

Metody numeryczne – II stopień

Krzysztof Tesch

WIMiO
Politechnika Gdańska

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis płynu na różnych poziomach skal

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis ruchu płynu związany jest z jego budową, obserwowanymi skalami i uproszczeniami w jej postrzeganiu. Wyróżnia się:

- Opis mikroskopowy (MD)
- Opis mezoskopowy (kinetyczna teoria gazów, DPD)
- Opis makroskopowy (klasyczna mechanika płynów)

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis mikroskopowy płynu związany jest bezpośrednio z molekularną budową materii. Rozważany jest ruch wszystkich molekuł przy wykorzystaniu drugiej zasady dynamiki Newtona

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{G}_i + \sum_{j=1 \neq i}^N \mathbf{f}_{ij} \quad (1)$$

Siły działające na molekułę: siły zewnętrzne $\mathbf{G}_i$ i siły wzajemnego oddziaływania $\mathbf{f}_{ij} = -\nabla V$ często wyrażane przez potencjał Lennarda–Jonesa.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

$$V = 4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{\|\mathbf{r}\|} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\|\mathbf{r}\|} \right)^6 \right) \quad (2)$$

Potencjał składa się z części repulsywnej związanej z $\|\mathbf{r}_{ij}\|^{-12}$ i atraktywnej $\|\mathbf{r}_{ij}\|^{-6}$. $\|\mathbf{r}\|$ oznacza odległość między molekułami, ϵ – opisuje siłę wzajemnego oddziaływania a σ ich zasięg.

Wielkości makroskopowe można otrzymać przez uśredniania wielkości mikroskopowych. Trudność metody kryje się w dużej liczbie molekuł, proporcjonalnej 10^{23} .

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

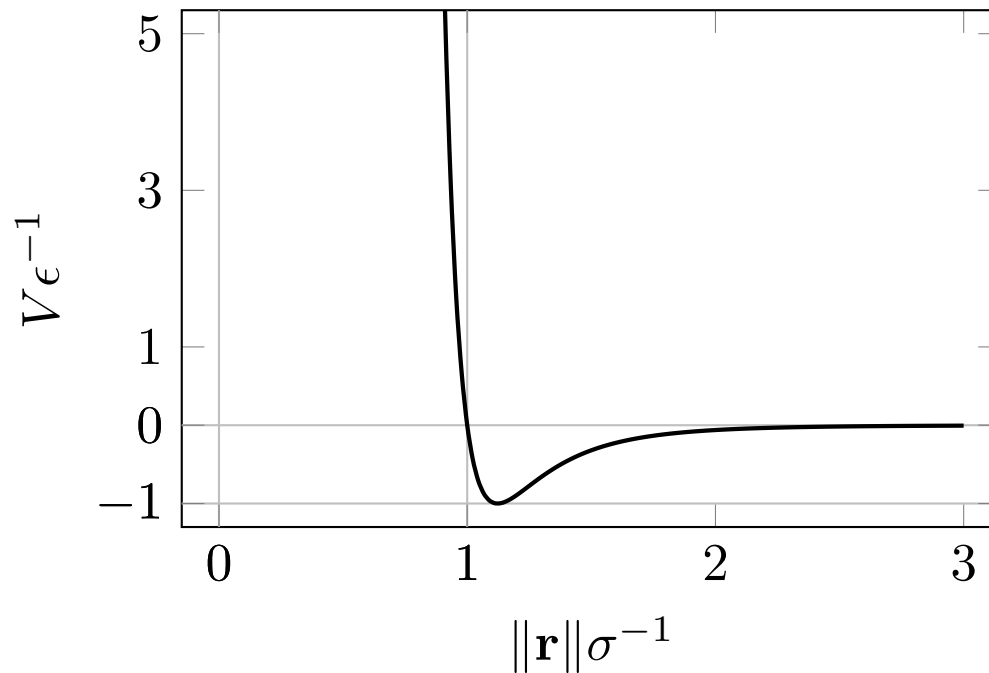
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

$$V = 4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{\|\mathbf{r}\|} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\|\mathbf{r}\|} \right)^6 \right)$$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Dynamika molekularna – pseudokod

```
t ← 0;  
Calculate initial molecule position r;  
while not the end of calculations do  
     $\mathbf{f}_{ij} \leftarrow -\nabla V;$   
     $\mathbf{a} \leftarrow m^{-1}\mathbf{f}_{ij};$   
     $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} + \mathbf{v} \Delta t + 2^{-1}\mathbf{a} \Delta t^2;$   
     $t \leftarrow t + \Delta t;$ 
```

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

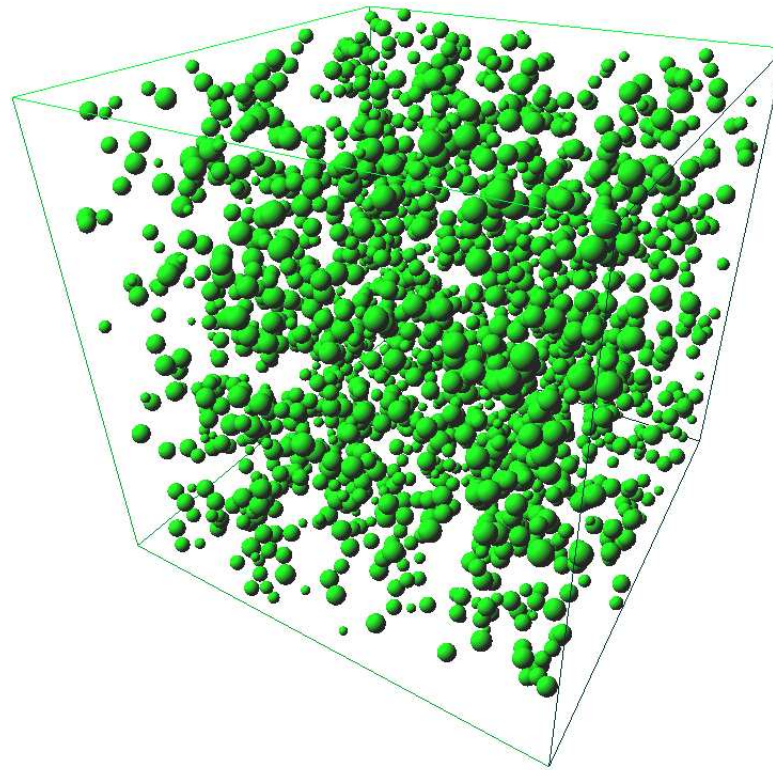
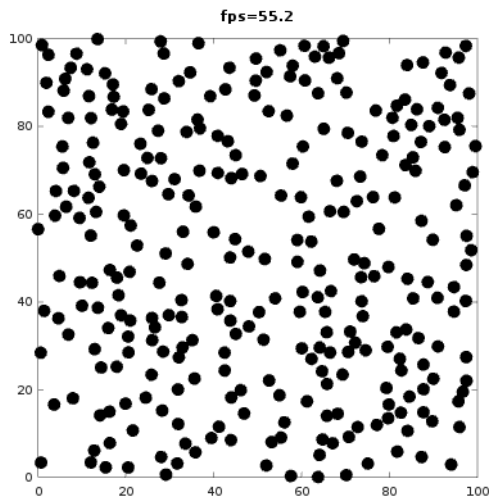
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Dynamika molekularna – przykłady



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

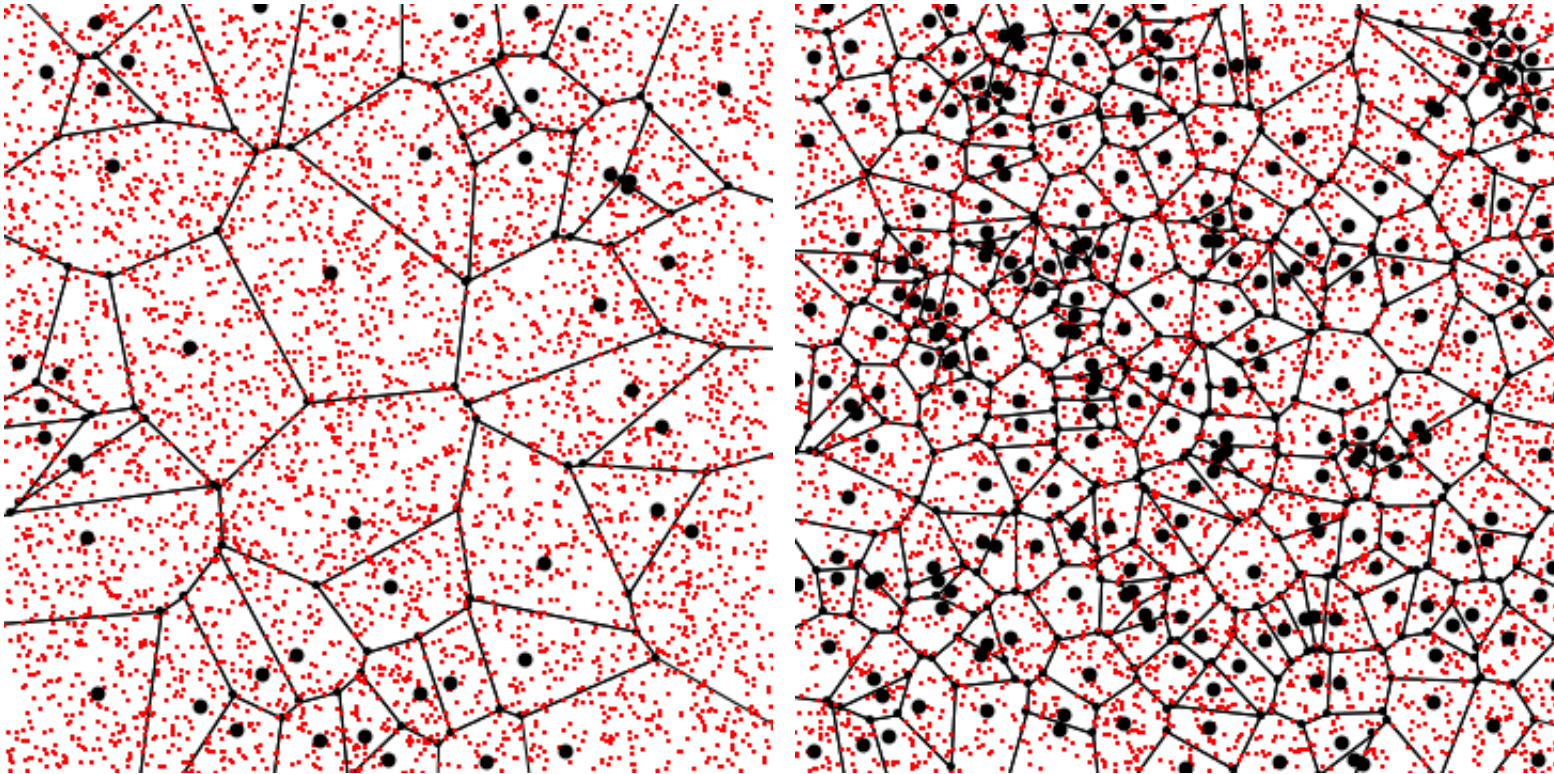
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis mezoskopowy – DPD



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

DPD (Dissipative Particle Dynamics). Zamiast ruchu pojedynczych molekuł rozważany jest ruch całych grup molekuł. Wzajemne oddziaływanie pojedynczych molekuł zastąpione jest siłami dyssypatywnymi $\mathbf{f}_{ij}^D$ i losowymi $\mathbf{f}_{ij}^R$. Ruch cząstek opisany jest równaniem

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{G}_i + \sum_{j=1 \neq i}^N \left(\mathbf{f}_{ij}^C + \mathbf{f}_{ij}^D + \mathbf{f}_{ij}^R \right) \quad (3)$$

Zaletą tej metody jest mniejszy koszt symulacji w porównaniu z MD.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{G}_i + \sum_{j=1 \neq i}^N \left(\mathbf{f}_{ij}^C + \mathbf{f}_{ij}^D + \mathbf{f}_{ij}^R \right) \quad (4)$$

■ siły dyssypatywne

$$\mathbf{f}_{ij}^D = -\gamma \omega_D (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \quad (5)$$

■ siły losowe

$$\mathbf{f}_{ij}^R = \sigma \omega_R \hat{\mathbf{r}}_{ij} \frac{\theta_{ij}}{\sqrt{\Delta t}} \quad (6)$$

■ siły zachowawcze

$$\mathbf{f}_{ij}^C = \alpha \omega_R \hat{\mathbf{r}}_{ij} \quad (7)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

ω_D jest funkcją wagową zależną od wzajemnej odległości między dwiema cząstkami i oraz j . Funkcja wagowa ω_R jest analogiczna do funkcji wagowej ω_D , jednakże obie funkcje powiązane są zależnością $\omega_D = \omega_R^2$. Podobnie jest ze współczynnikami $\sigma^2 = 2\gamma k_B T$.

Jedna z najprostszych funkcji wagowych może mieć postać

$$\omega_R = \begin{cases} 1 - \frac{r_{ij}}{r_c}; & r_{ij} \leq r_c, \\ 0; & r_{ij} > r_c \end{cases} \quad (8)$$

gdzie r_{ij} jest wzajemną odległością między cząstkami i i j , a r_c jest charakterystycznym promieniem.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

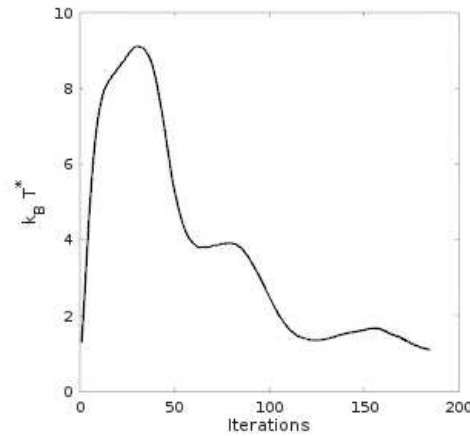
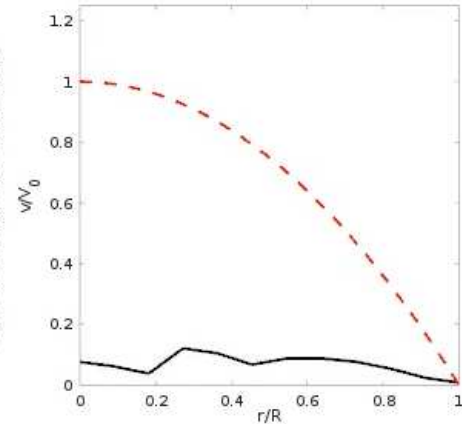
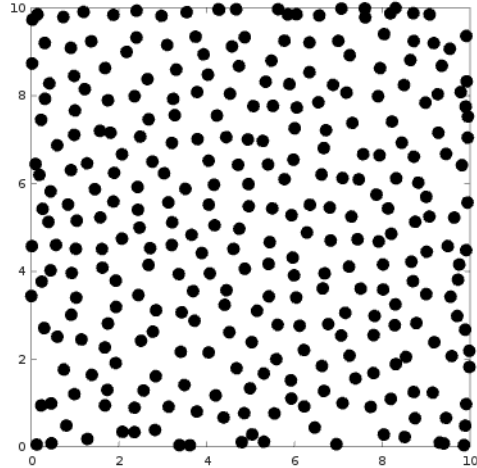
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis mezoskopowy – DPD



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis mezoskopowy – kin. teoria gazów

Podstawowym pojęciem jest funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f^{(N)}$ w przestrzeni fazowej. Przestrzeń fazowa składa się z $3N$ składowych przestrzennych $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$ i $3N$ pędów $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$. Funkcja $f^{(N)}$ pozwala na obliczenie prawdopodobieństwa (liczby molekuł) znalezienia molekuły w różniczkowej przestrzeni fazowej

$$f^{(N)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{q}^N d\mathbf{p}^N \quad (9)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis mezoskopowy – kin. teoria gazów

Ewolucja czasowa funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f^{(N)}$ podlega równaniu Liouville'a

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} + \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} \right) = 0$$

Oznacza to, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest stała wzdłuż trajektorii w przestrzeni fazowej. Zredukowana funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$F_s(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s) = \int_{\mathbb{R}^{3(N-s)}} \int_{\mathbb{R}^{3(N-s)}} f^{(N)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{q}^{N-s} d\mathbf{p}^{N-s}$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis mezoskopowy – kin. teoria gazów

Można otrzymać układ ewolucji czasowych dla F_s , gdzie $1 \leq s \leq N$. Układ ten nazywany jest hierarchią BBGKY. Hierarchia może być obcięta z dokładnością pierwszego rzędu, co daje równanie Boltzmannna

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \Omega(f) \quad (10)$$

dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = mN F_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) \quad (11)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – równania zachowania

■ Równanie zachowania masy

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (12)$$

■ Równanie zachowania pędu

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (13)$$

Dekompozycja tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma} = -p_t \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$.
Inna forma równania zachowania pędu

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p_t + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (14)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – równania energii

■ Kinetyczna

$$\rho \frac{de_k}{dt} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (15)$$

■ Całkowita

$$\rho \frac{de_c}{dt} = \frac{\partial p_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (16)$$

■ Mechaniczna

$$\rho \frac{de_m}{dt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (17)$$

■ Wewnętrzna

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (18)$$

■ Entalpia

$$\rho \frac{dh}{dt} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{dp_t}{dt} \quad (19)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – ogólne równanie transportu

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\phi) = S_\phi - \nabla \cdot \mathbf{k} \quad (20)$$

Lewa strona reprezentuje szybkość zmian (część niestacjonarna i konwekcyjna). Prawa strona reprezentuje źródła (dodatnie i ujemne) i strumienie.

