszy niż pływak zanurzony, można przyjąć, że wskazuje on prędkość strumienia cieku na głębokości ruchu pływaka zanurzonego. Pływak zanurzony porusza się w płaszczyźnie równoległej do zwierciadła wody na głębokości około 0.6 h (h – odległość od dna). Mierzona prędkość jest średnią prędkością przepływu wody w pionie hydrometrycznym. Średnią prędkość otrzymamy korzystając z zależności

$$\bar{U} = \frac{L_p}{t}, \tag{15.4}$$

gdzie L_p – odcinek przebyty przez pływak zanurzony (głębinowy) [m], t – czas przebycia odcinka L_p [s].



Rys. 15.2. Pływak głębinowy

Natężenie przepływu otrzymamy mnożąc średnią prędkość przepływu przez średnią wielkość przekroju poprzecznego kanału.

15.2.2.3. Pływak całkujący

Pływak całkujący składa się z kuli (1) o średnicy 2-4 cm wykonanej z materiału o gęstości mniejszej od gęstości wody (np. styropianu, korka, drewna balsa, itp.). Kulę przymocowuje się nicią (4) przeprowadzoną pod dolną częścią prowadnicy (2) i łączy z liną (3). Po zanurzeniu prowadnicy do wody i szarpnięciu liny następuje zerwanie nici, a kula zaczyna wypływać na powierzchnię. Kula wypływając przechodzi przez wszystkie punkty znajdujące się na różnych głębokościach kanału, a jej średnia prędkość przemieszczania się wzdłuż kierunku przepływu jest zbliżona do średniej prędkości przepływu. Mierząc odległość od punktu zanurzenia pływaka do miejsca ukazania się go na powierzchni wody oraz czas od chwili przerwania nitki do ukazania się na powierzchni wody można wyznaczyć średnią prędkość przepływu z zależności

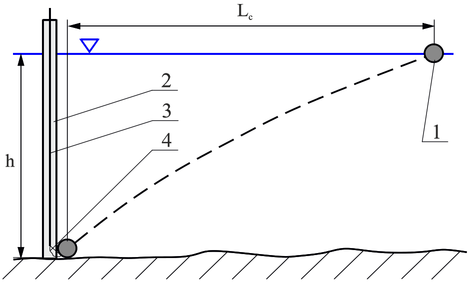
$$\bar{U} = \frac{L_c}{t}, \tag{15.5}$$

gdzie L_c – odległość od punktu zanurzenia pływaka do miejsca ukazania się go na powierzchni wody [m], t – czas od chwili przerwania nitki do ukazania się na powierzchni wody [s].

Natężenie przepływu otrzymamy mnożąc średnią prędkość przepływu przez średnią wielkość przekroju poprzecznego kanału.

W wyniku pomiaru średniej prędkości przepływu za pomocą pływaka całkującego uzyskuje się bardziej dokładne wyniki niż przy pomiarze innymi rodzajami pływaków.

Metoda pływakowa pomiaru średniej prędkości przepływu w kanałach otwartych za pomocą pływaków powierzchniowych, głębinowych oraz całkujących służy do wstępnej, zgrubnej oceny wartości natężenia przepływu, a jej dokładność wynosi 8-10%.



Rys. 15.3. Zasada pomiaru średniej prędkości przepływu pływakiem całkującym

15.3. Doświadczenie

15.3.1. Stanowisko pomiarowe

Eksperyment przeprowadza się na stanowisku pomiarowym omówionym w rozdziale *Pomiar prędkości przepływu wody w kanale otwartym*.

15.3.2. Przebieg eksperymentu

Po przygotowaniu stanowiska do pomiarów uruchamia się pompę i falownikiem ustala odpowiedni przepływ.

Wysokość napełnienia kanału reguluje się ustawieniem przelewu mierniczego. Pomiary prędkości przepływu należy wykonać dla różnych wysokości napełnień kanału: od 50 mm do 300 mm, ustalając głębokość napełnienia za pomocą przymiaru liniowego.

Pływakiem powierzchniowym, głębinowym oraz całkującym mierzony jest czas przebycia przez pływak odcinka pomiarowego. Czas mierzony jest stoperem. Odcinek pomiarowy ustala się w komorze pomiarowej kanału za pomocą przymiaru liniowego.

Temperaturę wody mierzy się za pomocą termometru, a ciśnienie atmosferyczne odczytuje ze wskazań barometru.

Wyniki pomiarów należy umieścić w tabeli pomiarów.

15.4. Opracowanie wyników

15.4.1. Obliczenia

Pływakiem powierzchniowym, głębinowym oraz całkującym mierzony jest czas przebycia przez pływak odcinka pomiarowego. Na podstawie pomiarów z zależności (15.2), (15.4), (15.5) określana jest średnia prędkość przepływu.

