

# Kryteria wytrzymałości gruntu na ścinanie w zagadnieniach geotechniki (On shear strength criteria for soils in geotechnics)

dr inż. Marcin Cudny, mgr inż. Krystian Binder

*Katedra Geotechniki, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, Politechnika Gdańska*

## Streszczenie:

Przedstawiono wpływ zastosowania różnych kryteriów wytrzymałości gruntu na ścinanie w symulacjach numerycznych prostych praktycznych zagadnień geotechnicznych. Obliczenia wykonano metodą elementów skończonych w płaskim oraz osiowosymetrycznym stanie odkształcenia. Wyniki obliczeń porównano oraz poddano krytycznej dyskusji.

## Abstract:

The influence of different shear strength criteria for soils is shown for some numerical simulations of simple boundary value problems which are common in geotechnics. Numerical simulations are performed using finite element method for plane strain and axisymmetry conditions. Results are compared and critically reviewed.

Rosnąca popularność programów komputerowych metody elementów skończonych jest związana z możliwością kompleksowej analizy danego zagadnienia inżynierskiego w poszczególnych fazach budowy. Podejście kompleksowe pozwala na połączenie w jednym procesie obliczeniowym analizy odkształceń oraz nośności przy jednoczesnym uwzględnieniu geometrycznej zmienności danego zagadnienia, zmian warunków brzegowych w czasie budowy jak również skomplikowanej interakcji sztywnych elementów konstrukcyjnych z podłożem gruntowym. Opis materiałowy poszczególnych warstw gruntowych można dostosować do rodzaju analizowanego problemu poprzez użycie bardziej lub mniej rozbudowanych modeli konstytutywnych.

Jakość i dokładność każdej analizy obliczeniowej jest jednak ograniczona zakresem informacji wstępnych. Dotyczy to przede wszystkim parametrów rozpoznanych warstw gruntu, choć często także samego przebiegu tych warstw. Mechaniczne parametry gruntowe wyznaczone są głównie na podstawie korelacji empirycznych z parametrami stanu gruntu ( $I_D$ ,  $I_L$ ), które wyznaczone są na podstawie kolejnych korelacji z wyników sondowań statycznych lub dynamicznych. Badania laboratoryjne na próbkach o nienaruszonej strukturze wykonywane są rzadko, natomiast ich jakość może pozostawiać wiele do życzenia. W ten sposób wartości parametrów geotechnicznych, które podaje się projektantom są bardzo zaniżone i zastosowanie ich bezpośrednio do obliczeń może przynieść zaskakujące i nierealistyczne rezultaty. Charakterystycznym przykładem jest oszacowanie zbyt niskiej nośności fundamentów lub bardzo dużych osiadań.

Podstawowy zestaw parametrów wytrzymałościowych jakie udostępniane są inżynierom geotechnikom do analiz obliczeniowych obejmuje efektywny kąt tarcia wewnętrznego  $\phi$  oraz efektywną spójność  $c$ , ewentualnie spójność w warunkach bez drenażu  $c_u$  (oznaczaną także jako  $s_u$ ). Sztywność gruntów opisywana jest liniową sprężystością Hooke'a tak więc podawane są wartości edometrycznych modułów ściśliwości pierwotnej i wtórnej ( $M_0$ ,  $M$ ) oraz współczynnika Poissona  $\nu$  lub modułu sprężystości Younga  $E$ . Należy zauważyć, że sztywność podawana jest jako charakterystyka cieczna i pomimo zastosowania do obliczeń teorii sprężystości przyjmuje się z reguły, że w wartościach oznaczanych parametrów uwzględnia się efekty nieliniowe powstające w gruntach przed mobilizacją pełnej wytrzymałości lub przed osiągnięciem pewnego naprężenia referencyjnego. Tak skonstruowany model konstytutywny nazywany jest w literaturze modelem Coulomba-Mohra

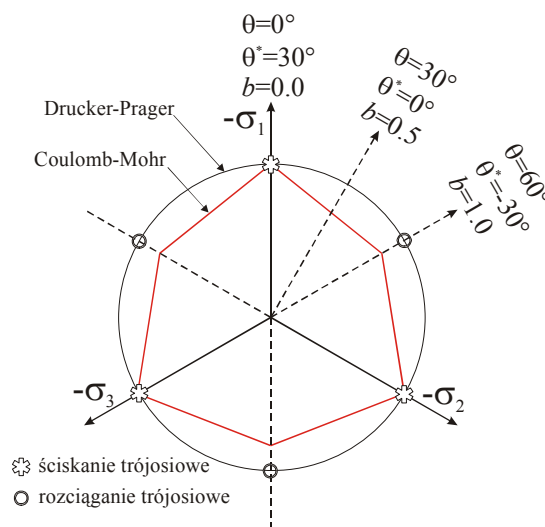
i stanowi podstawowy model implementowany w programach komputerowych do rozwiązywania zagadnień brzegowo-początkowych geotechniki.