- równanie zachowania masy
 $\phi = 1, S_\phi = 0, \mathbf{k} = \mathbf{0}$
- równanie zachowania pędu
 $\phi \leftarrow \mathbf{u}, S_\phi \leftarrow \rho \mathbf{f}, \mathbf{k} \leftarrow -\boldsymbol{\sigma}$
- równanie zachowania energii
 $\phi = e_k, S_\phi = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{k} = \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zasady termodynamiki

■ Druga zasada termodynamiki

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \quad (21)$$

■ Bilans entropii

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\phi}{T} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \quad (22)$$

■ Pierwsza zasada termodynamiki

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - p_t \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (23)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – równania konstytutywne

- Mechaniczne (reologiczne) równania konstytutywne
- Równania stanu
- Strumienie

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – mechaniczne równania konstytutywne

- Płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$
- Płyny nienewtonowskie
 - ◆ Uogólnione płyny newtonowskie $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\gamma)\mathbf{D}$
 - ◆ Płyny typu różniczkowego $\boldsymbol{\tau} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots)$
$$\mathbf{A}_{i+1} = \frac{d\mathbf{A}_i}{dt} + \mathbf{A}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_i, \quad i = 1, 2, \dots$$
 - ◆ Płyny typu całkowego
$$\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^t f(t - \tau) (\boldsymbol{\delta} - \mathbf{C}_t(\tau)) d\tau$$
 - ◆ Płynu typu szybkościowego $\dot{\boldsymbol{\tau}} = f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}})$
$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu (\mathbf{D} + \lambda_2 \dot{\mathbf{D}})$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

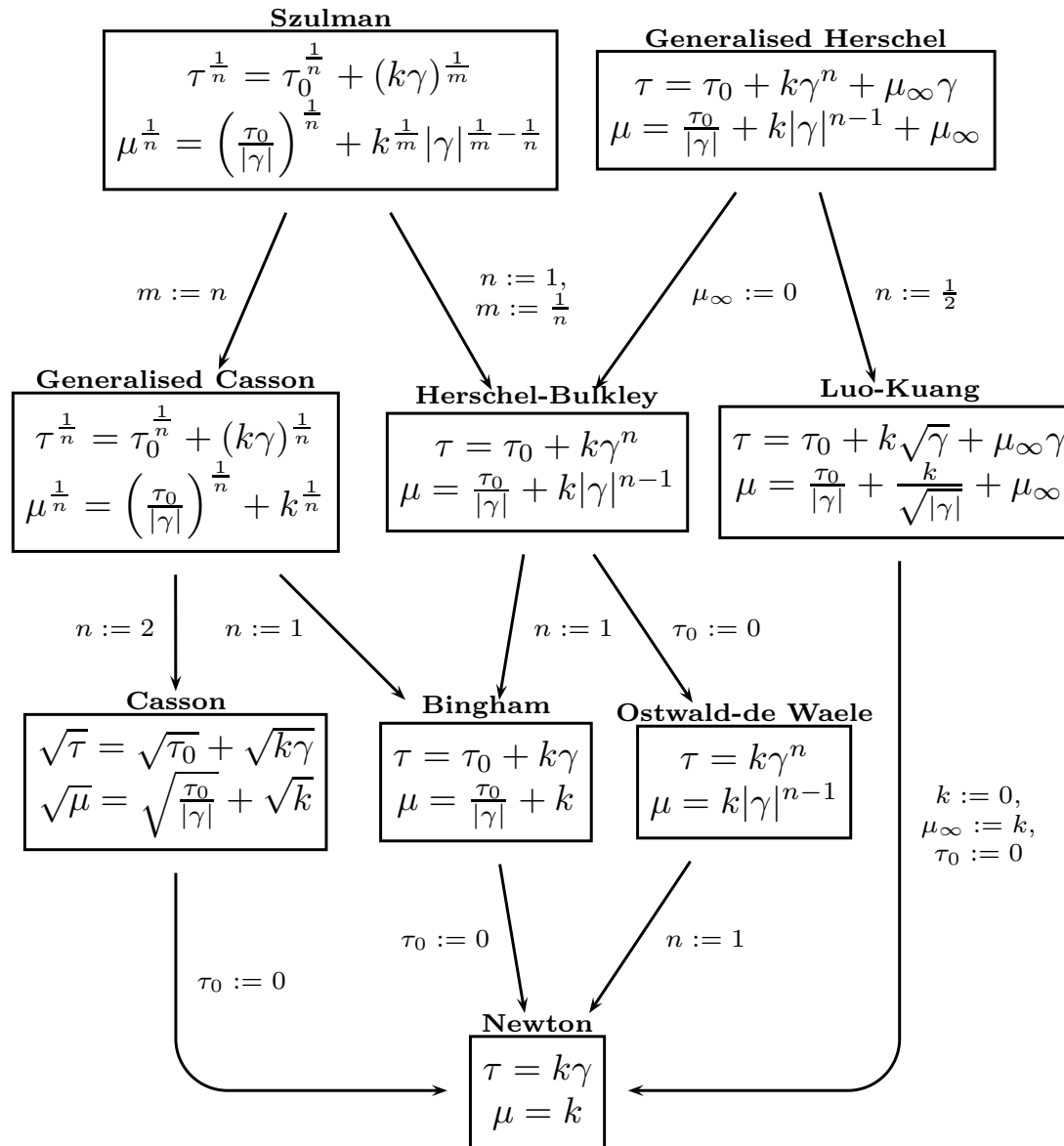
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Uogólnione płyny newtonowskie



Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – równania stanu

- Fundamentalne równanie stanu $e = f(s, \rho^{-1})$

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p_t}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (24)$$

- Termiczne równanie stanu $p_t = f(T, \rho^{-1})$

$$p_t = \rho R T \quad (25)$$

- Kaloryczne równanie stanu $e = f(T, \rho^{-1})$

$$de = c_v dT + \left(T \frac{\partial p_t}{\partial T} - p_t \right) d\rho^{-1} \quad (26)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – strumienie

Ogólna postać $\mathbf{w} = -\mathbf{T} \cdot \nabla \varphi$ poprzez założenie $\mathbf{w} = f(\nabla \varphi)$. Dokładniej $\mathbf{w}$ zależy tylko od φ i $\nabla \varphi$.

■ Prawo Fouriera

$$\mathbf{q} = -\lambda \cdot \nabla T \quad (27)$$

■ Prawo Ficka

$$\mathbf{j}^i = -\rho \mathbf{D}^{ij} \cdot \nabla g^j \quad (28)$$

■ Prawo Darcy'ego

$$\mathbf{u} = -\mu^{-1} \mathbf{K} \cdot \nabla p \quad (29)$$

Dla przypadku izotropowego $\mathbf{T} = \alpha \boldsymbol{\delta}$ i $\mathbf{w} = -\alpha \boldsymbol{\delta} \cdot \nabla \varphi = -\alpha \nabla \varphi$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania

Ogólna postać równania Naviera–Stokesa dla płynów newtonowskich i uogólnionych newtonowskich

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}^D) \quad (30)$$

- przepływy płynu nieściśliwego
- przepływy pełzające
- przepływy nielepkie
- przybliżenie Boussinesqa
- przybliżenie Oseena
- filtracja
- przepływy jednowymiarowe
- wymiana ciepła
- napięcie powierzchniowe

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

■ Przepływy płynu nieściśliwego ($\rho = \text{const}$)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (31)$$

$$\mu = \text{const}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (32)$$

$$\mu = \rho \nu$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla \frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (33)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

■ przepływy pełzające

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (34)$$

stacjonarne przepływy pełzające

$$\nabla p = \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (35)$$

dwuwymiarowe przepływy pełzające

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (36)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

- przepływy nielepkie ($\mu = 0$)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla \frac{p}{\rho} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (38)$$

$$\text{potencjalne } \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (39)$$

$$p = -\rho \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 \quad (40)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

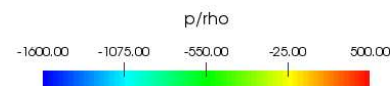
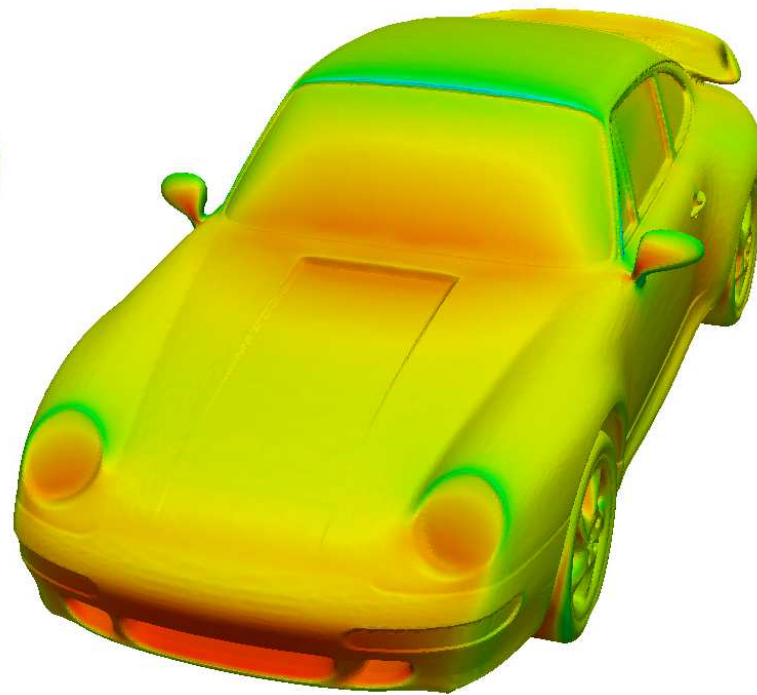
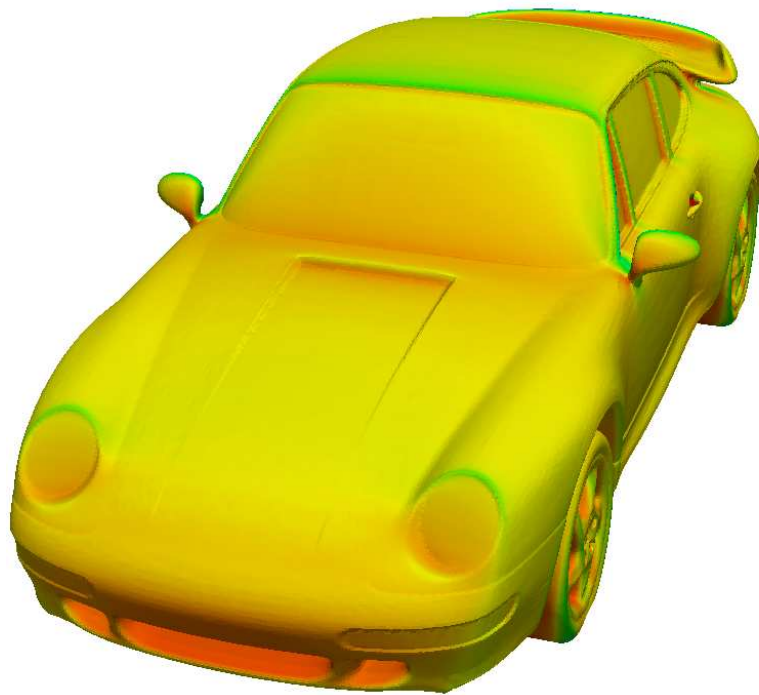
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania



Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

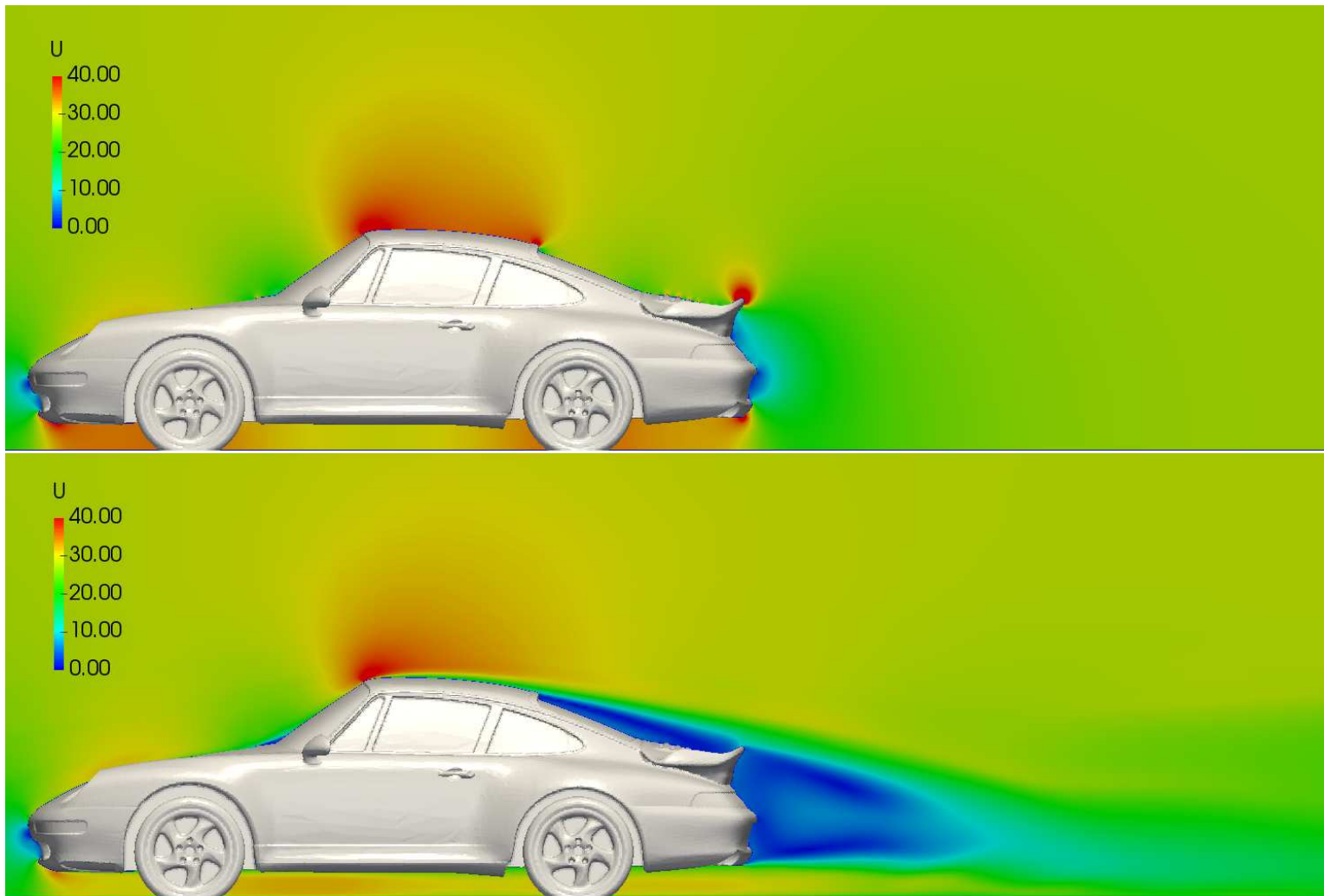
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania



Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} \quad (41)$$



Typ	C_D
Pomiar	0.34
Potencjalny	0.11
Lepki ($p + \mu$)	0.35
Lepki (p)	0.33
Lepki (μ)	0.02

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

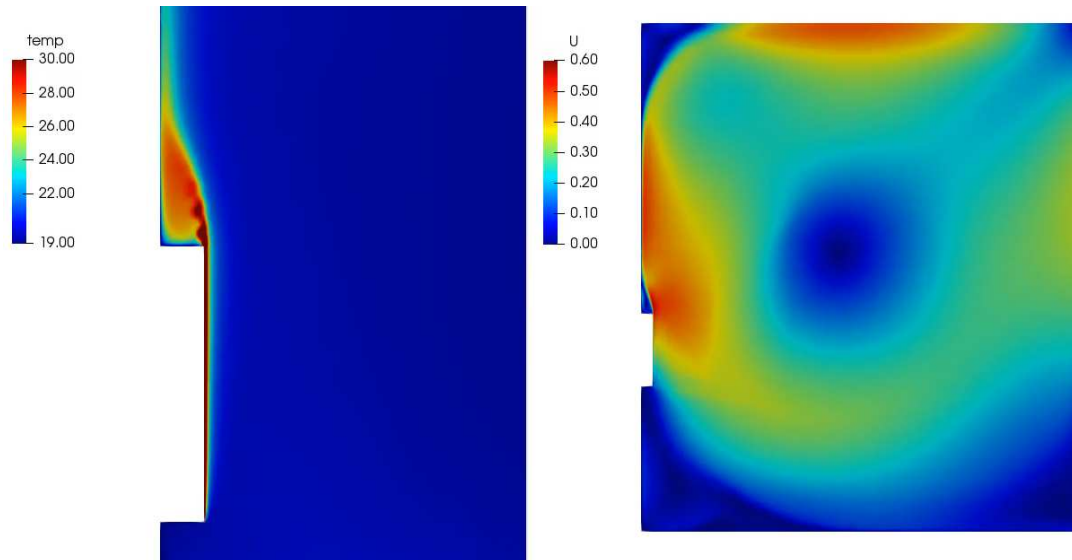
Opis makroskopowy – zastosowania

■ przybliżenie Boussinesqa

$$\rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{g} = \rho_0 \mathbf{g} + (\rho - \rho_0) \mathbf{g} \quad (42)$$

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (43)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho_0 \mathbf{g} (1 - \beta (T - T_0)) - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (44)$$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania

- przybliżenie Oseena $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \approx \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u}$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}^D) \quad (45)$$

- filtracja

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - R_1 \mathbf{u} \quad (46)$$