Pole przekroju poprzecznego kanału wyznaczamy mierząc szerokość kanału oraz głębokość jego napełnienia h [m].

Natężenie przepływu wyznaczamy z zależności (15.3).

Wyniki obliczeń należy zamieścić w tabeli wyników wg wzoru podanego w tablicy 15.1.

Tabela 15.1. Wyniki obliczeń natężenia przepływu za pomocą pływaków

	Pływak pow.	Pływak głęb.	Pływak całk.
Ust. falownika [%]			
Szer. kanału b [m]			
Głęb. napełnienia h [m]			
Pole przekroju A [m^2]			
Odcinek pom. [m]			
Średni odcinek pom. [m]			
Czas [s]			
Średni czas [s]			
Nat. przepływu Q [m^{3}s^{-1}]			

15.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać następujące elementy:

- stronę tytułową w/g podanego wzoru,
- wprowadzenie teoretyczne zawierające w szczególności charakterystykę wielkości wyznaczanej i opis metody pomiarowej,
- określenie celu ćwiczenia,
- schemat stanowiska pomiarowego,
- zestawienie wzorów i zależności użytych w obliczeniach wraz z objaśnieniami,
- zestawienie wyników pomiarów w formie załączonej karty pomiarów,
- zestawienie wyników obliczeń wraz ze szczegółowym tokiem obliczeń z podstawieniami do wzorów dla jednego pomiaru, wyniki obliczeń należy zamieścić wg wzoru podanego w tablicy 15.1,
- wyniki obliczeń średniej prędkości przepływu dla pomiarów pływakiem powierzchniowym, głębinowym, całkującym,
- wyniki obliczeń średniego natężenia przepływu dla wyznaczonych prędkości średnich,

– uwagi końcowe i wnioski.

15.4.3. Pytania kontrolne

i. Omów dwie dowolne metody jednoparametrowe pomiaru natężenia przepływu w kanałach otwartych.
ii. Omów wady i zalety stosowania metod typu prędkość – powierzchnia do pomiaru natężenia przepływu.

Bibliografia

[1] BN-72/6210-04, *Metody pomiarów przepływu w kanałach otwartych – podział i stosowanie*, Wyd. Normalizacyjne, Warszawa: 2014

[2] L. Kołodziejczyk, M. Rubik, S. Mańkowski, *Pomiary w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1974

[3] Z. Orzechowski, J. Prywer, R. Zarzycki, *Mechanika płynów w inżynierii środowiska*, WNT, Warszawa, 2001

[4] A. T. Troskolański, *Hydromechanika techniczna, t. III Pomiary wodne*, PWT, Warszawa, 1957

[5] H. Walden, J. Stasiak, *Mechanika cieczy i gazów w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1971

Rozdział 16

Wyznaczanie natężenia przepływu wody za pomocą młynka hydrometrycznego

Marzena Banaszek

16.1. Cel ćwiczenia

Wśród tradycyjnych metod pomiaru natężenia przepływu metodą typu prędkość-powierzchnia młynek hydrometryczny, obok łaty hydrometrycznej i pływaków, jako jedyny jest wykorzystywany w praktyce pomiarowej do dnia dzisiejszego i obejmując największy zakres pomiarowy.

Celem ćwiczenia jest określenie pola prędkości przepływu wody w modelowym kanale otwartym metodą pomiaru prędkość-powierzchnia za pomocą młynka hydrometrycznego oraz wyznaczenie na podstawie tych pomiarów natężenia przepływu.

16.2. Wprowadzenie teoretyczne

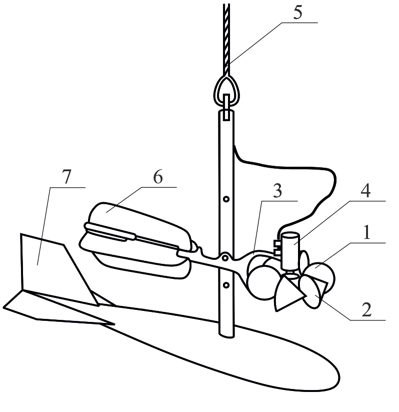
16.2.1. Młynek hydrometryczny

W praktyce hydrometrycznej stosuje się różne rodzaje młynków, które różnią się między sobą wymiarami, kształtem korpusu, rodzajem łopatek, szczegółami konstrukcyjnymi, jak również sposobem mocowania podczas pomiarów. Różnorodność konstrukcji młynków wynika z możliwość ich stosowania w różnych warunkach przepływu, przy różnych prędkościach, różnych wielkościach cieku, itp. Młynki ze względu na konstrukcję osi dzielą się na młynki z osią poziomą i pionową. Wirnik o osi poziomej stanowić mogą łopatki lub elementy o kształcie śrubowym w postaci skrzydełek, natomiast wirnik o osi pionowej stanowią koła łopatkowe lub czasze stożkowe umieszczone na pierścieniu. Obecnie najbardziej rozpowszechnionymi młynkami hydrometrycznymi są młynki czarkowe oraz młynki śrubowe.