Dokładniejsze obliczenia odkształceń podłoża gruntowego wymagają bardziej zaawansowanych modeli zachowania się gruntu w zakresie przed całkowitym uplastycznieniem. W praktyce trudno uzyskać parametry do takich modeli. W większości przypadków modele te kalibruje się na podstawie bardzo przybliżonych korelacji empirycznych, bezpośrednich wyników badań laboratoryjnych lub na podstawie pomiarów polowych z próbnymi obciążeniami. Dane takie mogą być jednak osiągalne przez projektantów jedynie w przypadku realizacji dużych i bardzo odpowiedzialnych inwestycji budowlanych.

Zagadnienia modelowania nieliniowości w zachowaniu się gruntów przed uplastycznieniem, takie jak anizotropia sztywności, barotropia, degradacja sztywności z odkształceniem, czy sztywność w zakresie małych odkształceń, są bardzo złożone i wymagają w zasadzie oddzielnego omówienia. Zakres niniejszego artykułu jest ograniczony do dyskusji związanej z przyjęciem kryterium wytrzymałości na ścinanie gruntów i wpływu takiego przyjęcia na wyniki obliczeń nośności podłoża w różnych zagadnieniach praktycznych.

### Kryteria wytrzymałości gruntów na ścinanie

W literaturze dotyczącej mechaniki gruntów można znaleźć wiele różnych kryteriów wytrzymałości na ścinanie. W niniejszym artykule ograniczono się do kryteriów izotropowych – opisanych za pomocą niezmienników stanu naprężenia. Ograniczono się także do kryteriów o liniowych konturach na dowolnej płaszczyźnie przechodzącej przez oś hydrostatyczną ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) w przestrzeni składowych głównych naprężenia efektywnego ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ). Jedną z takich płaszczyzn jest np. płaszczyzna trójosiowa ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ). W ten sposób parametry wytrzymałościowe analizowanych kryteriów wytrzymałościowych można porównywać z parametrami kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności, które znane są dobrze w praktyce inżynierskiej.



Rys. 1. Kąt Lodego na płaszczyźnie dewiatorowej ( $p = \text{const}$ ) oraz kierunki ściskania i rozciągania trójosiowego

Podstawową różnicą pomiędzy analizowanymi kryteriami będzie zatem zależność wytrzymałości na ścinanie od kąta Lodego  $\theta$ . Zależność tę określa się także często jako wpływ pośredniej składowej głównej naprężenia lub jako wpływ trzeciego niezmiennika naprężenia. Ogólnie wartość kąta Lodego pozwala na określenie czy aktualny stan naprężenia odpowiada bardziej warunkom ściskania trójosiowego ( $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const} > \sigma_1$ ,  $\theta = 0^\circ$ ) czy rozciągania trójosiowego ( $\sigma_1 = \text{const} > \sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\theta = 60^\circ$ ), czy też warunkom pośrednim, jakie

panują podczas np. ściskania w płaskim stanie odkształcenia ( $\theta \approx 30^\circ$ ). W literaturze można znaleźć dwie definicje kąta Lodego, które w celu ścisłości podano poniżej:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}\right), \quad \theta^* = \frac{1}{3} \arcsin\left(-\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}\right) \quad (1)$$

gdzie  $J_2, J_3$  są odpowiednio drugim i trzecim niezmiennikiem dewiatora naprężenia  $s$ :

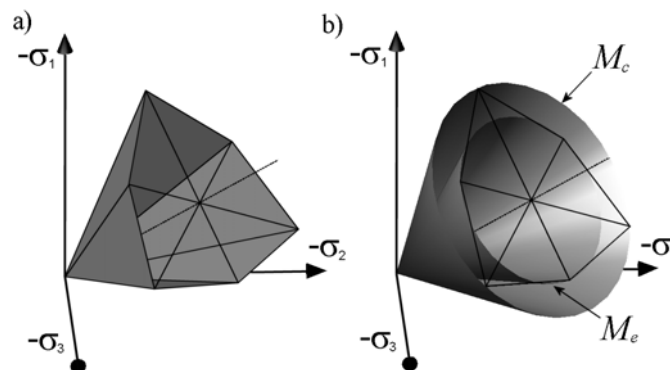
$$J_3 = \det(s_{ij}), \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{kl} s_{kl}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad p = -\frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (2)$$