- przepływy jednowymiarowe

$$\nabla^2 u = a \quad (47)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

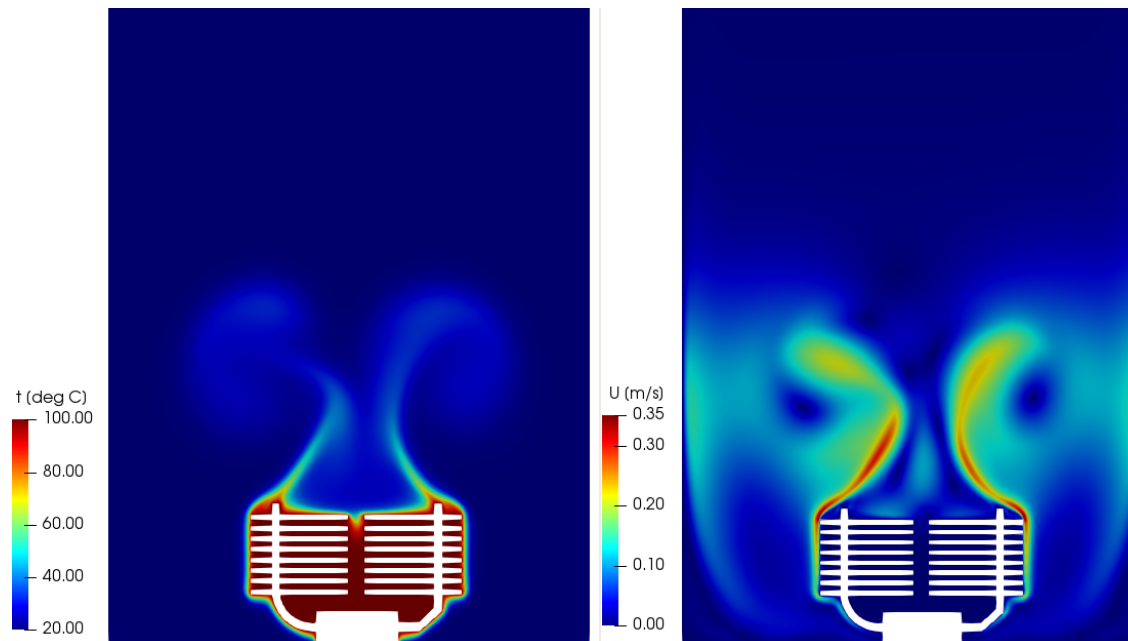
Opis makroskopowy – zastosowania

■ wymiana ciepła

Równanie Fouriera–Kirchhoffa dla płynu

$$\rho = \text{const}$$

$$c_v \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{u}) \right) = \phi_\mu + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (48)$$



Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

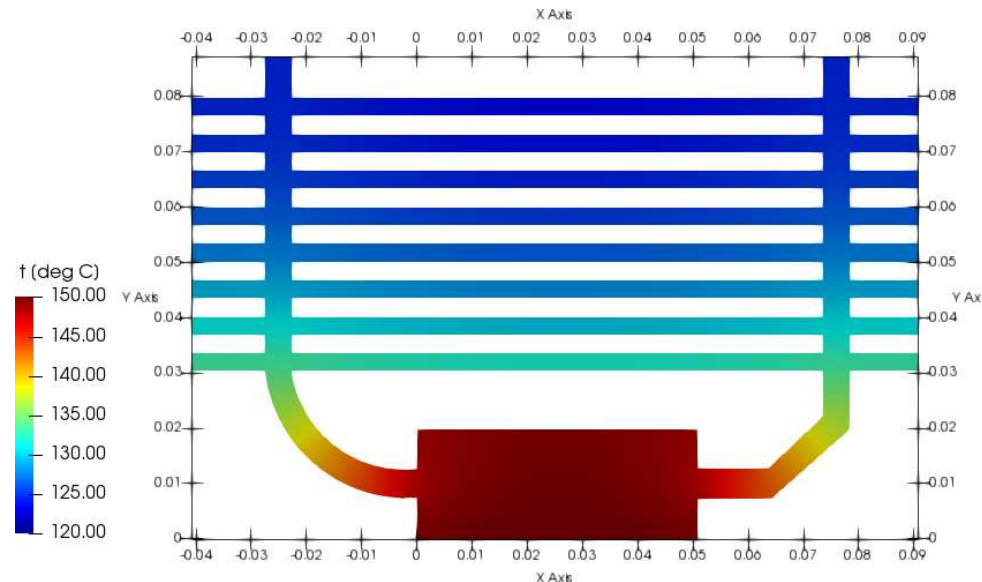
Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania

Dla ciała stałego $\mathbf{u} = 0$. Równanie przewodnictwa

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = S_E + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (49)$$

gdzie wewnętrzne źródła energii oznaczone są jako S_E .



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania

■ napięcie powierzchniowe

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla \frac{p}{\rho} + \nabla \cdot (2\nu \mathbf{D}) \quad (50)$$

Siły masowe $\mathbf{f}$ składają się z siły grawitacji $\mathbf{g}$ i siły od napięcia powierzchniowego $\mathbf{f}_\sigma$

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} + \rho^{-1} \mathbf{f}_\sigma \quad (51)$$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – zastosowania

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

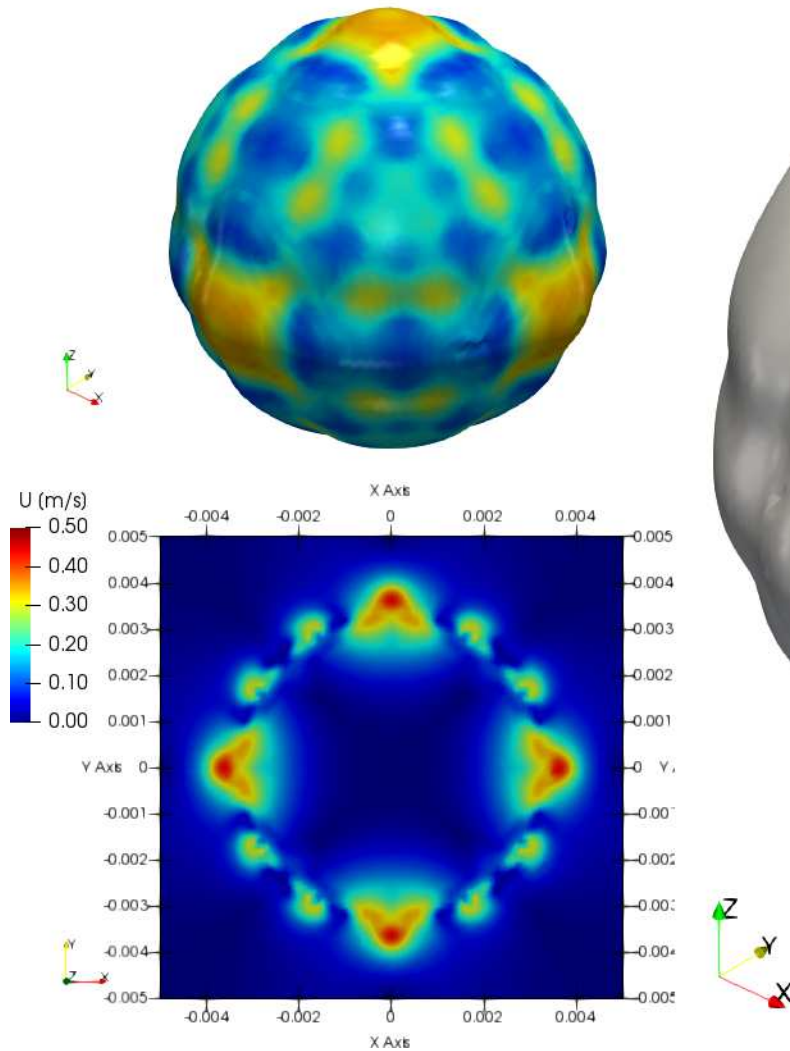
Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura



Siły od napięcia powierzchniowego na powierzchni swobodnej dane są jako

$$\mathbf{f}_\sigma = \sigma \kappa \nabla \alpha \quad (52)$$

σ jest napięciem powierzchniowym, a κ krzywizną powierzchni swobodnej

$$\kappa = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\nabla \cdot \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|} \quad (53)$$

Równanie transportu α (udziału objętościowego)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0 \quad (54)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – równania bezwymiarowe

- Równanie zachowania masy

$$\nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ = 0 \quad (55)$$

- Równanie zachowania pędu

$$\begin{aligned} \rho^+ \left(\text{Sh} \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \mathbf{u}^+ \right) = \\ = \frac{\rho^+ \mathbf{f}^+}{\text{Fr}} - \text{Eu} \nabla^+ p^+ + \frac{\mu^+}{\text{Re}} \nabla^{2+} \mathbf{u}^+ \end{aligned} \quad (56)$$

- Równanie Fouriera–Kirchhoffa

$$\rho^+ c_v^+ \left(\text{Sh} \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ T^+ \right) = \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \phi_\mu^+ + \frac{\lambda^+}{\text{Pr Re}} \nabla^{2+} T^+ \quad (57)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – liczby podobieństwa

$$\text{Sh} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{U}t_0} = \frac{t_{ch}}{t_0} = \frac{\mathcal{L}f}{\mathcal{U}} = \frac{\frac{\mathcal{U}}{t_0}}{\frac{\mathcal{U}^2}{\mathcal{L}}}$$

$$\text{Fr} = \frac{\mathcal{U}^2}{f_0 \mathcal{L}} = \frac{\frac{\rho_0 \mathcal{U}^2}{\mathcal{L}}}{\rho_0 f_0}$$

$$\text{Re} = \frac{\mathcal{L}\mathcal{U}\rho_0}{\mu_0} = \frac{\mathcal{L}\mathcal{U}}{\nu_0} = \frac{\frac{\rho_0 \mathcal{U}^2}{\mathcal{L}}}{\frac{\mu_0 \mathcal{U}}{\mathcal{L}^2}}$$

$$\text{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 \mathcal{U}^2} = \frac{\frac{p_0}{\mathcal{L}}}{\frac{\rho_0 \mathcal{U}^2}{\mathcal{L}}}$$

$$\text{Ec} = \frac{\mathcal{U}^2}{\frac{c_{v0} T_0}{c_{v0} \mu_0}} = \frac{\frac{\nu_0}{\lambda_0}}{\frac{\nu_0}{c_{v0} \rho_0}}$$

$$\text{Sc} = \frac{\mu_0}{\rho_0 D_0} = \frac{\nu_0}{D_0}$$

$$\text{Da} = \frac{K_0}{\mathcal{L}^2}$$

$$\text{De} = \frac{\lambda_0}{t_0}$$

$$\text{Wi} = \lambda_0 \gamma_0$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – warunki zgodności

Ogólne równanie transportu

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) = S_\phi - \nabla \cdot \mathbf{k} \quad (58)$$

Z twierdzenia Reynoldsa o transporcie wynikają warunki zgodności $\hat{\mathbf{n}} \cdot [\rho \mathbf{u} \phi + \mathbf{k}] = 0$

- równanie zachowania masy: $\phi = 1$, $S_\phi = 0$, $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ mamy $\hat{\mathbf{n}} \cdot [\rho \mathbf{u}] = 0$ lub $\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{u}] \equiv [u_n] = 0$
- równanie zachowania pędu: $\phi \leftarrow \mathbf{u}$, $S_\phi \leftarrow \rho \mathbf{f}$, $\mathbf{k} \leftarrow -\boldsymbol{\sigma}$ mamy $\hat{\mathbf{n}} \cdot [\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{0}$ lub $\hat{\mathbf{n}} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{\sigma}_n] = \mathbf{0}$
- równanie zachowania energii: $\phi = e_k$, $S_\phi = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{k} = \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}$ mamy $\hat{\mathbf{n}} \cdot [\rho \mathbf{u} e_k - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}] = 0$ lub $\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{q}]$ lub $[\lambda \frac{\partial T}{\partial n}] = 0$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – warunki brzegowe 1

Warunki zgodności nie są wystarczające.

Dodatkowymi warunkami są:

- adhezja $\hat{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{u} = u_l = 0$
- równowaga termiczna na powierzchni $[T] = 0$

Warunki brzegowe związane z wymianą ciepła

- Dirichlet: $T = f_1(x, y, z, t)$
- Neumann: $q_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q}$ lub $q_n = f_2(x, y, z, t)$
- mieszany: $\alpha T - \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f_3(P, t)$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Opis makroskopowy – warunki brzegowe 2

Powierzchnie inne niż ściany

- wlot: $n - 1$ warunków, gdzie n oznacza liczbę równań
- wylot: Najogólniej, $\sigma_n = \hat{n} \cdot \sigma$ plus rozkład T .
Zwykle rozkład p ze względu na $\sigma_n \approx -p\hat{n}$ plus $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$
- symetria: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ dla wszystkich skalarów φ
- periodyczność (translacyjna lub rotacyjna):
 $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$, gdzie P_1 i P_2 są punktami na odpowiadających sobie powierzchniach

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Równania Naviera–Stokesa są nieliniowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu. Nie są łatwo klasyfikowane, ale zawierają cechy równań prawie liniowych, niby liniowych i liniowych równań różniczkowych cząstkowych. Czasami można je sprowadzić do równań:

- hiperbolicznych
- parabolicznych
- eliptycznych

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

RRC drugiego rzędu semiliniowe

Dla zmiennych niezależnych x, y :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + F \left(x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (59)$$

Dla wszystkich (x, y) na obszarze Ω powyższe równanie jest:

- hiperboliczne, jeżeli $B^2 - 4AC > 0$
- paraboliczne, jeżeli $B^2 - 4AC = 0$
- eliptyczne, jeżeli $B^2 - 4AC < 0$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Ważne równania eliptyczne

■ równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (60)$$

■ równanie Poissona

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (61)$$

■ równanie Helmholtza

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0 \quad (62)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Ważne równania paraboliczne

■ równanie przewodnictwa

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (64)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Ważne równania hiperboliczne

■ równanie falowe

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (65)$$

■ równanie telegrafistów

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - b \frac{\partial \phi}{\partial t} - c \phi = 0 \quad (66)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

■ równanie Eulera–Tricomiego

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (67)$$

Dla $x > 0$ mamy równanie hiperboliczne,
paraboliczne dla $x = 0$ i eliptyczne dla $x < 0$

■ Uogólnione równanie Eulera–Tricomiego

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - f(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (68)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Ważne równania mieszane

■ Potencjalny przepływ gazu

$$(1 - \text{Ma}_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0 \quad (69)$$

Jest hiperboliczne dla $\text{Ma}_\infty^2 > 1$, paraboliczne dla $\text{Ma}_\infty^2 = 1$ i eliptyczne dla $\text{Ma}_\infty^2 < 1$.

Potencjał prędkości dla przepływów dominujących w kierunku osi x dany jest równaniem

$$\varphi(x, y) = u_\infty x + \varphi'(x, y) \quad (70)$$

Składowe prędkości

$$u_x(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_\infty + u'_x(x, y) \quad (71a)$$

$$u_y(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u'_y(x, y) \quad (71b)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda różnic skończonych

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

**Metoda różnic
skończonych**

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

- Wprowadzona przez Eulera w XVIII wieku
- Bezpośrednie zastąpienie pochodnych RR przez ich dyskretne odpowiedniki w węzłach siatki
- Pochodne w węzłach aproksymowane są przez wartości poszukiwanej funkcji w sąsiednich węzłach
- Otrzymuje się układ równań algebraicznych (liczba równań i niewiadomych równa jest liczbie węzłów siatki)
- Dyskretne odpowiedniki pochodnych tworzone są za pomocą różnic skończonych (głównie ze wzoru Taylora)

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Zakładając, że f jest ciągła na $[x_0; x]$, słuszny jest wzór Taylora w postaci

$$f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^m f(c)}{m!} \quad (72)$$

Funkcji f jest ciągła do rzędu $m - 1$ na $[x_0; x]$ i do rzędu m na $]x_0; x[$. Punkt $c \in]x_0; x[$, czyli $c = x_0 + \theta \Delta x$ dla $\theta \in]0; 1[$.

Oznaczenie $x = x_0 + \Delta x$, gdzie Δx . Przyrost Δx (różnica zmiennych niezależnych) może być dodatni jak i ujemny. Ponadto $d^0 f = f$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

n -ta różniczka funkcji f w punkcie x_0 dana jest zależnością $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\Delta x^n$, mamy

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\Delta x^3 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(c)\Delta x^m \quad (73)$$

Wprowadzając wielkość rzędu m w postaci $\mathcal{O}(\Delta x^m)$, zapisujemy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x_0)\Delta x^{m-1} + \mathcal{O}(\Delta x^m) \quad (74)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

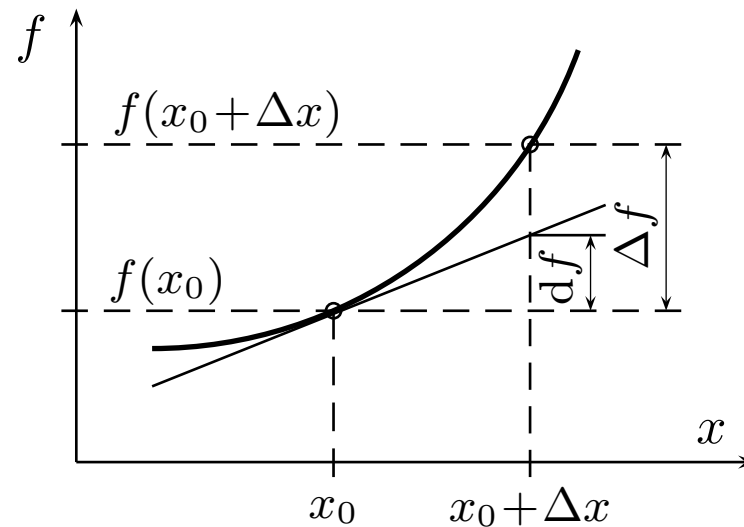
Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Przyrost (różnica) funkcji $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ pozwala na zapisanie

$$\Delta f = df(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} d^{m-1} f(x_0) + \mathcal{O}(\Delta x^m) \quad (75)$$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Różnicowe odpowiedniki pochodnych

Biorąc pod uwagę wzór Taylora

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x_0)\Delta x^{m-1} + \mathcal{O}(\Delta x^m) \quad (76)$$

z dokładnością do pierwszych pochodnych

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (77)$$

wyznamy pierwszą pochodną

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (78)$$

Bez $\mathcal{O}(\Delta x)$ jest przybliżeniem progresywnym.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Różnicowe odpowiedniki pochodnych

Zastępując Δx przez $-\Delta x$

$$f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) = -f'(x_0)\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (79)$$

wyznamy pierwszą pochodną

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (80)$$

Bez $\mathcal{O}(\Delta x)$ jest przybliżeniem regresywnym.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Różnicowe odpowiedniki pochodnych

Przybliżenia wyższego rzędu można otrzymać poprzez uwzględnienie większej liczby wyrazów we wzorze Taylora