Prowadzenie młynka podczas pomiaru możliwe jest za pomocą drążka (pręta), liny z obciążnikiem, ramy (statywu) oraz na obiekcie pływającym (na stałej głębokości). Młynek wprowadzany jest do płynącej wody z pomostu, tratwy pomiarowej wyposażonej w wysięgniki oraz wciągarkę, mostu, itp. Przy pomiarach natężenia przepływu w kanałach dopływowych turbin wodnych pomiar wykonywany jest najczęściej w całej płaszczyźnie poziomej. Na specjalnie zaprojektowanej ramie umieszcza się kilkanaście młynków podłączonych do rejestratora. Po wykonaniu pomiarów w jednej płaszczyźnie, rama przesuwana jest w kolejną pozycję pomiarową.

16.2.1.1. Młynek czarkowy

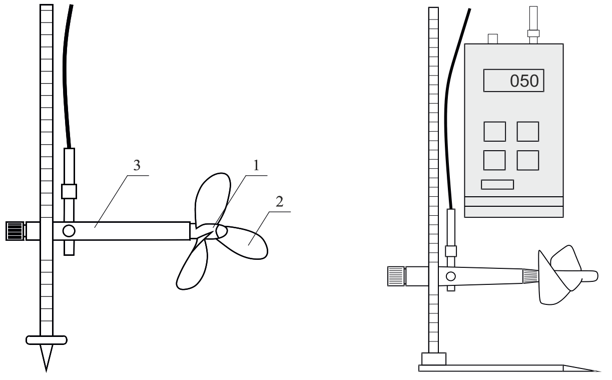
Młynek czarkowy (rysunek 16.1) składa się z wirnika (1) o osi ustawionej w kierunku prostopadłym do kierunku przepływu cieczy. Łopatki wirnika mają kształt stożkowych czarek (2), osadzone są na wspólnej osi i łożyskowane w sztywnym jarzmie (3). Obroty wirnika zliczane są w urządzeniu stykowym (4) zamykającym obwód elektryczny co kilka obrotów wirnika, co powoduje generowanie impulsów elektrycznych w urządzeniu odbiorczym. Urządzenie stykowe umieszczone jest w wodoszczelnej obudowie. Młynek opuszcza się na linie (5) do wody tak, aby oś wirnika młynka ustawiona była prostopadle do kierunku przepływu. Stabilizację młynka w wodzie zapewniają płetwy stabilizacyjne (6). Napięcie liny zapewniające pionowe ustawienie młynka w wodzie wywołane jest przez odpowiednio duży obciążnik (7) o opływowym kształcie. Młynek można także ustawiać w wodzie na sztywnym pręcie wbitym w dno rzeki lub kanału.



Rys. 16.1. Młynek czarkowy

16.2.1.2. Młynki łopatkowe

Młynki łopatkowe (rysunek 16.2) składają się z wirnika (1), osadzonego na osi równoległej do kierunku przepływu. Łopatki wirnika (2) w kształcie skrzydełek lub w kształcie śruby połączone są z piastą. W obudowie (3) znajduje się urządzenie stykowe, przekazujące impulsy co kilkanaście lub kilkadziesiąt obrotów wirnika. W przypadku pomiaru przepływów nieustalonych stosuje się przekaźniki przekazujące impulsy z każdym obrotem wirnika.



Rys. 16.2. Młynek łopatkowy: różne konstrukcje

16.2.1.3. Zalety i wady młynków hydrometrycznych

Młynki łopatkowe w porównaniu z młynkami czarkowymi:
- wprowadzają mniejsze zaburzenia przepływu,
- są mniej wrażliwe na wiry, co związane jest z osiową symetrią przepływu,
- charakteryzują się mniejszym tarciem w łożyskach ze względu na brak momentu zginającego oś wirnika,
- przeznaczone są pomiaru wyższej prędkości przepływu niż młynki czarkowe,
- ze względu na mniejszą średnicę wirnika umożliwiają pomiar prędkości bliżej ścian kanału,
- są mniej wrażliwe na zanieczyszczenia i zawiesiny zawarte w wodzie,
- dokładność pomiaru jest wyższa (szczególnie przy skośnym napływie wody na wirnik),
- próg rozruchowy młynków łopatkowych jest wyższy niż młynków czarkowych (wirnik młynka łopatkowego zaczyna się obracać przy wyższej prędkości przepływu).