Pomiędzy wartościami kąta Lodego według przedstawionych definicji zachodzi prosta relacja  $\theta^* = -\theta + 30^\circ$ . Wpływ pośredniej składowej głównej naprężenia określa się w literaturze również tzw. parametrem Bishopa  $b$ , którego definicję oraz związek z kątem Lodego przedstawiono za pomocą zależności:

$$b = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg}(\theta - 30^\circ)\right) \quad (3)$$

### Kryterium Coulomba-Mohra

Podstawowym kryterium wytrzymałości na ścinanie gruntów jest kryterium Coulomba-Mohra. Jest to kryterium będące bazą wyjściową do budowy bardziej zaawansowanych modeli konstytutywnych. Ponadto występuje w wielu rozwiązaniach analitycznych z teorii plastyczności gruntów, co stanowi cenne źródło weryfikacji programów obliczeniowych w zagadnieniach nośności. Kryterium Coulomba-Mohra jest zawsze stosowane jako kryterium porównawcze we wszelkich propozycjach alternatywnych kryteriów wytrzymałości na ścinanie poprzez porównanie konturów na płaszczyźnie dewiatorowej ( $p = \text{const}$ ) oraz trójosiowej ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) w przestrzeni składowych głównych naprężenia efektywnego.



Rys. 2. a) kryterium Coulomba-Mohra w przestrzeni składowych głównych naprężenia; b) porównanie kryterium Coulomba-Mohra i Druckera-Pragera – dwa warianty zgodności odpowiednio przy przyjęciu jednakowej wytrzymałości na ściskanie trójosiowe  $M_c$  oraz wytrzymałości na rozciąganie trójosiowe  $M_e$

Warunek plastyczności wynikający z kryterium Coulomba-Mohra można zapisać najprościej przy użyciu składowych głównych naprężenia jako:

$$F_{MC} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (4)$$

gdzie  $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$  są odpowiednio najmniejszym i największym naprężeniem głównym przy założeniu konwencji, w której naprężenia ściskające przyjmują wartości ujemne. Konwencja ta obowiązuje we wszystkich formułach oraz na rysunkach zamieszczonych w niniejszym artykule.

Tak sformułowany warunek plastyczności opisuje 6 płaszczyzn tworzących charakterystyczny ostrosłup w przestrzeni składowych głównych naprężenia co zilustrowano na rysunku 2a. Na płaszczyźnie dewiatorowej warunek plastyczności kryterium Coulomba-Mohra przedstawia sześciokątny kontur łączący punkty, w których zmobilizowana jest ta sama wartość kąta tarcia wewnętrznego ( $\phi=const$ ). Stosunki długości boków oraz poszczególnych kątów tego sześciokąta zmieniają się w zależności od wartości kąta tarcia wewnętrznego.

Poprawna i niezawodna implementacja modeli konstytutywnych z zastosowaniem kryterium Coulomba-Mohra nie jest zadaniem łatwym z uwagi na ostre krawędzie powierzchni plastyczności w przestrzeni składowych głównych naprężenia, co nie pozwala na jednoznaczne określenie gradientów funkcji plastyczności w tych miejscach. Opis tego zagadnienia można znaleźć w pracy [9].

### **Kryterium Druckera-Pragera**

Problemy implementacyjne występujące przy zastosowaniu kryterium Coulomba-Mohra lub innych kryteriów, w których funkcja plastyczności jest skomplikowaną funkcją naprężenia wyższych rzędów, są niemal całkowicie wyeliminowane w przypadku kryterium wytrzymałości na ścinanie Druckera-Pragera. Prosta implementacja kryterium Druckera-Pragera powoduje zatem częstą dostępność modeli opartych na tym kryterium w komercyjnych programach rozwiązujących zagadnienia brzegowo-początkowe geotechniki. Zastosowanie tego kryterium do obliczeń zagadnień praktycznych powinno jednak odbywać się ze szczególną ostrożnością z uwagi na brak jednoznacznej korelacji pomiędzy kątem tarcia wewnętrznego i parametrami wytrzymałościowymi w kryterium Druckera-Pragera. Warunek plastyczności w przypadku tego kryterium można sformułować następująco:

$$F_{DP} = q - Mp - c_q = 0, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (5)$$

gdzie  $q$  jest niezmiennikiem dewiatora naprężenia  $s$ , parametr  $M$  jest nachyleniem powierzchni plastyczności  $F_{DP}=0$  na płaszczyźnie  $p-q$ , natomiast parametr  $c_q$  jest wartością graniczną niezmiennika  $q$  przy  $p=0$  i jest pośrednio związany ze spójnością gruntu.