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (81)$$

Zastępując Δx przez $-\Delta x$ i odejmując od siebie wyniki, otrzymamy

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (82)$$

Bez $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ jest przybliżeniem centralnym.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Różnicowe odpowiedniki pochodnych

Pochodne wyższego rzędu przybliża się, uwzględniając większą liczbę wyrazów we wzorze Taylora

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (83)$$

Zamieniając Δx na $-\Delta x$ i dodając wyniki do siebie, mamy następujące przybliżenie symetryczne drugiej pochodnej z dokładnością drugiego rzędu

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (84)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Różnicowe odpowiedniki pochodnych

Pochodna	Aproksymacja	Typ	Rząd
$f'(x_0)$	$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	prog.	1
$f'(x_0)$	$\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$	reg.	1
$f'(x_0)$	$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$	centr.	2
$f''(x_0)$	$\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{\Delta x^2}$	sym.	2

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Różnicowe odpowiedniki pochodnych

Zapis skrócony

$$f(x_0 + m h) \equiv f_{i+m} \quad (85)$$

Pochodna	Aproksymacja	Typ	Rząd
f'_i	$\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$	prog.	1
f'_i	$\frac{f_i - f_{i-1}}{h}$	reg.	1
f'_i	$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$	centr.	2
f''_i	$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$	sym.	2

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Równanie Poissona $\nabla^2 \phi = a$ z warunkiem brzegowym Dirichleta $\forall_{x \in \partial\Omega} \phi(x) = g(x)$. Jednowymiarowa wersja

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = a \quad (86)$$

Zastępując drugą pochodną przez różnicowy odpowiednik (symetryczny, drugiego rzędu), mamy

$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} = a \quad (87)$$

Dalej można wyznaczyć ϕ_i jako funkcję zależną od sąsiednich wartości

$$\phi_i = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - ah^2}{2} \quad (88)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Równanie Poissona – metody rozwiązywania

- Metody bezpośrednie (układy równań liniowych)
- Metody pośrednie (relaksacyjne)

- ◆ iteracja Jacobiego

$$\phi_i^{n+1} = \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^n - ah^2}{2} \quad (89)$$

- ◆ iteracja Gaussa-Seidela

$$\phi_i^{n+1} = \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^{n+1} - ah^2}{2} \quad (90)$$

- ◆ sukcesywna nadrelaksacja $w \in]1, 2[$

$$\phi_i^{n+1} = (1 - w)\phi_i^n + w \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^{n+1} - ah^2}{2} \quad (91)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Data: Read input variables and BCs

$w \leftarrow 1; n \leftarrow 1;$

repeat

$R \leftarrow 0;$

for $i \leftarrow 2$ **to** $i_{max} - 1$ **do**

$\phi_i^{n+1} \leftarrow \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^{n+1} - ah^2}{2};$

$R \leftarrow \max(|\phi_i^{n+1} - \phi_i^n|, R);$

$\phi_i^{n+1} \leftarrow (1 - w)\phi_i^n + w \phi_i^{n+1};$

$n \leftarrow n + 1;$

until $n \leq n_{max}$ **and** $R > R_{min};$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Równanie różniczkowe

$$y''(x) = -20x \quad (92)$$

z warunkami brzegowymi $y(0) = y(1) = 0$ ma rozwiązanie analityczne

$$y(x) = \frac{10}{3}(x - x^3) \quad (93)$$

Interpretacja: np. jednowymiarowe równanie przewodnictwa z warunkiem Dirichleta na brzegach (temperaturą).

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

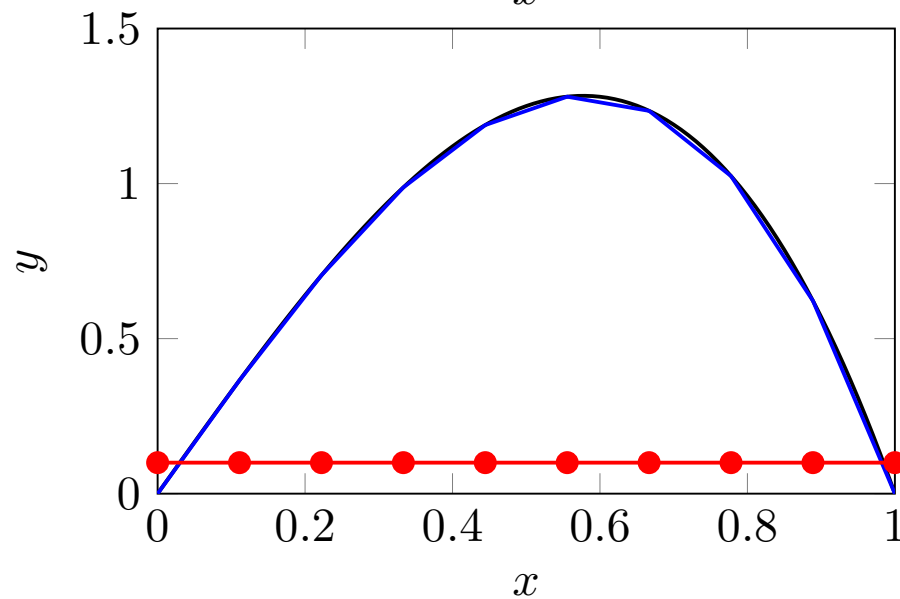
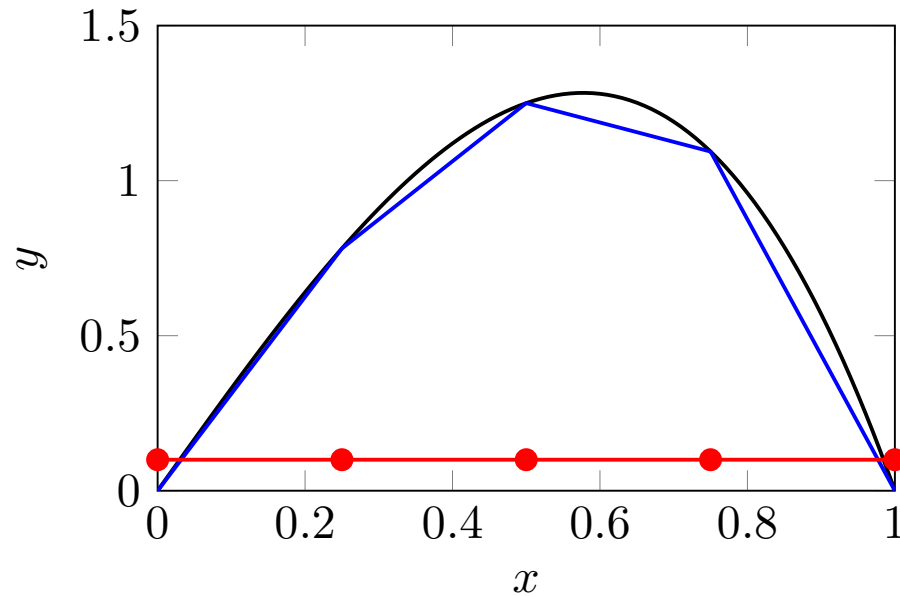
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Rozwiązanie metodą nadrelaksacji



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Rozwiązanie metodą bezpośrednią

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah^2 - y_1 \\ ah^2 \\ ah^2 \\ \vdots \\ ah^2 \\ ah^2 \\ ah^2 - y_n \end{pmatrix}$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Równanie Poissona $\nabla^2 \phi = a$ z warunkiem brzegowym Dirichleta na lewym brzegu $\phi(0) = 0$ i Neumanna na prawym brzegu $\frac{d\phi}{dx}(1) = b$. Różnicowy odpowiednik (symetryczny, drugiego rzędu)

$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} = a \quad (94)$$

lub

$$\phi_i = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - ah^2}{2} \quad (95)$$

Na prawym brzegu nie znamy $\phi(1)$, ale znamy $\frac{d\phi}{dx}(1) = b$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Centralny odpowiednik pierwszej pochodnej na prawym brzegu

$$\frac{d\phi_n}{dx} = \frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2h} = b \quad (96)$$

Pozwala na wyliczenie wartości ϕ_{n+1} poza obszarem

$$\phi_{n+1} = 2hb + \phi_{n-1} \quad (97)$$

Wstawiając ϕ_{n+1} do

$$\phi_n = \frac{\phi_{n+1} + \phi_{n-1} - ah^2}{2} \quad (98)$$

otrzymamy na prawym brzegu

$$\phi_n = \frac{2hb + 2\phi_{n-1} - ah^2}{2} \quad (99)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Data: Read input variables and BCs

$w \leftarrow 1; n \leftarrow 1;$

repeat

$R \leftarrow 0;$

for $i \leftarrow 2$ **to** $i_{max} - 1$ **do**

$\phi_i^{n+1} \leftarrow \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^{n+1} - ah^2}{2};$

$R \leftarrow \max(|\phi_i^{n+1} - \phi_i^n|, R);$

$\phi_i^{n+1} \leftarrow (1 - w)\phi_i^n + w \phi_i^{n+1};$

$\phi_{i_{max}}^{n+1} \leftarrow \frac{2bh + 2\phi_{i_{max}-1}^{n+1} - ah^2}{2};$

$n \leftarrow n + 1;$

until $n \leq n_{max}$ **and** $R > R_{min};$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Równanie różniczkowe

$$y''(x) = -20x \quad (100)$$

z warunkami brzegowymi $y(0) = 0$ i $y'(1) = 0$ ma rozwiązanie analityczne

$$y(x) = 10 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \quad (101)$$

Interpretacja: np. jednowymiarowe równanie przewodnictwa z warunkiem Dirichleta na lewym brzegu (temperaturą) i Neumanna na prawym (strumień ciepła).

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

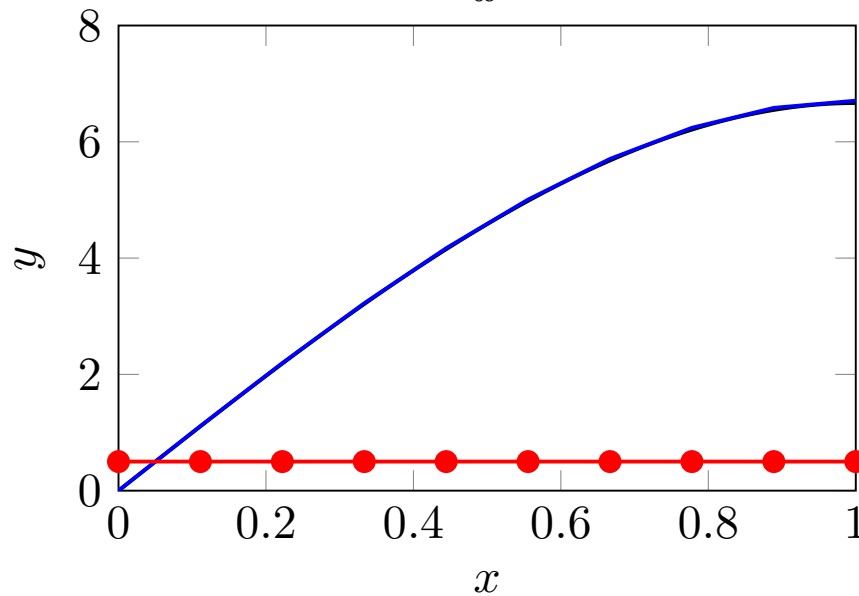
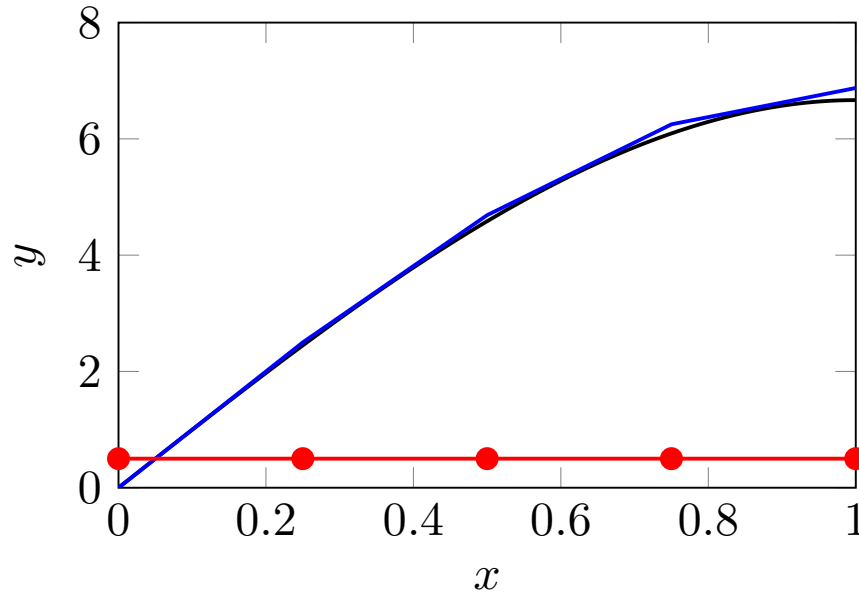
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Rozwiązanie metodą nadrelaksacji



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Jednowymiarowe, niestacjonarne równanie przewodnictwa (bez wewnętrznych źródeł ciepła)

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (102)$$

Stacjonarne równanie przewodnictwa

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (103)$$

Różne typy równań i dodatkowo mamy warunek początkowy $T(x, 0) = T_0(x)$. Dyfuzyjność termiczna oznaczona jest jako α .

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Dyskretna wersja równania przewodnictwa

Przykładowa deskretyzacja - FTCS (Forward Time Centred Space)

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} = 0 \quad (104)$$

lub wyznaczając jawnie T_i^{n+1} w następnym kroju czasowym $n + 1$ za pomocą obecnego n

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{h^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (105)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Data: Read input variables and BCs

$$T_i^0 \leftarrow T_{0i};$$

for $n \leftarrow 1$ **to** n_{max} **do**

for $i \leftarrow 2$ **to** $i_{max} - 1$ **do**

$$T_i^{n+1} \leftarrow T_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{h^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n);$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Równanie różniczkowe

$$T''(x) = 0 \quad (106)$$

z warunkami brzegowymi $y(0) = 1$ i $y(1) = 2$ ma rozwiązanie analityczne

$$T(x) = 1 + x \quad (107)$$

Opisuje stacjonarną wymianę ciepła, z warunkami Dirichleta, do której dążyć będzie proces niestacjonarny opisany równaniem

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (108)$$

z początkowym rozkładem temperatur T_0 np.
 $T(x, 0) = 0$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

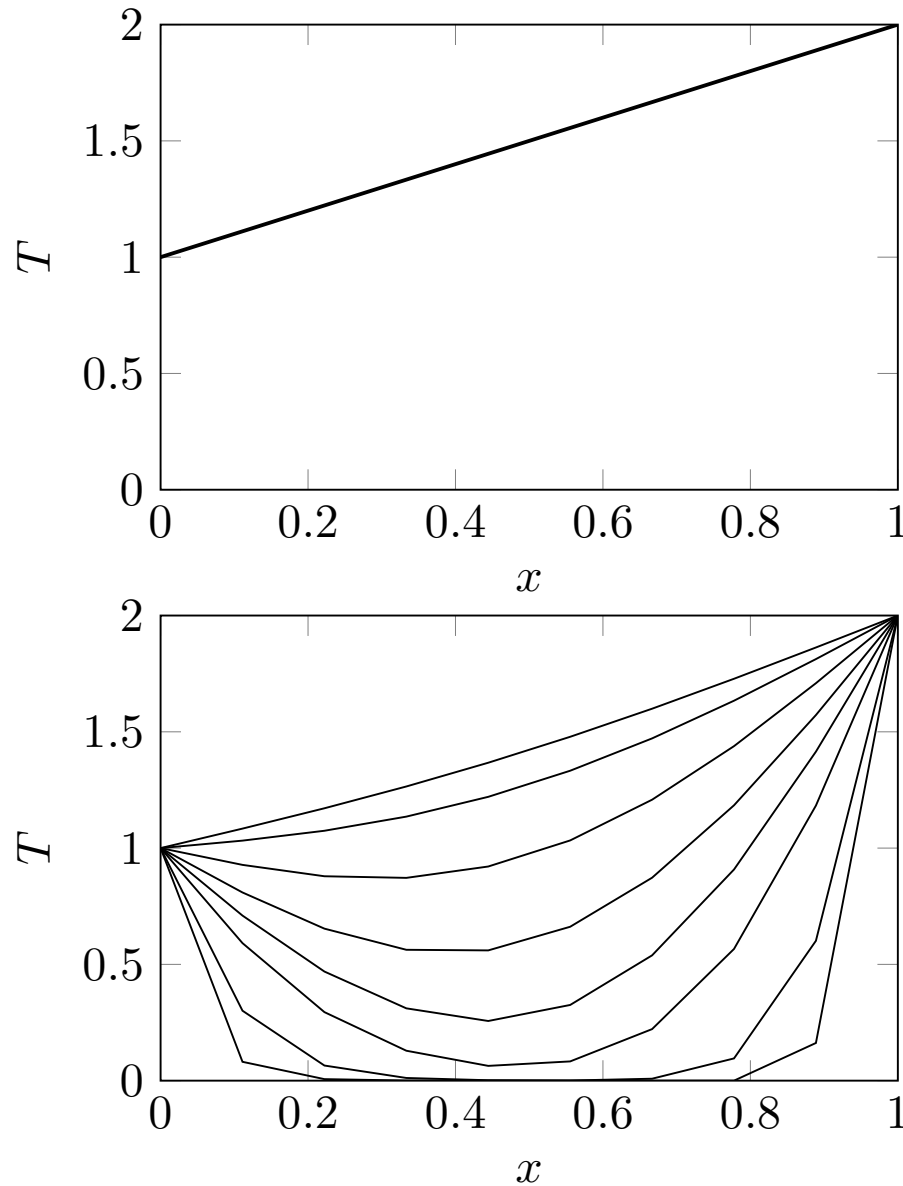
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Rozwiązanie stacjonarne i niestacjonarne



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda elementów skończonych

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

**Metoda elementów
skończonych**

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

Metoda ta stanowi podstawę MES. Np. dla równania różniczkowego zwyczajnego

$$y''(x) + 20x = 0 \quad (109)$$

z warunkami brzegowymi $y(0) = y(1) = 0$ rozwiązanie ogólne ma postać

$$y(x) = -\frac{10}{3}x^3 + C_1x + C_2 \quad (110)$$

a rozwiązanie szczególne

$$y(x) = -\frac{10}{3}(x^3 - x) \quad (111)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

Metodą poszukuje się rozwiązanie przybliżonego $\hat{y}$ w ogólnej postaci

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^N C_i N_i(x) \quad (112)$$

gdzie N_i są funkcjami próbnymi, które powinny być ciągłe i spełniać warunki brzegowe. Nieznane stałe C_i mają być wyznaczone.