16.2.1.4. Charakterystyka młynka hydrometrycznego

Zasada pomiaru prędkości przepływu za pomocą młynka polega na rejestracji obrotów wirnika w określonym czasie n [obr s^{-1}]. Prędkość przepływu wody jest funkcją prędkości obrotowej wirnika $U = U(n)$

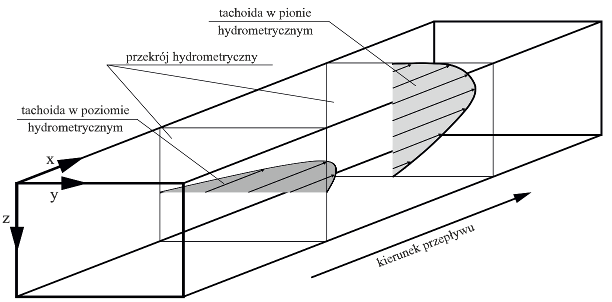
$$U_i = \alpha + \beta n, \tag{16.1}$$

gdzie U_i – prędkość lokalna przepływu [m s^{-1}], α, β – współczynniki tarowania młynka, n – prędkość obrotowa wirnika młynka [obr s^{-1}].

16.2.2. Metody obliczeniowe przepływu

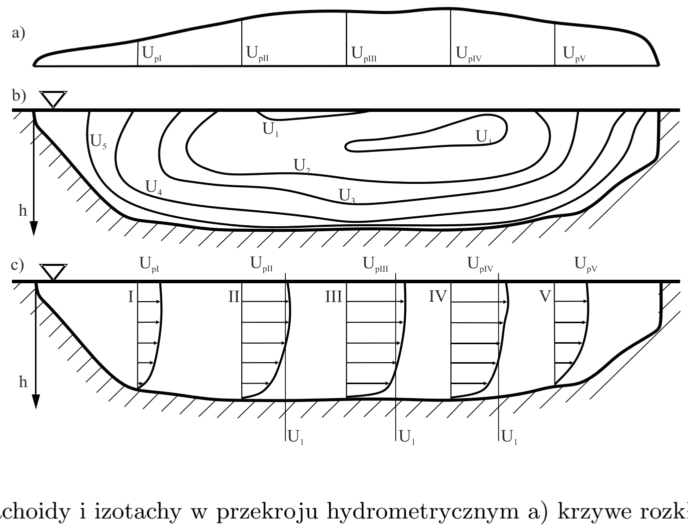
Pomiar miejscowy prędkości za pomocą młynków hydrometrycznych oraz prędkościomierzy piętrzących pozwala na wyznaczenie pól prędkości w przekroju hydrometrycznym kanału.

Na rysunku 16.3 przedstawiono rozkłady prędkości (tachoidy) w przekroju hydrometrycznym (w pionie i poziomie hydrometrycznym).



Rys. 16.3. Rozkłady prędkości w przekroju hydrometrycznym prostokątnego kanału

Przekrój hydrometryczny dzieli się na cząstkowe przekroje pionowymi płaszczyznami umieszczonymi w jednakowych odległościach od siebie. Ilość płaszczyzn zależy od przekroju (im bardziej nieregularny przekrój tym większa ilość płaszczyzn dzieląca dany przekrój). W kilku punktach każdego pionowego przekroju (I, II, itd.) dokonuje się pomiaru składowej prędkości miejscowej, równoległej do osi kanału. Wektory prędkości nanosi się na rysunek w odpowiedniej podziałce i dla każdego przekroju pionowego łączy się końce wektorów prędkości za pomocą linii ciągłej (rysunek 16.4c) uzyskując tachoidy $U = U(h)$ w kolejnych pionach hydrometrycznych (rysunek 16.4b).



Rys. 16.4. Tachoidy i izotachy w przekroju hydrometrycznym a) krzywe rozkładu prędkości na powierzchni swobodnej (prędkości powierzchniowej), b) izotachy, c) krzywe rozkładu prędkości $U = U(h)$ w przekroju hydrometrycznym (tachoidy)

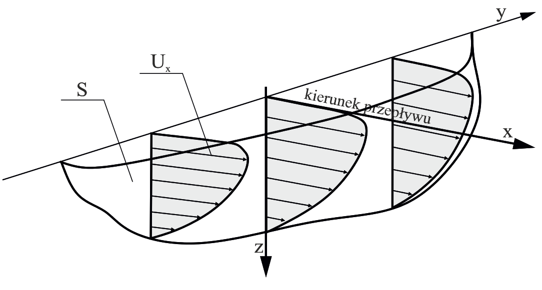
Sposób wykreślania izotach polega na przecięciu wykresów $U = U(h)$ (rysunek 16.4c) prostymi pionowymi odpowiadającymi określonej prędkości, np. $U = U_1$. Punkty przecięcia się tych linii z krzywymi U=U(h) określone są odciętą równą położeniu płaszczyzny pionowej (I, II, . . .) i rzędnej równej położeniu płaszczyzny poziomej wyznaczającej położenie h. W punkcie tym wartość prędkości wynosi U_1. Wartość tą przenosimy na rysunek 16.4b. Postępując w ten sposób tworzymy izotachy (krzywe stałej prędkości).