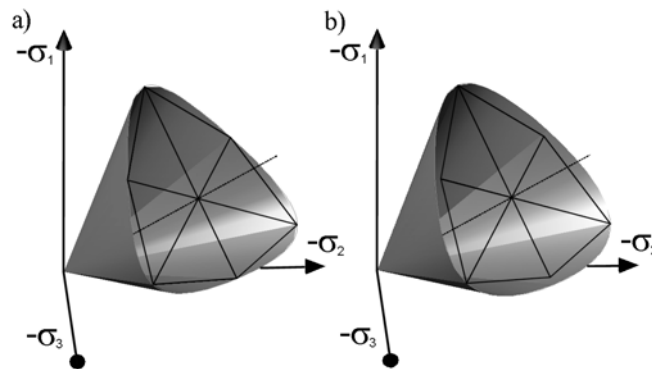
Powierzchnia plastyczności w przestrzeni składowych głównych naprężenia jest powierzchnią stożka, natomiast na płaszczyźnie dewiatorowej warunek plastyczności kryterium Druckera-Pragera przedstawia zawsze okrąg bez względu na wartość parametru  $M$ , który jest pośrednio związany z kątem tarcia wewnętrznego. Kryteria Coulomba-Mohra i Druckera-Pragera można więc przedstawić jako dwa graniczne przypadki w opisie wytrzymałości na ścinanie gruntu, rozumianą jako wartość niezmiennika dewiatora naprężenia  $q=q_f$ . Najlepiej ilustruje to porównanie warunków plastyczności na płaszczyźnie dewiatorowej gdzie w przypadku kryterium Coulomba-Mohra kąt tarcia jest wartością stałą  $\phi=const$  oraz wytrzymałość na ścinanie zmienia się z wartością kąta Lodego  $q_f=f(\theta)\neq const$ , natomiast w przypadku kryterium Druckera-Pragera sytuacja przebiega odwrotnie tj.  $\phi=g(\theta)\neq const$  oraz  $q_f=const$ .

Oszacowanie parametru  $M$  na podstawie standardowego zestawu parametrów wytrzymałościowych ( $\phi, c$ ) jest związane z wyborem położenia punktów wspólnych powierzchni plastyczności  $F_{MC}=0$  i  $F_{DP}=0$ . W przypadku przyjęcia zgodności tych dwóch kryteriów z wytrzymałością na ściskanie trójosiowe lub rozciąganie trójosiowe otrzymujemy odpowiednio

$$M = M_c = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi}, \quad \text{lub} \quad M = M_e = \frac{6 \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad \text{oraz} \quad c_q = M \cdot c \operatorname{ctg} \phi \quad (5)$$

Wzajemne położenie powierzchni  $F_{MC}=0$  i  $F_{DP}=0$  w przestrzeni składowych głównych naprężenia przy zastosowaniu parametru  $M=M_c$  oraz  $M=M_e$  przedstawiono na rysunku 2b. Przyjęcie  $M=M_c$  znacznie zwyższa wytrzymałość na ścinanie we wszystkich innych stanach naprężenia niż ściskanie trójosiowe, natomiast zastosowanie relacji  $M=M_e$  powoduje znaczne zniżenie wytrzymałości w stanach naprężenia odbiegających od rozciągania trójosiowego. Przykładowo przyjęcie wartości parametru  $M_c$  przy kącie tarcia  $\phi=30^\circ$  powoduje, że kąt tarcia odpowiadający wytrzymałości na rozciąganie trójosiowe według kryterium Druckera-Pragera wynosi  $\phi_e \approx 48.6^\circ$ . Przyjmując natomiast  $M_e(\phi=30^\circ)$  otrzymujemy kąt tarcia odpowiadający wytrzymałości na ściskanie trójosiowe  $\phi_e \approx 22.0^\circ$ . Jeszcze większe rozbieżności uzyskuje się w przypadku stanów naprężenia znajdujących się pomiędzy rozciąganiem i ścisaniem trójosiowym, a więc stanów naprężenia występujących np. w zagadnieniach w płaskim stanie odkształcenia. Bezwzględne różnice w wartościach kąta tarcia wewnętrznego wynikających z przyjęcia parametru  $M=M_c$  lub  $M=M_e$  maleją przy niższych wartościach  $\phi$ .