Wstawiając rozwiązanie przybliżone $\hat{y}$ do równania różniczkowego otrzymamy residuum R

$$R(x) = \hat{y}''(x) + 20x \neq 0 \quad (113)$$

Nieznane wartości C_i ($i = 1, \dots, N$) wyznaczamy z warunku

$$\int_0^1 W_i(x) R(x) dx = 0 \quad (114)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

$$\int_0^1 W_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (115)$$

Funkcje wagowe W_i mogą mieć postaci

- Metoda kolokacji $W_i(x) = \delta(x - x_i)$
- Metoda podobszarów
 $W_i(x) = H(x - x_{i-1}) - H(x - x_i)$
- Metoda Galerkina $W_i(x) = N_i(x)$

$$\int_0^1 N_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (116)$$

- Metoda najmniejszych kwadratów $W_i(x) = \frac{\partial R}{\partial C_i}$

$$\int_0^1 \frac{\partial R}{\partial C_i} R(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (117)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

Wielomianowe funkcje testowe mogą mieć postać

$$N(x) = x^r (x - 1)^s \quad (118)$$

Jest ciągła i spełnia warunki brzegowe. Najprostszy przypadek dla jednej funkcji ($r = s = 1$)

$$N_1(x) = x(x - 1) \quad (119)$$

Rozwiązanie przybliżone $\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^N C_i N_i(x)$, gdzie $N = 1$, ma postać

$$\hat{y}(x) = C_1 N_1(x) = C_1(x^2 - x) \quad (120)$$

Residuum wyliczane jest jako

$$R(x) = 2C_1 + 20x \neq 0 \quad (121)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

Nieznana stałą C_1 wylicza się np. metodą Galerkiną

$$\int_0^1 x(x-1)(2C_1 + 20x) dx = 0 \quad (122)$$

Daje to $-\frac{1}{3}(5 + C_1) = 0$ i pozwala wyznaczyć $C_1 = -5$. Rozwiązanie przybliżone ma zatem postać

$$\hat{y}(x) = -5x(x-1) \quad (123)$$

i może być porównane z rozwiązaniem dokładnym

$$y(x) = -\frac{10}{3}(x^3 - x) \quad (124)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

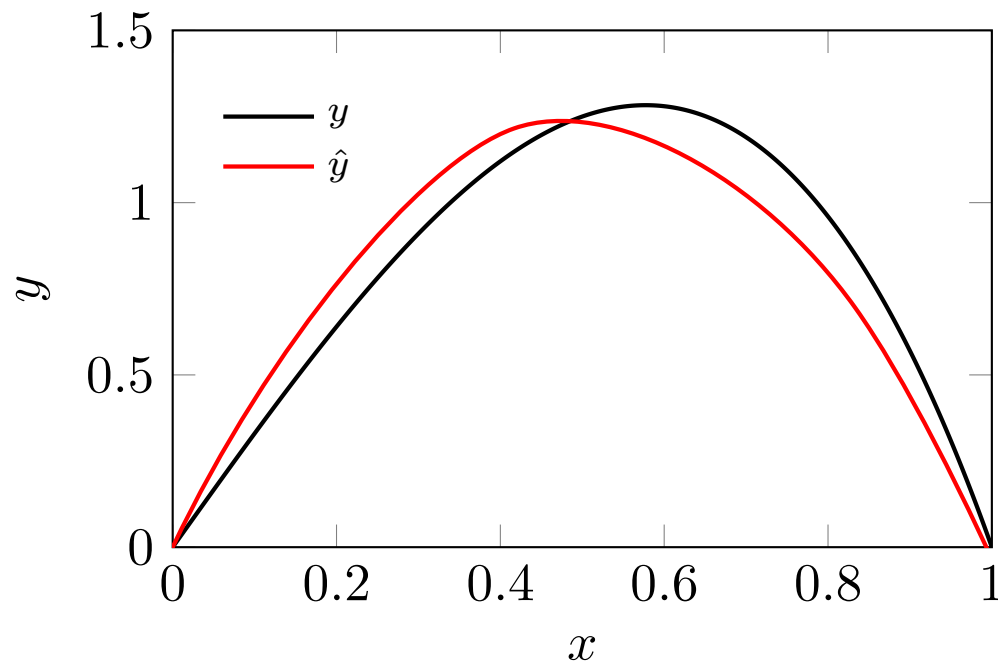
Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

Lepszą zgodność można uzyskać po uwzględnieniu większej liczby funkcji testowych



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

Można przyjąć dwie funkcje testowe

$$N_1(x) = x(x - 1), \quad N_2(x) = x^2(x - 1) \quad (125)$$

Obie są ciągłe i spełniają warunki brzegowe.

Rozwiązanie przybliżone $\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^N C_i N_i(x)$, gdzie $N = 2$, przybiera postać

$$\hat{y}(x) = C_1 N_1(x) + C_2 N_2(x) = C_1(x^2 - x) + C_2(x^3 - x^2) \quad (126)$$

Residuum ma postać

$$R(x) = 2C_1 + 2C_2(3x - 1) + 20x \neq 0 \quad (127)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

Stałe C_1, C_2 wyznacza się przez całkowanie

$$\int_0^1 x(x-1)(2C_1 + 2C_2(3x-1) + 20x) dx = 0$$

$$\int_0^1 x^2(x-1)(2C_1 + 2C_2(3x-1) + 20x) dx = 0$$

Daje to $10 + 2C_1 + C_2 = 0$ i $1 + \frac{1}{6}C_1 + \frac{2}{15}C_2 = 0$ oraz pozwala na wyznaczenie $C_1 = C_2 = -\frac{10}{3}$. Rozwiązanie przybliżone ma postać

$$\hat{y}(x) = -\frac{10}{3}x(x-1)(x+1) = -\frac{10}{3}(x^3 - x) \quad (128)$$

i jest również rozwiązaniem dokładnym.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda residuów ważonych

- Metoda residuów ważonych stanowi podstawę metody elementów skończonych
- Metoda korzysta z warunku całkowego minimalizującego residuum
- Funkcje testowe są „globalne”. Zwykle jest trudno dobrać takie funkcje dla bardziej skomplikowanych obszarów, które jednocześnie będą spełniać warunki brzegowe. Im większy rozmiar, tym gorzej.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda elementów skończonych

Przedział $[x_1; x_{N+1}]$ dzielony jest na N podprzedziałów (elementów). Z własności całek wynika, że

$$\int_{x_1}^{x_{N+1}} y(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} y(x) dx \quad (129)$$

Rozwiązanie przybliżone wyrażone jest jako

$$\hat{y}_e = y_j N_1(x) + y_{j+1} N_2(x) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{y}_e \quad (130)$$

gdzie znane, lokalne funkcje testowe (kształtu) $\mathbf{N}$ i nieznane wartości węzłowe $\mathbf{y}_e$ zapisywane są w postaci wektorowej

$$\mathbf{N} = (N_1, N_2) \quad (131a)$$

$$\mathbf{y}_e = (y_j, y_{j+1}) \quad (131b)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

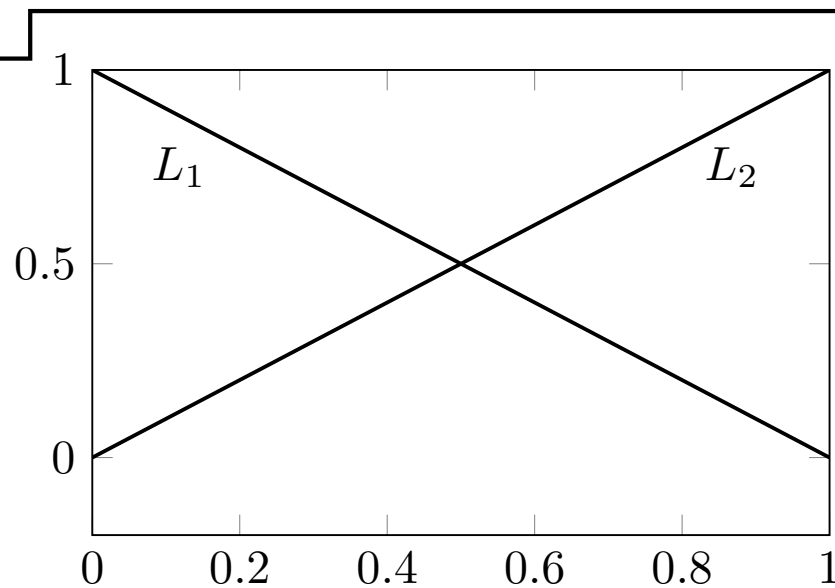
Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura



Lokalne funkcje kształtu:

$$L_1 = N_1 = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad x_j \leq x \leq x_{j+1} \quad (132a)$$

$$L_2 = N_2 = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad x_j \leq x \leq x_{j+1} \quad (132b)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda elementów skończonych

Dla każdego elementu mamy warunek Galerkin

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{N} R dx = \mathbf{0} \quad j = 1, \dots, N \quad (133)$$

Rozważając równanie różniczkowe zwyczajne

$y'' + 20x = 0$ i rozwiązanie przybliżone $\hat{y}_e$, możliwe jest wyliczenie residuum

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{N} \left(\frac{d^2 \hat{y}_e}{dx^2} + 20x \right) dx = \mathbf{0} \quad (134)$$

Druga pochodna musi być zamieniona ze względu na liniowość funkcji kształtu.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda elementów skończonych

Całkowanie przez części pozwala na obniżenie rzędu pochodnej

$$\mathbf{N} \frac{d\hat{y}_e}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\hat{y}_e}{dx} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{N} 20x dx = 0 \quad (135)$$

Macierzowa postać warunku Galerkina dla każdego elementu ma postać

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx \cdot \mathbf{y}_e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{N} 20x dx + \mathbf{N} \frac{d\hat{y}_e}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \\ j = 1, \dots, N \quad (136)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda elementów skończonych

Tzw. macierz „sztywności” dla każdego elementu e definiuje się jako

$$\mathbf{K}_e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx \quad (137)$$

Macierz ta jest symetryczna. Tzw. wektor „przemieszczenia” ma postać

$$\mathbf{F}_e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{N}^T 20x dx + \mathbf{N} \frac{d\hat{y}_e}{dx} \bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} \quad (138)$$

Warunek Galerkina ma teraz postać

$$\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{y}_e = \mathbf{F}_e \quad (139)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda elementów skończonych

Macierze „sztywności” można dalej uprościć

$$\mathbf{K}_e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \begin{pmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{pmatrix} dx = \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tak samo z wektorem „przemieszczenia”

$$\mathbf{F}_e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \begin{pmatrix} N_1 20x \\ N_2 20x \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} N_1 \frac{d\hat{y}_e}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \\ N_2 \frac{d\hat{y}_e}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \end{pmatrix}$$

Po zaniedbaniu gradientów (wyjaśnione dalej)

$$\mathbf{F}_e = -\frac{10}{3}(x_j - x_{j+1}) \begin{pmatrix} 2x_j + x_{j+1} \\ x_j + 2x_{j+1} \end{pmatrix}$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda elementów skończonych

Dla przedziału $[0; 1]$ podzielonego na 3 jednakowe elementy

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Globalna macierz „sztywności”

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1^{11} & K_1^{12} & 0 & 0 \\ K_1^{12} & K_1^{22} + K_2^{11} & K_2^{12} & 0 \\ 0 & K_2^{12} & K_2^{22} + K_3^{11} & K_3^{12} \\ 0 & 0 & K_3^{12} & K_3^{22} \end{pmatrix}$$

daje

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda elementów skończonych

Wektor „przemieszczenia” dla przedziału $[0; 1]$
podzielonego na trzy jednakowe elementy

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} - \frac{dy(0)}{dx} \\ \frac{20}{27} + \frac{dy(\frac{1}{3})}{dx} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \frac{40}{27} - \frac{dy(\frac{1}{3})}{dx} \\ \frac{50}{27} + \frac{dy(\frac{2}{3})}{dx} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \frac{70}{27} - \frac{dy(\frac{2}{3})}{dx} \\ \frac{80}{27} + \frac{dy(1)}{dx} \end{pmatrix}$$

Globalny wektor „przemieszczenia”

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 + F_2^1 \\ F_2^2 + F_3^1 \\ F_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} - \frac{dy(0)}{dx} \\ \frac{60}{27} \\ \frac{120}{27} \\ \frac{80}{27} + \frac{dy(1)}{dx} \end{pmatrix}$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Globalny układ równań liniowych ma postać

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} - \frac{dy(0)}{dx} \\ \frac{60}{27} \\ \frac{120}{27} \\ \frac{80}{27} + \frac{dy(1)}{dx} \end{pmatrix}$$

Nie można go jeszcze rozwiązywać, bo należy ustalić warunki brzegowe $y_1 = y_4 = 0$. Są dwie typowe metody.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Pozostawiając wyłącznie równania związane z niewiadomymi y_2, y_3 dla $y_1 = y_4 = 0$, mamy

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 6 & -3 & \cdot \\ \cdot & -3 & 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \frac{60}{27} \\ \frac{120}{27} \\ \cdot \end{pmatrix}$$

lub prościej

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60}{27} \\ \frac{120}{27} \end{pmatrix}$$

Układ można teraz rozwiązać ze względu na y_2, y_3 .

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Druga metoda nie zmienia układu macierzy. Modyfikuje wybrane elementy, mnożąc je przez „dużą” liczbę. Te wybrane elementy znajdują się na diagonalu macierzy „sztywności” i odpowiadającym im pozycjom w wektorze „sztywności”, o ile nie są zerowe

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 10^7 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \cdot 10^7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{60}{27} \\ \frac{120}{27} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Data: Read N elements, nodes and BCs
Create global matrix $\mathbf{K}$ and vectors $\mathbf{F}$, $\mathbf{y}$;
for $e \leftarrow 1$ **to** N **do**
 $\mathbf{K}_e \leftarrow \int_e \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx$;
 $\mathbf{F}_e \leftarrow \int_e \mathbf{N}^T q dx$;
 Add $\mathbf{K}_e$ to $\mathbf{K}$;
 Add $\mathbf{F}_e$ to $\mathbf{F}$;
Apply BCs;
Solve linear system $\mathbf{K} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}$;

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

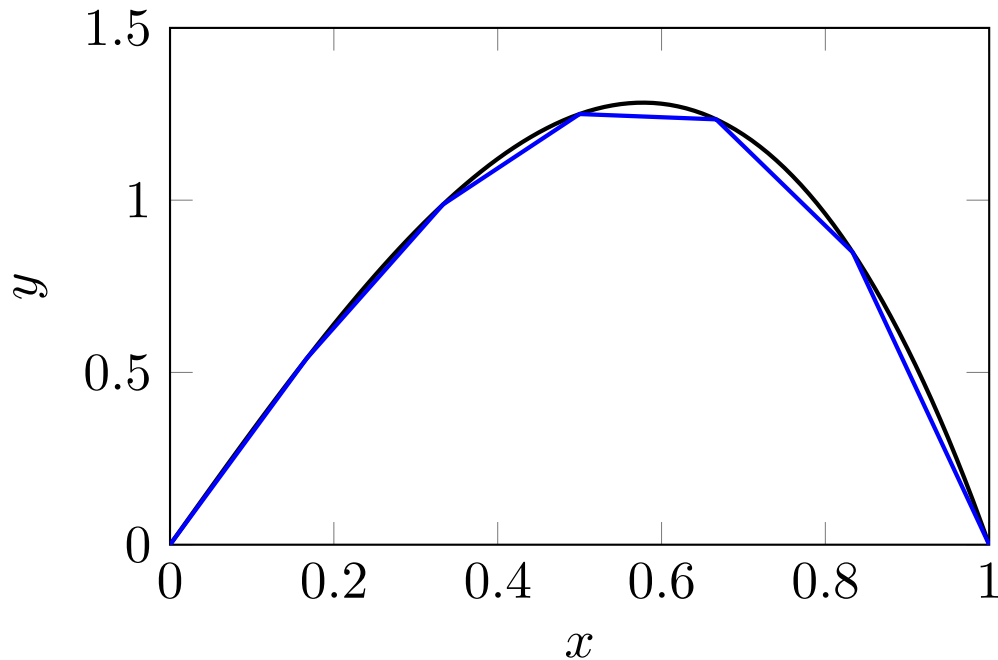
Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura



6 elementów, 7 węzłów

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Interpolacja liniowa i kwadratowa

Rozważając równanie linii prostej $\hat{y}_e = a + bx$ dla dwóch punktów (x_j, y_j) i (x_{j+1}, y_{j+1}) , otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{pmatrix} y_j \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_{j+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (140)$$

Można go rozwiązać ze względu na a i b

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_{j+1} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_j \\ y_{j+1} \end{pmatrix} \quad (141)$$

Mając na uwadze, że $\hat{y}_e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{y}_e$, gdzie $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ i $\mathbf{y}_e = (y_j, y_{j+1})$ i uwzględniając rozwiązanie na a i b , mamy

$$\hat{y}_e = a + bx = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} y_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} y_{j+1} = N_1 y_j + N_2 y_{j+1}$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Interpolacja liniowa i kwadratowa

Definiując liniowe funkcje kształtu L_1 i L_2

$$L_1 = N_1 = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad (142a)$$

$$L_2 = N_2 = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (142b)$$

można podobnie sformułować układ równań dla interpolacji kwadratowej $\hat{y}_e = a + bx + cx^2$ dla punktów (x_j, y_j) , $(x_{j+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ i (x_{j+1}, y_{j+1})

$$\begin{pmatrix} y_j \\ y_{j+\frac{1}{2}} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_j & x_j^2 \\ 1 & x_{j+\frac{1}{2}} & x_{j+\frac{1}{2}}^2 \\ 1 & x_{j+1} & x_{j+1}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (143)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