Wartość natężenia przepływu w kanale naturalnym można wyznaczyć za pomocą wyrażenia (16.2), po wcześniejszym wyznaczeniu składowych wektorów prędkości w kierunku osi x (rysunek 16.5)

$$Q = \iint_S \vec{U} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \iint_{S_{xy}} U_x\, \mathrm{d}S. \tag{16.2}$$

W praktyce przekrój przepływowy dzieli się na pola cząstkowe, dokonuje się pomiaru składowych prędkości miejscowych w kierunku osi x w odpowiednich punktach tych pól. Następnie wyznacza się wartość natężenia przepływu metodą rachunkową lub wykreślną.

W przypadku metod wykreślnych największe zastosowanie znalazły metody Culmanna, Harlachera i znormalizowana.

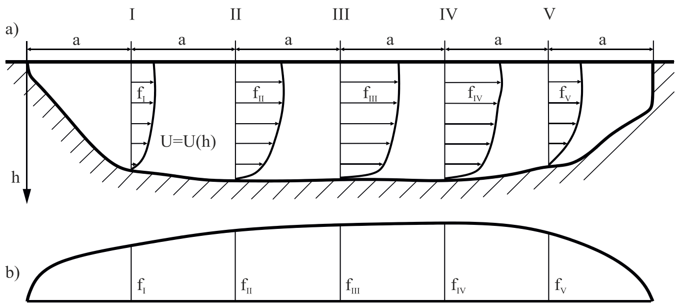


Rys. 16.5. Rozkład prędkości w pionach hydrometrycznych kanału naturalnego

16.2.2.1. Metoda Culmanna

Na rysunku 16.6 przedstawiono sposób wyznaczania objętości bryły przepływu metodą Culmanna.

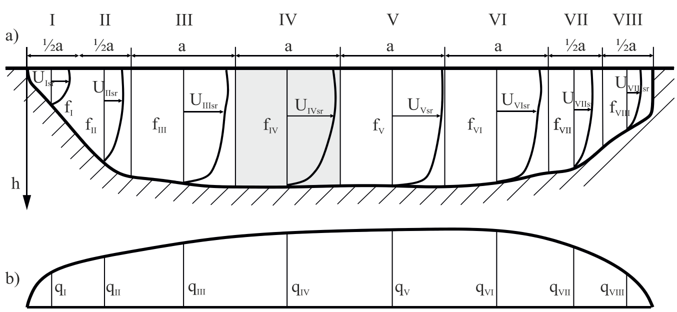
Przekrój hydrometryczny dzieli się na cząstkowe przekroje pionowymi płaszczyznami oddalonymi od siebie o jednakową odległość a. W kilku punktach każdego pionowego przekroju (I, II, itd.) na głębokościach $h = h_1$, $h = h_2$, $h = h_3$, . . . dokonuje się pomiaru składowej prędkości miejscowej $U = U(h_1)$, $U = U(h_2)$, $U = U(h_3)$, . . . równoległej do osi kanału. Wektory prędkości nanosi się na rysunek w odpowiedniej podziałce i dla każdego przekroju pionowego łączy się końce wektorów prędkości za pomocą linii ciągłej uzyskując tachoidy (rysunek 16.6a). Pola powierzchni pod krzywymi U=U(h) w pionach hydrometrycznych przenosi się w postaci odcinków na wykres obrazujący krzywe natężenia przepływu, na wysokości odpowiednich płaszczyzn (rysunek 16.6b). Końce tych odcinków łączy się linią ciągłą. Natężenie przepływu jest proporcjonalne do całkowitego pola powierzchni wykresu (rysunek 16.6b), a podziałka wykresu jest współczynnikiem proporcjonalności.



Rys. 16.6. Wyznaczanie objętości bryły przepływu metodą Culmanna a) krzywe rozkładu prędkości $U = U(h)$ w przekroju hydrometrycznym, b) krzywe natężeń przepływu

16.2.2.2. Metoda Harlachera

Na rysunku 16.7 przedstawiono sposób wyznaczania objętości bryły przepływu metodą Harlachera.