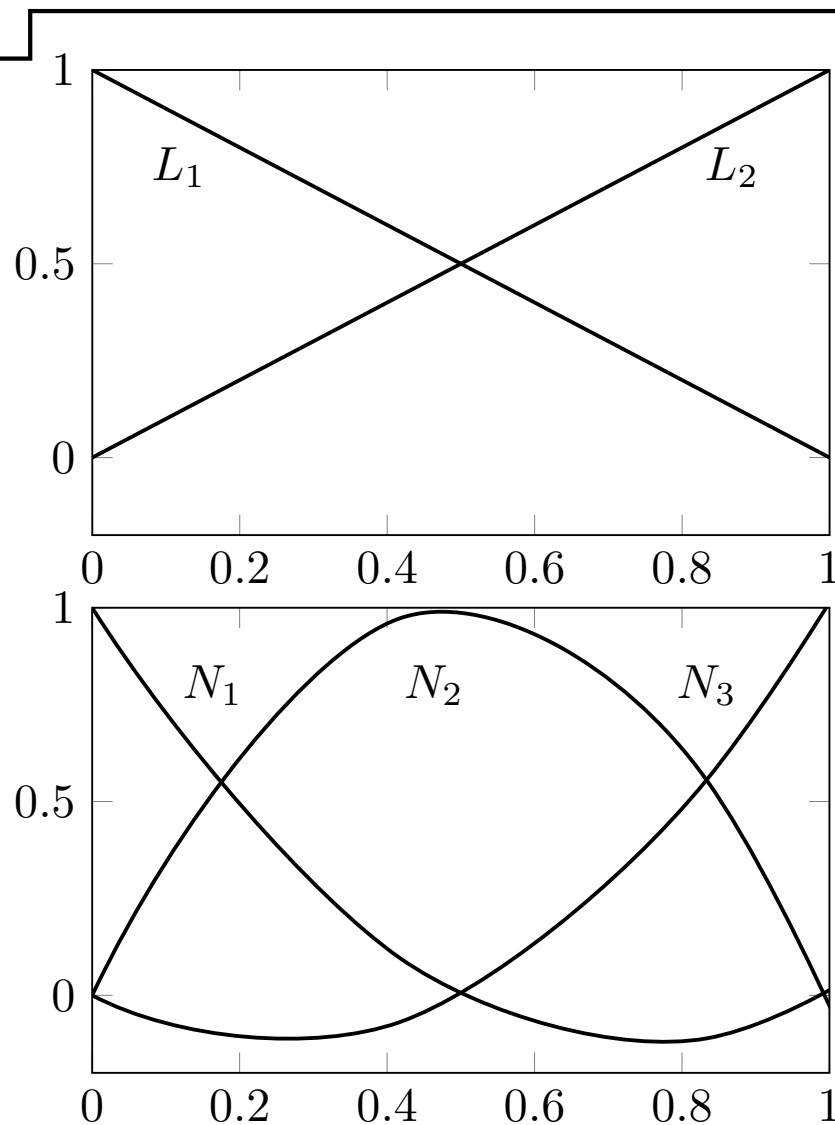
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Interpolacja liniowa i kwadratowa



Kwadratowe
funkcje
kształtu są
wyrażane przez
liniowe funkcje
kształtu

$$N_1 = L_1 (2L_1 - 1)$$

$$N_2 = 4L_1 L_2$$

$$N_3 = L_2 (2L_2 - 1)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Interpolacja kwadratowa

Macierz „sztywności” dla każdego elementu e jest obliczana jako

$$\mathbf{K}_e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx = \frac{1}{3(x_{j+1} - x_j)} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Wektor „przemieszczenia” ma postać

$$\mathbf{F}_e = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{N} 20x dx = \frac{10}{3}(x_{j+1} - x_j) \begin{pmatrix} x_j \\ 2(x_j + x_{j+1}) \\ x_{j+1} \end{pmatrix}$$

Warunek Galerkina dla każdego elementu jest identyczny jak poprzednio

$$\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{y}_e = \mathbf{F}_e \quad (145)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Data: Read N linear elements, n nodes and BCs

Insert midpoints $x_{j+\frac{1}{2}} \leftarrow \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$;

$n \leftarrow 2n - 1$;

Create global matrix $\mathbf{K}$ and vectors $\mathbf{F}$, $\mathbf{y}$;

for $e \leftarrow 1$ **to** N **do**

$\mathbf{K}_e \leftarrow \int_e \frac{d\mathbf{N}}{dx} \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx$;

$\mathbf{F}_e \leftarrow \int_e \mathbf{N}^T q dx$;

 Add $\mathbf{K}_e$ to $\mathbf{K}$;

 Add $\mathbf{F}_e$ to $\mathbf{F}$;

Apply BCs;

Solve linear system $\mathbf{K} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}$;

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

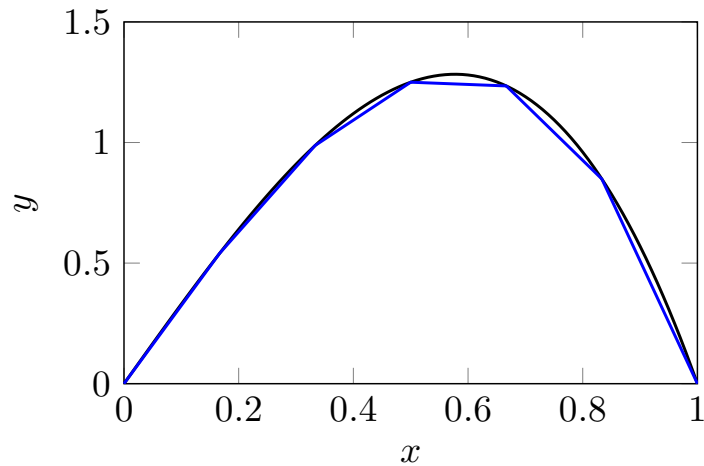
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

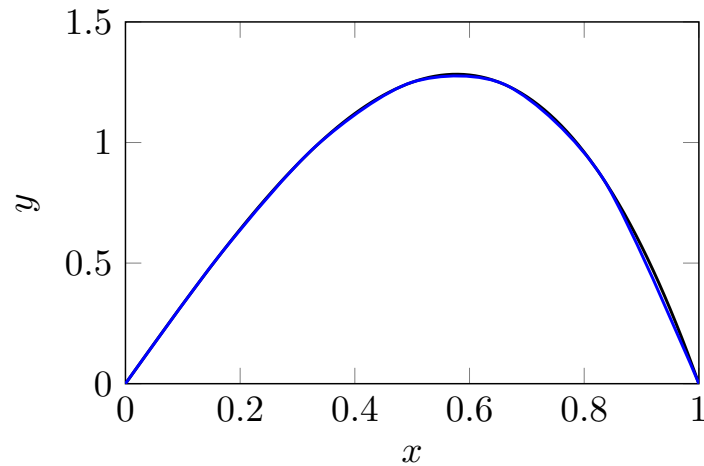
Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Interpolacja liniowa i kwadratowa



6 elementów, 7 węzłów



3 elementy, 7 węzłów

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Metoda objętości skończonych

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

**Metoda objętości
skończonych**

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Brane są pod uwagę postaci całkowe równań, a nie różniczkowe. MOS jest bardziej elastyczna w sensie dyskretyzacji przestrzennej niż MRS.

Postać różniczkowa ogólnego równania transportu

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (146)$$

Aby otrzymać postać całkową, należy skorzystać z twierdzenia Gaussa. Dla przypadku płaskiego ma ono postać

$$\iint_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega_i^+} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{L} \quad (147)$$

gdzie $d\Omega \equiv dx \, dy$ i $d\mathbf{L} \equiv \hat{\mathbf{n}} \, dL \equiv \hat{\mathbf{i}} \, dy - \hat{\mathbf{j}} \, dx$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Całkowanie po „objętości skończonej” Ω_i i wykorzystanie twierdzenia Gaussa, daje

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_i} \rho \phi \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega_i^+} \rho \phi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{\partial\Omega_i^+} \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{L} + \iint_{\Omega_i} S_\phi \, d\Omega$$

Dalej, w celu uproszczenia, zakładamy nieściśliwość $\rho = \text{const.}$

Pierwsza i ostatnia całka sugerują następującą definicję średniej $\bar{\phi}_i$ wartości ϕ na Ω_i

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \iint_{\Omega_i} \phi \, d\Omega \quad (148)$$

Wartość średnia $\bar{\phi}_i$ jest zwykle zdefiniowana w środku objętości skończonej Ω_i .

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Następnym krokiem jest dyskretyzacja przestrzenna całki krzywoliniowej na brzegu $\partial\Omega_i$ objętości Ω_i . Całka ta reprezentuje całkowity strumień z objętości Ω_i i jest zastępowana sumą

$$\oint_{\partial\Omega_i^+} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{L} \approx \sum_k \mathbf{w}_k \cdot \Delta\mathbf{L}_k \quad (149)$$

Brzeg $\partial\Omega_i$ składa się z linii numerowanych za pomocą k . Są co najmniej 3 linie. Za wektor $\mathbf{w}$ podstawiamy $\phi\mathbf{u}$ lub $\Gamma\nabla\phi$. Zwykle $\mathbf{w}$ nie jest stałe wzdłuż linii i musi być aproksymowane za pomocą stałej wartości $\mathbf{w}_k$ w środku każdej linii.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jedną z najprostszych możliwości jest aproksymacja progresywna pierwszego rzędu

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} \approx \frac{\bar{\phi}_i^{n+1} - \bar{\phi}_i^n}{\Delta t} \quad (150)$$

Krok czasowy oznaczany jest jako Δt .

Ostatecznie mamy następującą wersję dyskretną równania transportu

$$\rho \frac{\bar{\phi}_i^{n+1} - \bar{\phi}_i^n}{\Delta t} |\Omega_i| + \rho \sum_k (\phi \mathbf{u})_k \cdot \Delta \mathbf{L}_k = \sum_k (\Gamma \nabla \phi)_k \cdot \Delta \mathbf{L}_k + \bar{S}_{\phi i} |\Omega_i| \quad (151)$$

$|\Omega_i|$ oznacza powierzchnię objętości kontrolnej Ω_i .

[Spis zagadnień](#)

[Opis płynu na różnych poziomach skal](#)

[Metoda różnic skończonych](#)

[Metoda elementów skończonych](#)

[Metoda objętości skończonych](#)

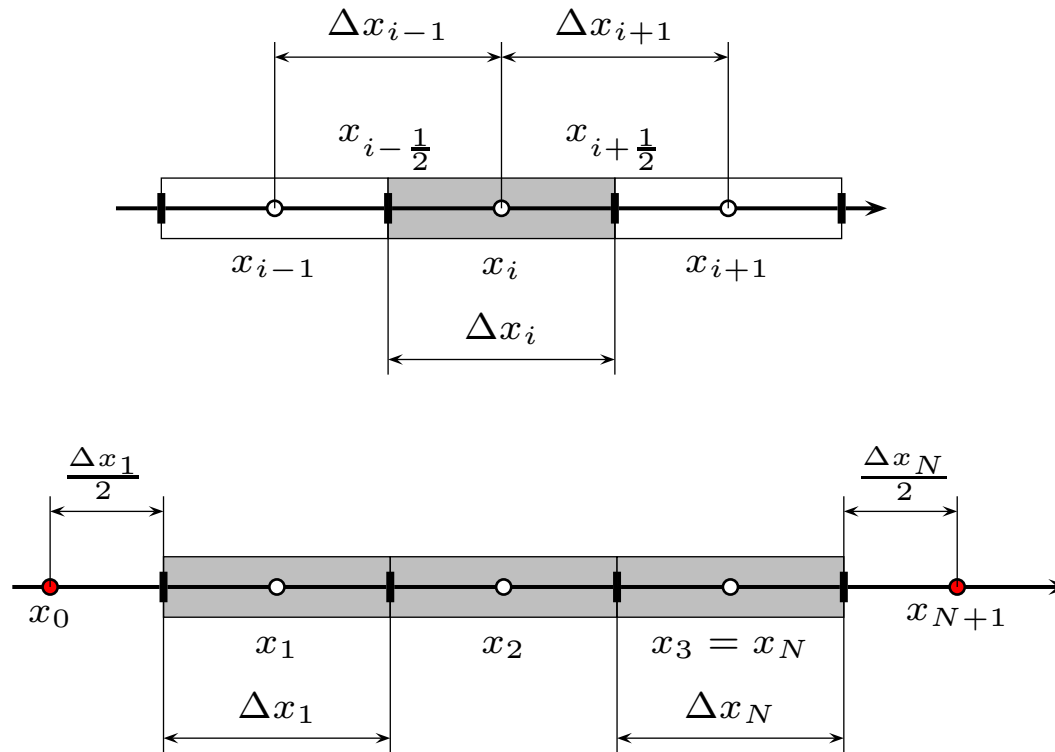
[Metoda Monte Carlo](#)

[Hydrodynamika wygładzonych cząstek](#)

[Podstawy modelowania turbulencji](#)

[Literatura](#)

Przypadek jednowymiarowy



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Jednowymiarowa dyfuzja

Jednowymiarowa i stacjonarna dyfuzja ϕ opisana jest uproszczonym ogólnym równaniem transportu (równaniem konwekcji-dyfuzji)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (152)$$

Jeżeli współczynnik dyfuzji Γ jest stały, to powyższe równanie upraszcza się do

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi = 0 \quad (153)$$

lub dokładniej do

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S_\phi = 0 \quad (154)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Postać całkowa jednowymiarowego równania dyfuzji

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} S_\phi dx = 0 \quad (155)$$

Nie ma potrzeby wykorzystywanie twierdzenia Gaussa, gdyż pierwszą całkę można całkować bezpośrednio

$$\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \bar{S}_{\phi i} \Delta x_i = 0 \quad (156)$$

gdzie $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jednowymiarowa dyfuzja - warunek Dirichleta

Wartość średnia S_ϕ w środku objętości skończonej może być aproksymowana metodą trapezów za pomocą znanych wartości S_ϕ na brzegu objętości

$$\bar{S}_{\phi i} = \frac{S_{\phi i - \frac{1}{2}} + S_{\phi i + \frac{1}{2}}}{2} \quad (157)$$

Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne

$$y''(x) + 20x = 0 \quad (158)$$

z warunkami brzegowymi Dirichleta $y(0) = y(1) = 0$.
Rozwiązanie szczególne ma postać

$$y(x) = -\frac{10}{3}(x^3 - x) \quad (159)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jednowymiarowa dyfuzja - warunek Dirichleta

Czyli wsp. dyfuzji $\Gamma = 1$ i wyraz źródłowy $S_\phi = 20x$.
Wersja dyskretna jednowymiarowego równania dyfuzji
ma postać

$$\frac{d\phi_{i+\frac{1}{2}}}{dx} - \frac{d\phi_{i-\frac{1}{2}}}{dx} + \bar{S}_{fi} \Delta x_i = 0 \quad (160)$$

Pochodne (strumienie) na brzegach aproksymowane
są za pomocą schematu drugiego rzędu (centralnego)

$$\frac{d\phi_{i+\frac{1}{2}}}{dx} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (161a)$$

$$\frac{d\phi_{i-\frac{1}{2}}}{dx} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (161b)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Jednowymiarowa dyfuzja - warunek Dirichleta

Równanie dyskretne ma następującą postać

$$\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \bar{S}_{\phi i} \Delta x_i = 0 \quad (162)$$

Można z niego wyznaczyć ϕ_i w funkcji wartości sąsiednich

$$\phi_i = \frac{\Delta x_{i+1} \phi_{i-1} + \Delta x_{i-1} \phi_{i+1} + \bar{S}_{\phi i} \Delta x_{i-1} \Delta x_{i+1} \Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i+1}}$$

gdzie $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ i $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$.

Dla $\Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = \Delta x_i = h$ (siatka jednorodna) otrzymujemy

$$\phi_i = \frac{\phi_{i-1} + \phi_{i+1} + \bar{S}_{\phi i} h^2}{2} \quad (163)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Data: Read volumes data and BCs

Create nodes and ghost nodes;

$n \leftarrow 1$;

repeat

$R \leftarrow 0$;

for $i \leftarrow 2$ **to** $i_{max} - 1$ **do**

$$\phi_i^{n+1} \leftarrow \frac{\Delta x_{i+1} \phi_{i-1}^n + \Delta x_{i-1} \phi_{i+1}^n + \bar{S}_{\phi i} \Delta x_{i-1} \Delta x_{i+1} \Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i+1}};$$

$$R \leftarrow \max \left(|\phi_i^{n+1} - \phi_i^n|, R \right);$$

 Update ghost nodes;

$n \leftarrow n + 1$;

until $n \leq n_{max}$ **and** $R > R_{min}$;

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

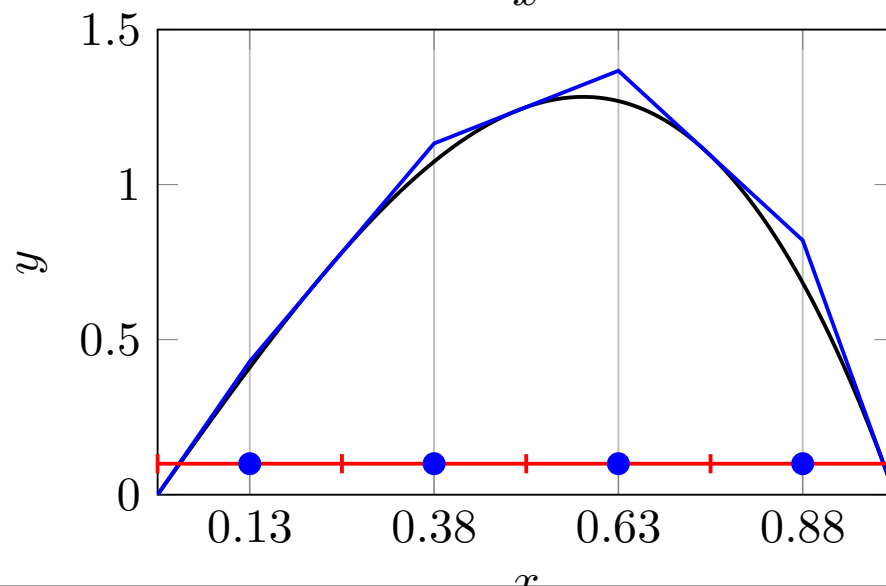
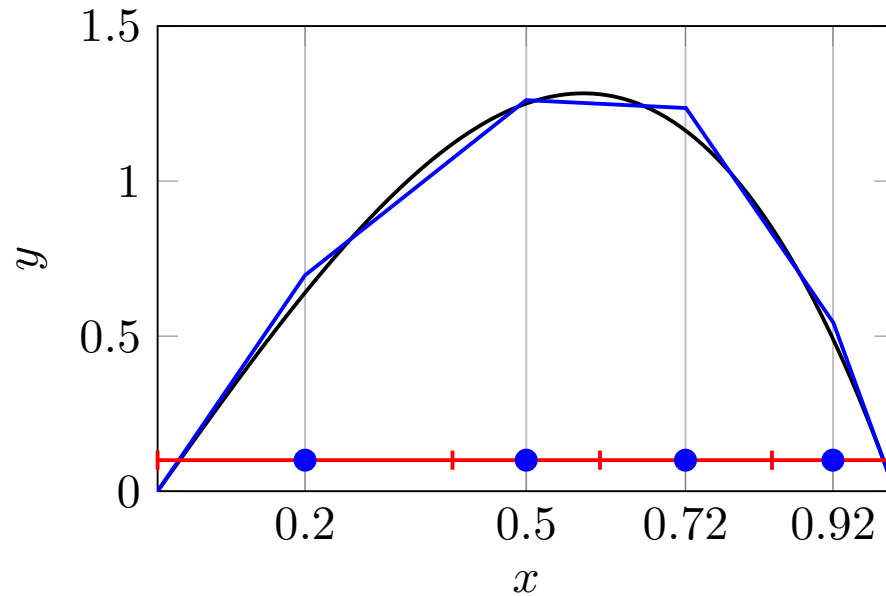
Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura



Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jednowymiarowa dyfuzja - warunek Neumanna

Rozważmy to samo równanie różniczkowe zwyczajne

$$y''(x) + 20x = 0 \quad (164)$$

z warunkiem Dirichleta $y(0) = 0$ i Neumanna $y'(1) = 0$. Rozwiązanie szczególne ma postać

$$y(x) = -10x \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right) \quad (165)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

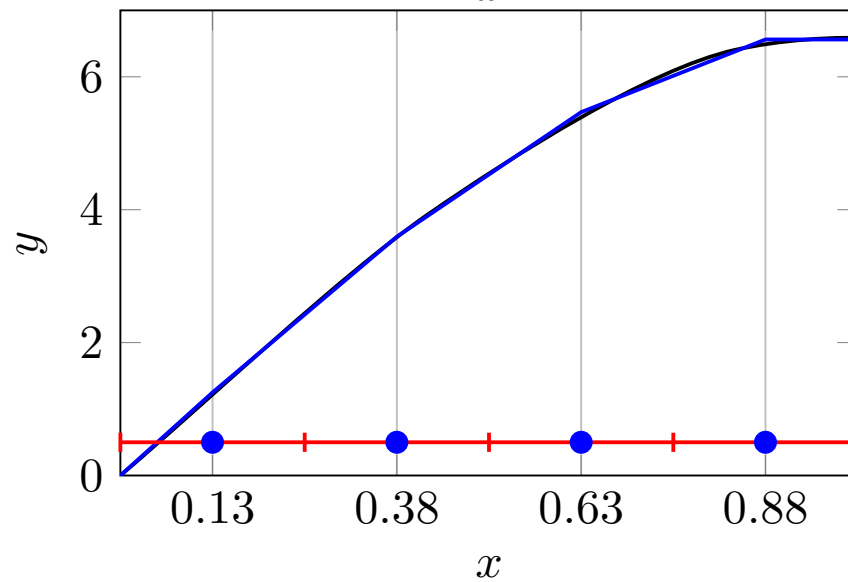
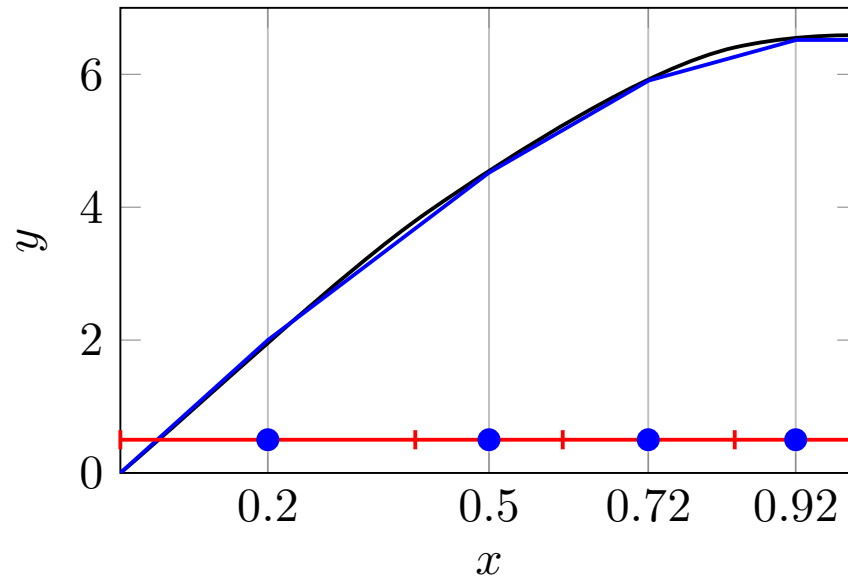
Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Metoda Monte Carlo

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

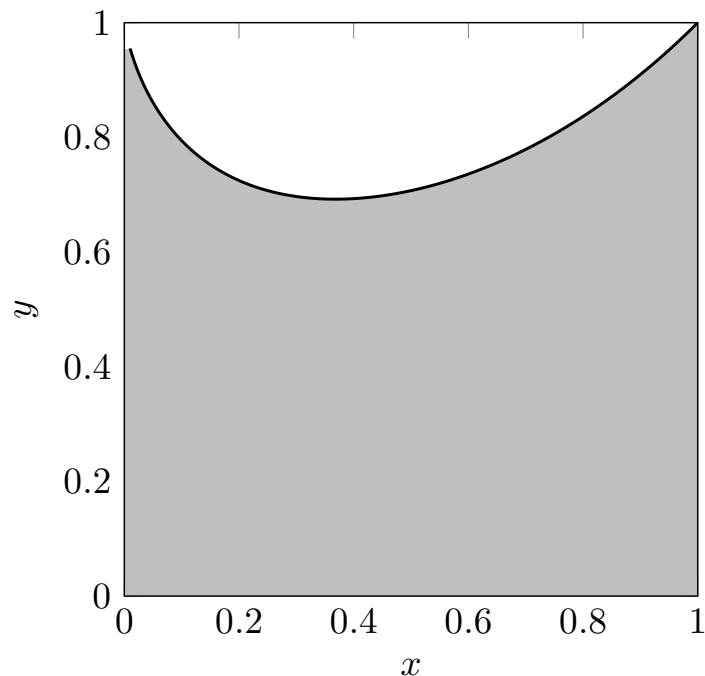
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

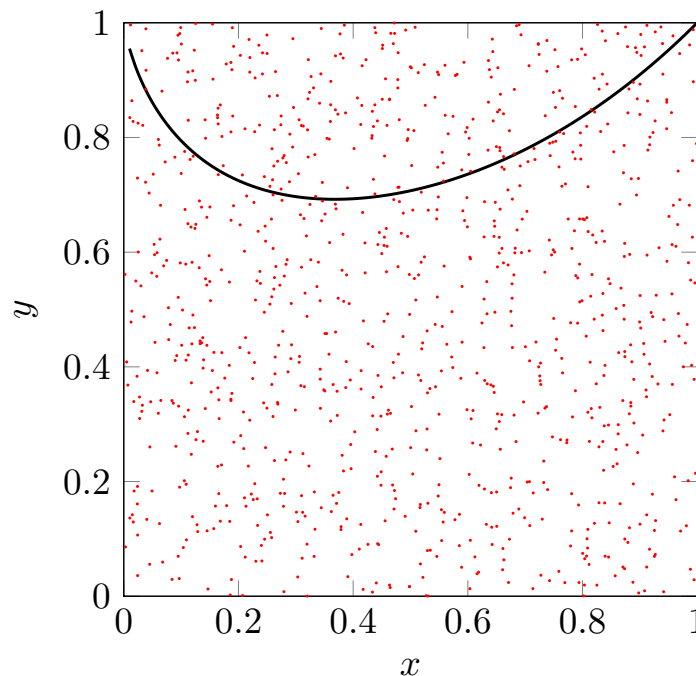
Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Całkowanie metodą Monte Carlo



$$f(x) = x^x$$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Całkowanie metodą Monte Carlo

Najprostsze całkowanie metodą Monte Carlo wykorzystuje zliczanie punktów generowanych na podstawie ciągłego rozkładu jednostajnego $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(\mathcal{U}, \mathcal{U}) \quad (166)$$

gdzie

$$F(x, y) = \begin{cases} 1; & \text{jeżeli } f(x) \geq y \\ 0; & \text{poza tym} \end{cases} \quad (167)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

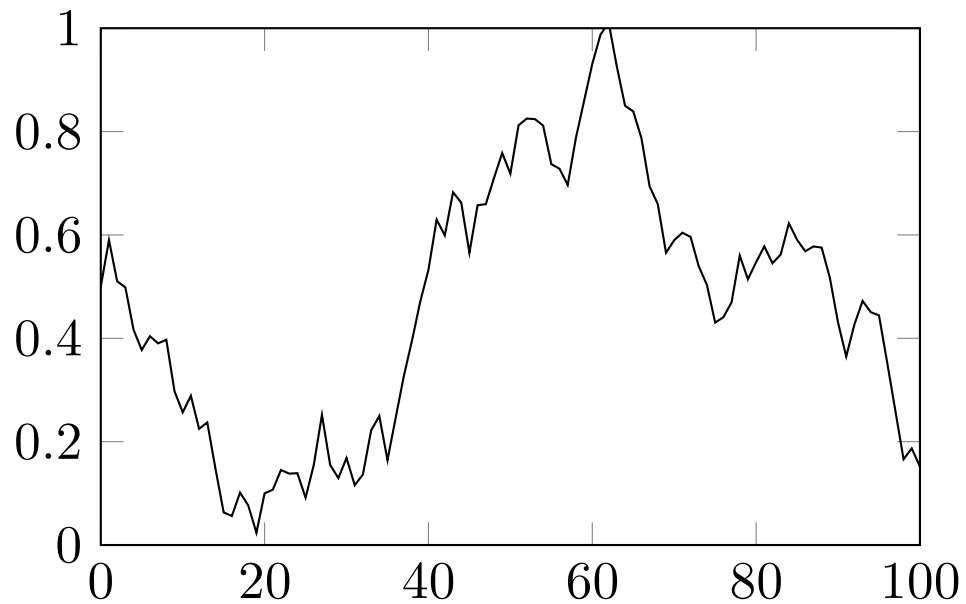
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jednowymiarowe błędzenie losowe



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Równanie Poissona z warunkiem brzegowym Dirichleta

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}); \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (168a)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}); \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (168b)$$

Rozwiązanie tego równania można przedstawić jako wartość oczekiwaną błędzenia losowego

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \left[g(W_\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\tau f(W_t) dt \right] \quad (169)$$

gdzie τ jest czasem końcowym błędzenia losowego

$$\tau = \inf \{t : W_t \in \partial\Omega\} \quad (170)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jeżeli warunek Dirichleta $g(\mathbf{x}) = 0$, to

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau f(W_t) dt \right] \quad (171)$$

Można również estymować

$$\int_0^\tau f(W_t) dt \approx \sum_{i=1}^m f_i(W_\tau) \Delta t = \sum_{i=1}^m f_i(W_\tau) \frac{h}{V(h)} \quad (172)$$

Rozważmy równania $y''(x) = -20x$ z warunkiem Dirichleta $y(0) = y(1) = 0$ (tj. $\phi = y$, $f(x) = 20x$, $g(x) = 0$).