Rys. 16.7. Wyznaczanie objętości bryły przepływu metodą Harlachera a) krzywe rozkładu prędkości $U = U(h)$ w przekroju hydrometrycznym, b) krzywe natężeń przepływu

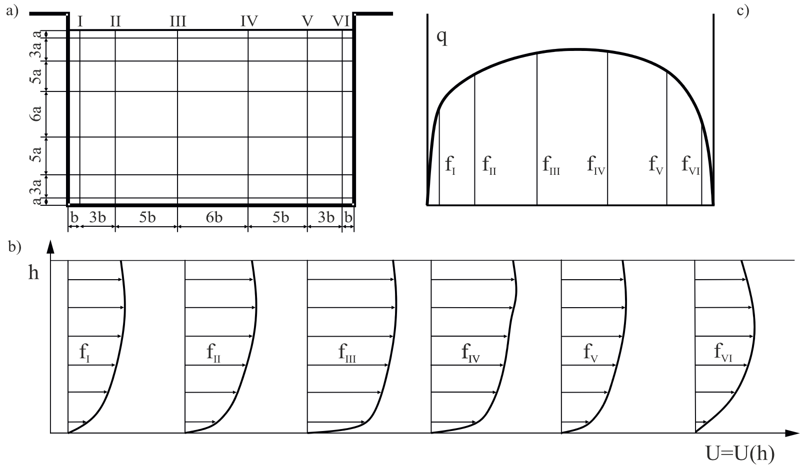
Przekrój hydrometryczny dzieli się na cząstkowe przekroje pionowymi płaszczyznami oddalonymi od siebie o jednakową odległość a. Pola skrajne dzieli się dodatkowo na połowę. Po pomiarze prędkości miejscowej $U_i = U(h_i)$ na kilku głębokościach hi uzyskuje się tachoidy w pionach hydrometrycznych (rysunek 16.7a). Prędkość w pionie uśrednia się do wartości U_{isr} (rysunek 16.7a). Mnożąc średnią prędkość przepływu U_{isr} przez średnią głębokość kanału h_{isr} pola cząstkowego f_i uzyskuje się wartość cząstkowego natężenia przepływu q_i. Odcinki odpowiadające wartościom q_i rysuje się na wykresie (rysunek 16.7b) na wysokości środka odpowiednich pól cząstkowych. Końce odcinków łączy się linią ciągłą, a pole powierzchni wykresu jest pomnożone przez podziałkę wykresu jest natężeniem przepływu.

16.2.2.3. Metoda znormalizowana

Przekrój hydrometryczny dzieli się na cząstkowe przekroje pionowymi i poziomymi płaszczyznami oddalonymi od siebie o ściśle określoną odległość (rysunek 16.8a). W punktach przecięcia się tych płaszczyzn mierzy się prędkości miejscowe. Ilość punktów pomiarowych wyznacza się z zależności

$$14\sqrt{F} \leqslant i \leqslant 25\sqrt{F}, \tag{16.3}$$

gdzie F – jest polem przekroju przepływowego [m^2].



Rys. 16.8. Wyznaczanie objętości bryły przepływu metodą znormalizowaną a) rozmieszczenie punktów pomiarowych w przekroju hydrometrycznym, b) krzywe rozkładu prędkości $U = U(h)$ w pionie hydrometrycznym, c) krzywa jednostkowych natężeń przepływu

Wyniki pomiarów prędkości miejscowych przedstawia się dla każdego pionu hydrometrycznego w postaci wykresu $U = U(h)$ (rysunek 16.8b). Pola pod wykresami funkcji planimetruje się, a otrzymane wyniki przenosi się na wykres przedstawiający rozkład cząstkowych natężeń przepływu (rysunek 16.8c). Pole powierzchni tego wykresu, pomnożone przez podziałkę wykresu jest natężeniem przepływu.

16.2.2.4. Podziałka wykresu

Przy wykorzystywaniu metod wykreślnych, wszelkie występujące wielkości przedstawia się na wykresach w określonej podziałce. Aby znaleźć rzeczywistą wartość szukanej wielkości, należy wartość otrzymaną graficznie przemnożyć przez odpowiednią podziałkę.

Sposób postępowania określono dla wyznaczenia natężenia przepływu metodą Culmanna. Przyjęto następujące podziałki dla wymiarów liniowych:
– szerokość kanału, gdzie $1\,\mathrm{cm} = 0.25\,\mathrm{m}$, $k_a = 0.25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}}$,
– głębokość kanału, gdzie $1\,\mathrm{cm} = 0.25\,\mathrm{m}$, $k_a = 0.25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}}$,

– prędkość przepływu, gdzie $1\,\mathrm{cm} = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $k_U = 0.1\,\frac{\mathrm{m\,s^{-1}}}{\mathrm{cm}}$,
– rzędna wykresu rozkładu natężenia przepływu, gdzie $1\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}^2$, $k_f = 10\,\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}}$.
Podziałka wykresów rozkładów prędkości

$$k_p = k_h k_U = 0.25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}}0.1\frac{\mathrm{m\,s^{-1}}}{\mathrm{cm}} = 0.025\frac{\mathrm{m^2\,s^{-1}}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Podziałka dla rzędnych wykresu natężeń cząstkowych

$$k_q = k_p k_f = 0.025\frac{\mathrm{m^2\,s^{-1}}}{\mathrm{cm}^2}0.1\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}} = 0.25\frac{\mathrm{m^2\,s^{-1}}}{\mathrm{cm}}.$$

Podziałka wykresu natężenia przepływu

$$k_Q = k_q k_a = 0.25\frac{\mathrm{m^2\,s^{-1}}}{\mathrm{cm}}0.25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}} = 0.0625\frac{\mathrm{m^3\,s^{-1}}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Przykładowo, dla określonego pola powierzchni $F = 100\,\mathrm{cm}^2$ natężenie przepływu wyniesie

$$Q = k_Q F = 0.0625\frac{\mathrm{m^3\,s^{-1}}}{\mathrm{cm}^2}100\,\mathrm{cm}^2 = 6.25\,\mathrm{m^3 s^{-1}}.$$

16.3. Doświadczenie

16.3.1. Stanowisko pomiarowe

Eksperyment przeprowadza się na stanowisku pomiarowym omówionym w rozdziale *Pomiar prędkości przepływu wody w kanale otwartym.*

16.3.2. Przebieg eksperymentu

Po przygotowaniu stanowiska do pomiarów uruchamia się pompę i falownikiem ustala odpowiedni przepływ.

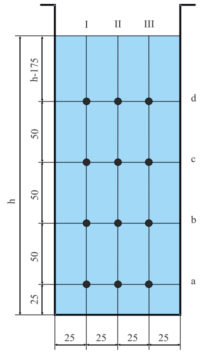
Wysokość napełnienia kanału reguluje się ustawieniem przelewu mierniczego. Napełnienie mierzy się za pomocą przymiaru liniowego.

Przekrój hydrometryczny modelowego kanału otwartego i rozmieszczenie punktów pomiarowych pokazano na rysunku 16.9.

Pomiary prędkości w określonych punktach pomiarowych wykonuje się przy użyciu młynka śrubowego. Młynek należy zainstalować na pręcie pomiarowym, wyposażonym w podstawę stabilizującą jego położenie. Po ustawieniu młynka na odpowiedniej wysokości od końca pręta pomiarowego, należy wpuścić młynek do wody i dokonać pomiarów lokalnej prędkości przepływu w poziomie hydrometrycznym. Po wykonaniu pomiarów w pierwszym poziomie, należy ustawić młynek na głębokości odpowiadającej kolejnemu poziomowi hydrometrycznemu i wykonać kolejne pomiary.

Temperaturę wody mierzy się za pomocą termometru, a ciśnienie atmosferyczne odczytuje ze wskazań barometru.

Wyniki pomiarów należy umieścić w tabeli pomiarów.



Rys. 16.9. Rozmieszczenie punktów pomiarowych w przekroju hydrometrycznym modelowego kanału otwartego

16.4. Opracowanie wyników

16.4.1. Obliczenia

Opierając się na rysunku 16.4 i instrukcji wykonywania rozkładów prędkości w pionach hydrometrycznych należy:

– wyznaczyć krzywe rozkładu prędkości $U = U(h)$ (tachoidy) w pionach hydrometrycznych I, II, III,
– wyznaczyć krzywe rozkładu prędkości w poziomach hydrometrycznych a, b, c, d wraz z rozkładem prędkości powierzchniowej (prędkość powierzchniową należy ekstrapolować),
– wyznaczyć izotachy, tj. krzywe stałej prędkości, przynajmniej dla trzech wartości prędkości przepływu.

Postępując podobnie jak w opisanych metodach Culmanna, Harlachera i znormalizowanej, dla zdefiniowanych pionów i poziomów hydrometrycznych, wyznaczyć natężenie przepływu wybraną przez siebie metodą. Przy wyznaczaniu natężenia przepływu wykonać rysunki pomocnicze krzywych natężeń przepływu, określając odpowiednie podziałki.