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Data: Read input variables

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $i_{max}$  do  
  if not boundary( $x_i$ ) then  
     $S \leftarrow 0$ ;  
    for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do  
       $I \leftarrow 0$ ;  
       $\alpha \leftarrow i$ ;  
      while not boundary( $x_\alpha$ ) do  
         $\alpha \leftarrow \alpha + 2[\mathcal{U}(0, 1) + \frac{1}{2}] - 1$ ;  
         $I \leftarrow I + 20f(x_\alpha)$ ;  
       $S \leftarrow S + I$ ;  
     $y_i \leftarrow \frac{h^2}{2} \frac{S}{n}$ ;
```

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

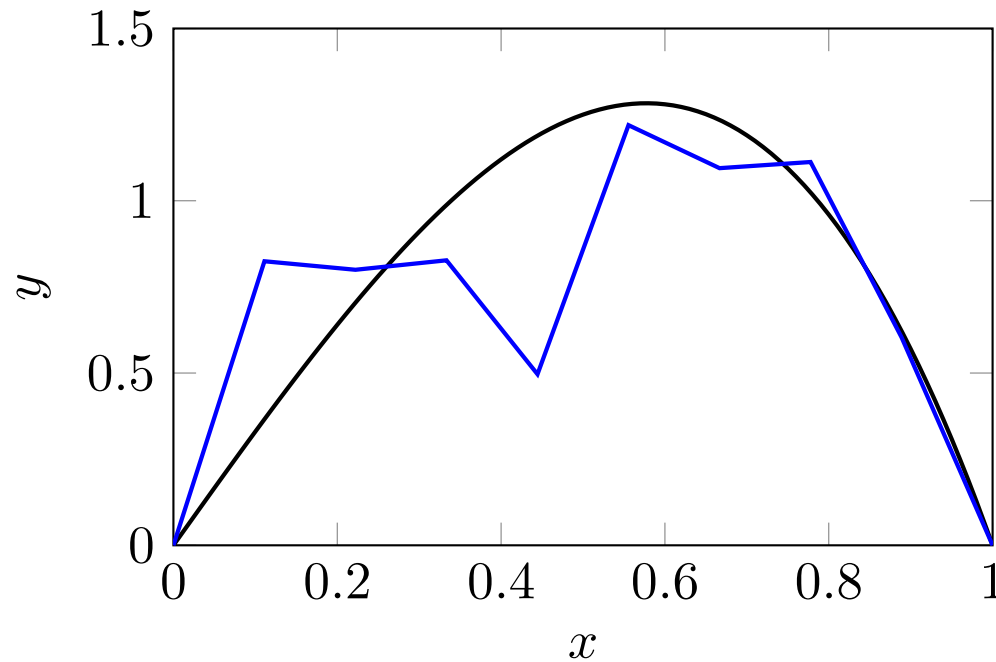
Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Wyniki – równanie Poissona

$n = 10$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

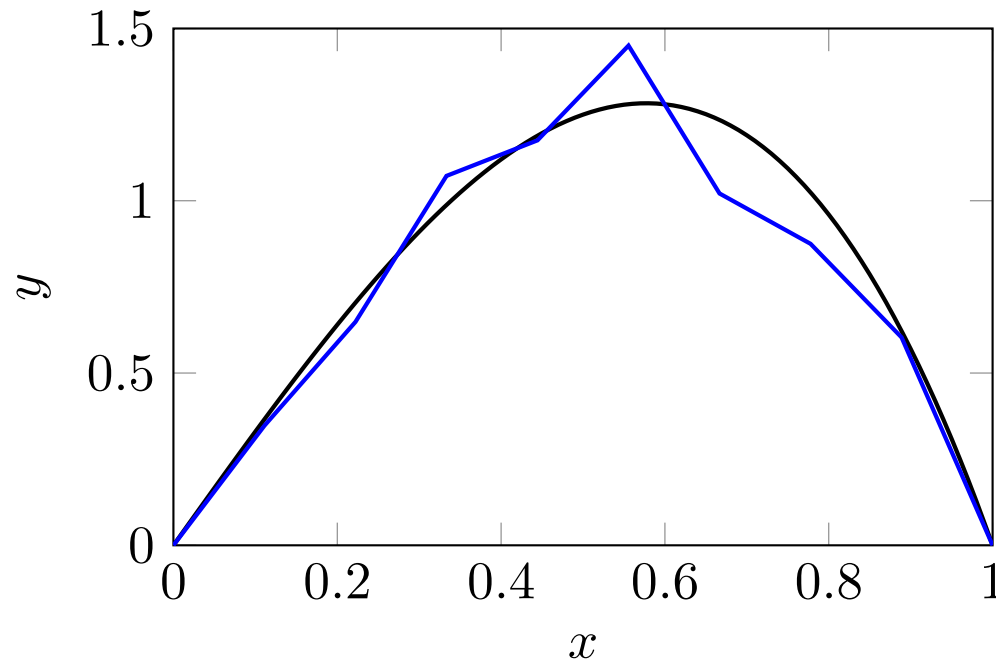
Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Wyniki – równanie Poissona

$n = 100$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

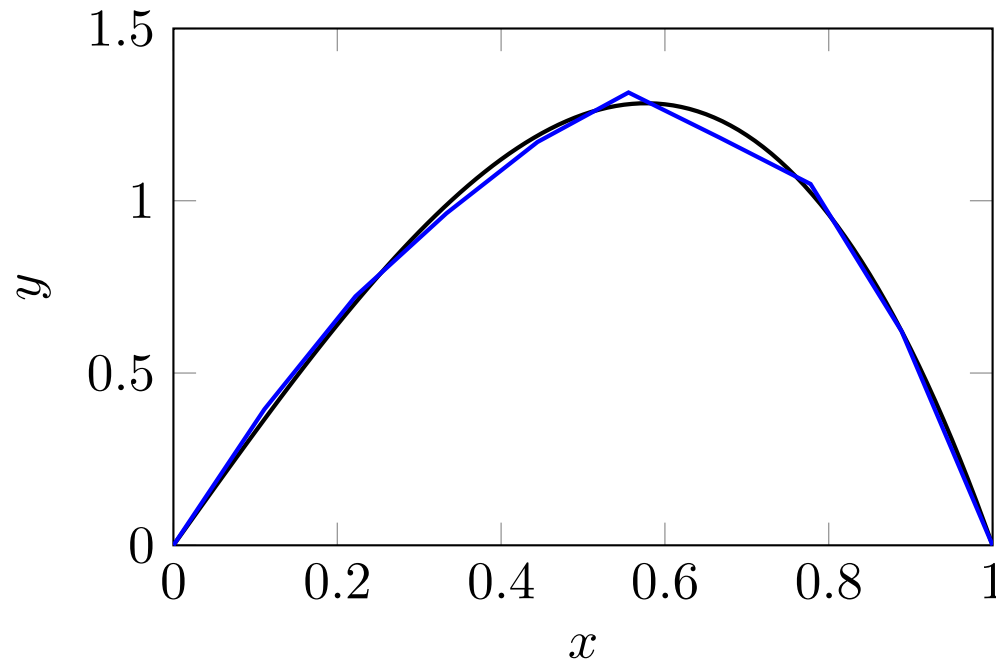
Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Wyniki – równanie Poissona

$n = 1000$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

**Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek**

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Hydrodynamika wygładzonych cząstek (SPH):

- metoda wykorzystuje podejście Lagrange'a do opisu ruchu płynu
- cząstkom, które poruszają się z płynem, przypisane są takie parametry jak masa czy prędkość
- wielkości opisujące stan płynu, w którym znajduje się cząstka, obliczane są za pomocą średnich wielkości liczonych z sąsiednich cząstek (wygładzanie jako średnia z sąsiadów)
- metodę SPH klasyfikuje się jako metodę bezsiatkową
- wykorzystuje się całkową reprezentację funkcji

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

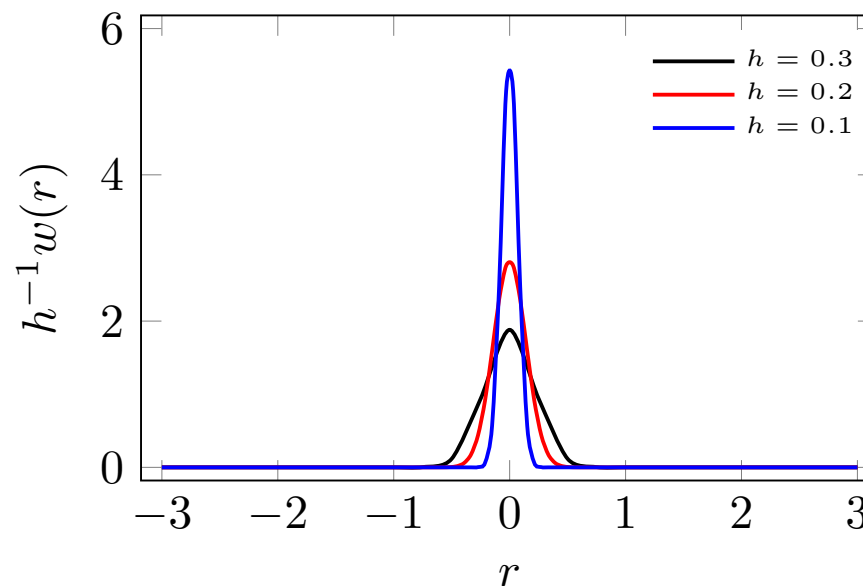
Literatura

Całkowa reprezentacja funkcji

Podstawą metody SPH jest całkowa reprezentacja funkcji f , gdzie δ jest deltą Diraca

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' \quad (173)$$

$$w(r) := \sigma e^{-r^2}$$



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Zamiast delty Diraca

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' \quad (174)$$

stosuje się tzw. jądro aproksymacji W , które nazywane jest również jądrem wygładzania

$$f(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) dV' \quad (175)$$

gdzie h nazywane jest długością wygładzania.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jądro aproksymacji – własności

■ Warunek normalizacji

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) dV' = 1 \quad (176)$$

■ Dążenie do delty Diraca

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (177)$$

■ Warunek symetrii

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) \quad (178)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Jądro aproksymacji – własności

■ Warunek kompaktowości

$$\forall_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|>kh} W(\mathbf{x}-\mathbf{x}', h) = 0 \quad (179)$$

■ Warunek dodatniości

$$W(\mathbf{x}-\mathbf{x}', h) \geq 0 \quad (180)$$

- Warunek zanikania wpływu jądra aproksymacji W wraz ze wzrostem h
- Warunek gładkości (ciągłość i różniczkowalność W)

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Istnieje wiele postaci W . Dla uproszczenia zapisu przyjmuje się jego następujące podstawienia

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = W\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{h}\right) = W(r) = \frac{w(r)}{h^D} \quad (181)$$

gdzie przez r oznacza się względną odległość (odniesioną do długości wygładzania h). Z tego względu jądro W dekomponuje się na jądro w odniesione do h^D . W ten sposób w ma te same własności co W , ale jest bezwymiarowe i prostsze w zapisie.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jądro aproksymacji Gaussa

Jądro aproksymacji Gaussa, które dane jest wzorem

$$w(r) = \sigma e^{-r^2}, \quad r \in [0; \infty[\quad (182)$$

Wartość współczynnika normalizacji σ , w zależności od wymiaru przestrzeni D , wynosi

$$\sigma = \pi^{-D/2} \quad (183)$$

Jądro Gaussa spełnia warunek unormowania, symetrii i dodatniości i warunek zanikania wpływu jądra aproksymacji wraz ze wzrostem h . Jądro Gaussa jest również gładkie (ciągłe wraz z pochodnymi). Warunek kompaktowości nie jest spełniony. Dąży do delty Diraca wraz z $h \rightarrow 0$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

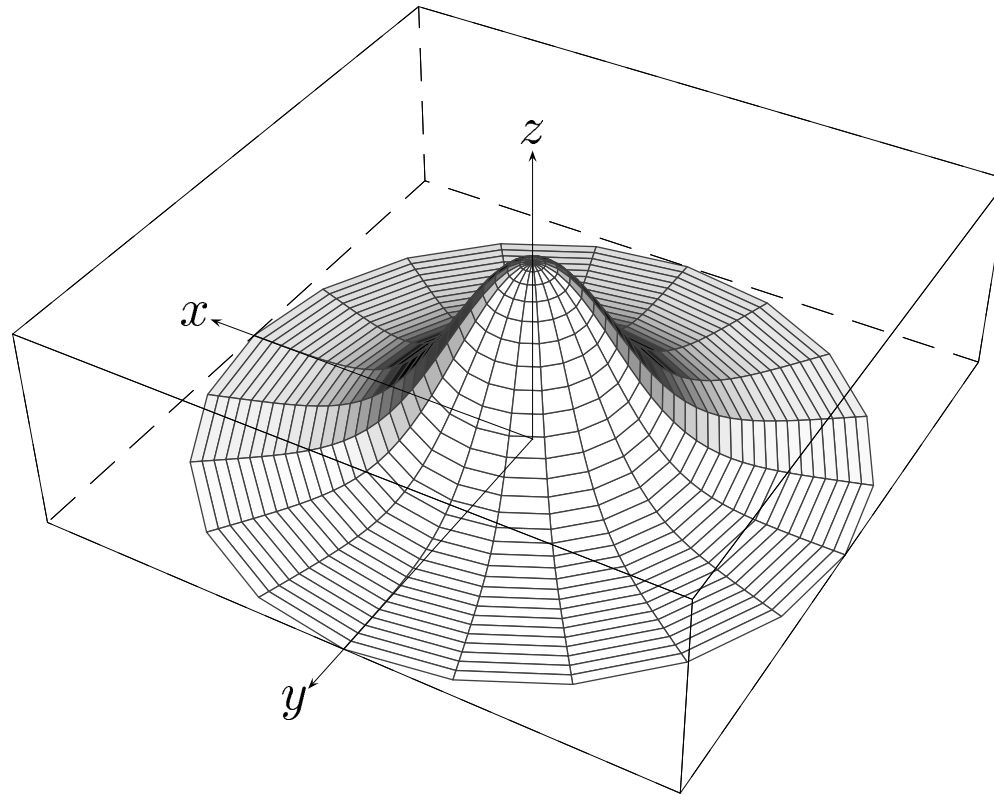
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Jądro aproksymacji Gaussa



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Aproksymacja funkcji bierze się z całkowej reprezentacji funkcji

$$f(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) dV' \quad (184)$$

przy dyskretyzacji całki za pomocą skończonej sumy

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_j f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \Delta|V_j| \quad (185)$$

Elementarna objętość $\Delta|V_j| = \frac{m_j}{\rho_j}$, więc

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (186)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Funkcje $f(\mathbf{x}_j)$ związana jest z cząstkami j wewnątrz jądra aproksymacji W . Aproksymacja

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (187)$$

jest więc aproksymacją dyskretną ciągłej funkcji f w dowolnym punkcie $\mathbf{x}$, który należy do obszaru Ω . Jeżeli wartość funkcji f wyliczana ma być w punkcie $\mathbf{x}_i$, to

$$f(\mathbf{x}_i) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W_{ij} \quad (188)$$

gdzie zapis W_{ij} oznacza $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

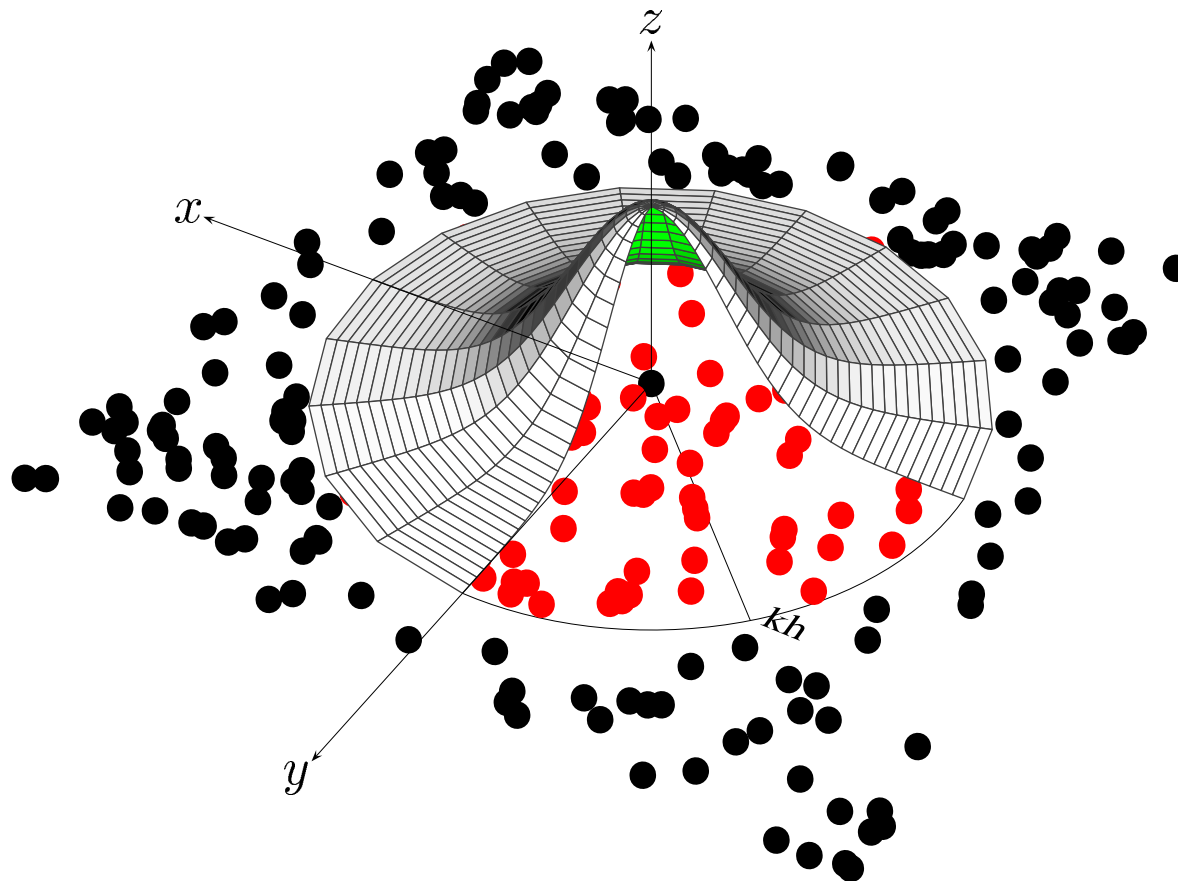
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Aproksymacja funkcji



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Gradient funkcji f względem współrzędnych $\mathbf{x}$ otrzymuje się z całkowej reprezentacji funkcji

$$\nabla f(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) dV' \quad (189)$$

Dyskretyzując całkę, mamy gradient w punkcie $\mathbf{x}_i$

$$\nabla f(\mathbf{x}_i) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \nabla_i W_{ij} \quad (190)$$

Różniczkowanie przestrzenne przeprowadzane jest na znanej postaci jądra aproksymacji W .

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Aproksymacja dywergencji

Aproksymacja dywergencji wielkości wektorowej $\mathbf{f}$ przebiega w podobny sposób do aproksymacji gradientu. Ponieważ operator dywergencji wyliczany jest względem współrzędnych $\mathbf{x}$

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) dV' \quad (191)$$

Najprostszą aproksymację dywergencji otrzymuje się, dyskretyzując powyższą całkę

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (192)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Aproksymacja laplasjanu skalara może być przedstawiono analogicznym wzorem, jak w przypadku gradientu

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) dV' \quad (193)$$

Najprostszą aproksymację laplasjanu otrzymuje się, dyskretyzując powyższą całkę

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_i) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \nabla_i^2 W_{ij} \quad (194)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Aproksymacja równania zachowania masy

Równanie zachowania masy

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (195)$$

aproksymuje się wykorzystując aproksymację dywergencji prędkości

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{u}_j \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (196)$$

W większości przypadków wykorzystuje się aproksymację funkcji, przyjmując $f = \rho$. Zatem

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij} \quad (197)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Aproksymacja równania zachowania pędu

Równanie zachowania pędu w najogólniejszej postaci, z uwzględnieniem sił masowych od grawitacji $\mathbf{g}$, zapisuje się jako

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (198)$$

Aproksymację tego równania w metodzie SPH można przedstawić, wykorzystując aproksymację dywergencji

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g}_i + \frac{1}{\rho_i} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (199)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Równanie ruchu (Naviera–Stokesa)

Przy aproksymacji równania Naviera–Stokesa w metodzie SPH wyodrębnienia się poszczególne rodzaje sił: siły od gradientu ciśnienia $\mathbf{f}_{pi}$ i siły związane z lepkością $\mathbf{f}_{\mu i}$. Równanie ruchu ma wtedy następującą postać

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \mathbf{g}_i + \mathbf{f}_{pi} + \mathbf{f}_{\mu i} \quad (200)$$

Przyjmując następujący zapis na poszczególne rodzaje sił wraz z przyspieszeniem ziemskim $\mathbf{g}$ w postaci $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i + \mathbf{f}_{pi} + \mathbf{f}_{\mu i}$, można równanie ruchu przedstawić w postaci, która występuje w innych metodach lagranżowskich

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \mathbf{f}_i \quad (201)$$

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

Wyznaczenia ciśnienia w metodzie SPH polega na wykorzystaniu sztucznego równania stanu, w którym ciśnienie powiązane jest w sposób jawny z gęstością. Jedna z możliwych postaci takiego równania może mieć postać

$$p = p_0 + B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (202)$$

W takim przypadku mówi się o płynie słabo ściśliwym. Wykładnik γ przyjmowany jest zwykle jako $\gamma \approx 7$, a przez ρ_0 oznaczono tu gęstość odniesienia płynu. Często ze względu na prostotę przyjmuje się $p_0 = 0$.

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

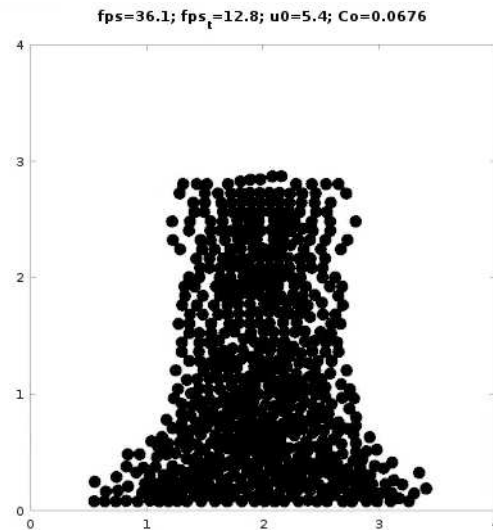
Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura

SPH – przykłady



Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Podstawy modelowania turbulencji

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

Literatura

Spis zagadnień

Opis płynu na
różnych poziomach
skal

Metoda różnic
skończonych

Metoda elementów
skończonych

Metoda objętości
skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika
wygładzonych
cząstek

Podstawy
modelowania
turbulencji

Literatura

- [1] Ferziger J.H., Perić M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002
- [2] Groot R. D., Warren P. B., *Dissipative particle dynamics: Bridging the gap between atomistic and mesoscopic simulation*, The Journal of Chemical Physics, 107, pp 4423–4435, 1997
- [3] Monaghan J. J., *Smoothed Particle Hydrodynamics*, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 30, pp 543–574, 1992
- [4] Pope S. B., *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [5] Tesch K., *Mechanika Płynów*, Wyd. PG, 2008
- [6] Tesch K., *Numeryczna Mechanika Płynów*, Wyd. PG, 2021
- [7] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000

Spis zagadnień

Opis płynu na różnych poziomach skal

Metoda różnic skończonych

Metoda elementów skończonych

Metoda objętości skończonych

Metoda Monte Carlo

Hydrodynamika wygładzonych cząstek

Podstawy modelowania turbulencji

Literatura