16.4.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać następujące elementy:

– stronę tytułową w/g podanego wzoru,
– wprowadzenie teoretyczne zawierające w szczególności charakterystykę wielkości wyznaczanej i opis metody pomiarowej,
– określenie celu ćwiczenia,
– schemat stanowiska pomiarowego,
– zestawienie wzorów i zależności użytych w obliczeniach wraz z objaśnieniami,
– zestawienie wyników pomiarów w formie załączonej karty pomiarów,
– zestawienie wyników obliczeń wraz ze szczegółowym tokiem obliczeń z podstawie-

niami do wzorów dla jednego pomiaru, wyniki obliczeń należy zamieścić wg wzoru podanego w tablicy,
- wykresy krzywych rozkładu prędkości $U = U(h)$ (tachoid) w pionach hydrometrycznych I, II, III,
- wykresy krzywych rozkładu prędkości w poziomach hydrometrycznych a, b, c, d wraz z rozkładem prędkości powierzchniowej,
- wykresy izotach, tj. krzywych stałej prędkości, przynajmniej dla trzech wartości prędkości przepływu,
- wykresy pomocnicze krzywych natężeń przepływu dla wybranej metody wyznaczania natężenia przepływu,
- wartość natężenia przepływu jako wynik całkowania graficznego wykresu pomocniczego,
- uwagi końcowe i wnioski.

16.4.3. Pytania kontrolne

i. Omów budowę i zasadę pomiaru prędkości przepływu za pomocą młynka hydrometrycznego.
ii. Opisz graficzną metodę wyznaczania izotach na podstawie punktowego określania prędkości lokalnej przepływu.

Bibliografia

[1] BN-72/6210-04, *Metody pomiarów przepływu w kanałach otwartych – podział i stosowanie*, Wyd. Normalizacyjne, Warszawa: 2014

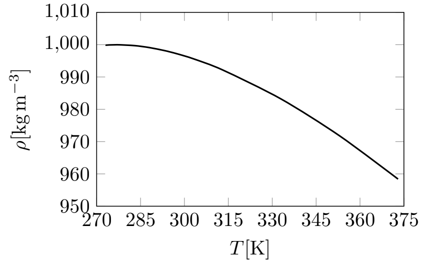
[2] L. Kołodziejczyk, M. Rubik, S. Mańkowski, *Pomiary w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1974

[3] A. T. Troskolański, *Hydromechanika techniczna, t. III Pomiary wodne*, PWT, Warszawa, 1957

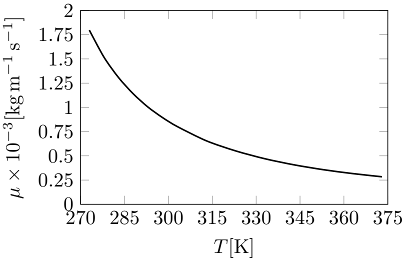
[4] H. Walden, J. Stasiak, *Mechanika cieczy i gazów w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa, 1971

[5] *Jak zbudować mała elektrownię wodną*, Poradnik inwestora. Europejskie Stowarzyszenie Małej Energetyki Wodnej: ESHA 2010

Dodatek A
Właściwości wody



Rys. A.1. Gęstość wody w funkcji temperatury



Rys. A.2. Współczynnik lepkości dynamicznej wody w funkcji temperatury

Tabela A.1. Właściwości wody

T [K]	$\mu\,[\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}]$	$\rho\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$	T [K]	$\mu\,[\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}]$	$\rho\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$
278	$1.518 \cdot 10^{-3}$	999.96	291	$1.055 \cdot 10^{-3}$	998.60
279	$1.471 \cdot 10^{-3}$	999.94	292	$1.029 \cdot 10^{-3}$	998.41
280	$1.427 \cdot 10^{-3}$	999.90	293	$1.004 \cdot 10^{-3}$	998.21
281	$1.385 \cdot 10^{-3}$	999.85	294	$0.980 \cdot 10^{-3}$	997.99
282	$1.345 \cdot 10^{-3}$	999.78	295	$0.958 \cdot 10^{-3}$	997.77
283	$1.307 \cdot 10^{-3}$	999.70	296	$0.936 \cdot 10^{-3}$	997.54
284	$1.271 \cdot 10^{-3}$	999.61	297	$0.915 \cdot 10^{-3}$	997.30
285	$1.236 \cdot 10^{-3}$	999.50	298	$0.895 \cdot 10^{-3}$	997.05
286	$1.202 \cdot 10^{-3}$	999.38	299	$0.875 \cdot 10^{-3}$	996.79
287	$1.170 \cdot 10^{-3}$	999.25	300	$0.856 \cdot 10^{-3}$	996.52
288	$1.140 \cdot 10^{-3}$	999.10	301	$0.838 \cdot 10^{-3}$	996.24
289	$1.110 \cdot 10^{-3}$	998.95	302	$0.820 \cdot 10^{-3}$	995.95
290	$1.082 \cdot 10^{-3}$	998.78	303	$0.803 \cdot 10^{-3}$	995.65