Podsumowując, kryterium wytrzymałości na ścinanie Druckera-Pragera jest niewłaściwe do praktycznych zastosowań ogólnych. Dotyczy to przede wszystkim gruntów o wyższych kątach tarcia wewnętrznego. Wskazują na to nie tylko proste porównania z kryterium Coulomba-Mohra, ale także wyniki badań laboratoryjnych na próbkach różnych rodzajów gruntów.



Rys. 3. Kryterium Matsuoki-Nakaiego (a) oraz Ladego-Duncana (b) w przestrzeni składowych głównych naprężenia – w celach porównawczych naniesiono także kontur kryterium Coulomba-Mohra na wybranej płaszczyźnie dewiatorowej.

### ***Kryterium Matsuoki-Nakaiego***

Wyniki badań laboratoryjnych próbek gruntów w tzw. prawdziwym aparacie trójosiowego ściskania, w którym można operować niezależnie 3 składowymi głównymi naprężeniami (np. [6,8]), jak również wyniki badań w aparacie dwuosowego ściskania [4] pokazują, że wytrzymałość na ścinanie przy wartościach pośrednich kąta Lodego ( $0^\circ < \theta < 60^\circ$ ) jest wyższa niż wynikałoby to z kryterium Coulomba-Mohra z kątem tarcia wewnętrznego wyznaczonego w standardowym badaniu trójosiowego ściskania. Różnica ta jest wciąż daleka od wskazań kryterium Druckera-Pragera przy  $M=M_c$ , wskazuje to jednak na fakt, że zarówno wytrzymałość na ścinanie jak i kąt tarcia wewnętrznego są funkcjami kąta Lodego.

Obserwacje te spowodowały opracowanie różnych kryteriów alternatywnych, w których parametrem wyjściowym jest kąt tarcia wewnętrznego wyznaczony w standardowym badaniu trójosiowego ściskania  $\phi_c$ . Przykładowe porównanie analityczne niektórych z tych kryteriów można znaleźć w pracy [4].

Jednym z najczęściej stosowanych alternatywnych kryteriów wytrzymałości na ścinanie jest kryterium Matsuoki-Nakaiego opracowanym na podstawie teorii tzw. przestrzennej mobilizacji płaszczyzny ścinania (Spatially Mobilized Plane - SMP) [8]. W kryterium tym wartość kąta tarcia wewnętrznego przy ścisaniu  $\phi_c$  i rozciąganiu trójosiowym  $\phi_e$  jest taka sama i w tych stanach naprężenia odpowiada to kryterium

Coulomba-Mohra. W stanach pośrednich wartość kąta tarcia wewnętrznego wzrasta. Oznacza to, że najwyższą wartość kąta tarcia wewnętrznego oraz konsekwentnie najbardziej podwyższoną wytrzymałość na ścinanie w stosunku do kryterium Coulomba-Mohra uzyskuje się w ściskaniu dwuosowym w płaskim stanie odkształcenia ( $\phi_{max}=\phi_{ps}>\phi_c=\phi_e$ ,  $8\phi_{ps}\approx 9\phi_c$ ).

Warunek plastyczności kryterium Matsuoki-Nakaiego jest zdefiniowany następująco:

$$F_{MN} = -\frac{I_1 I_2}{I_3} + \frac{9 - \sin^2 \phi_c}{-1 + \sin^2 \phi_c} = 0 \quad (6)$$

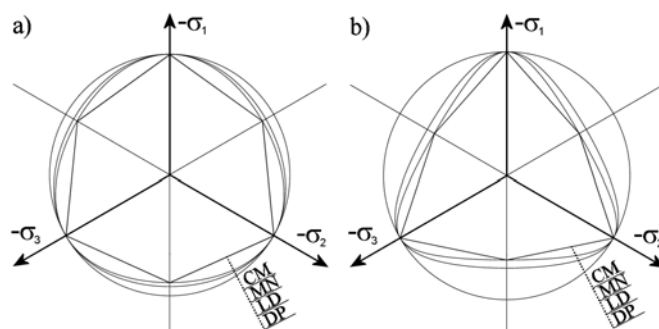
gdzie  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim niezmiennikiem tensora naprężenia  $\sigma$ :

$$I_1 = \sigma_{kk}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - I_1^2), \quad I_3 = \det \sigma_{ij} \quad (7)$$

Powierzchnię plastyczności  $F_{MN}=0$  odpowiadającą kryterium Matsuoki-Nakaiego w przestrzeni składowych głównych naprężenia przedstawiono na rysunku 3a.

### Kryterium Ladego-Duncana

Jednym z pierwszych alternatywnych kryteriów wytrzymałości na ścinanie zaproponowanych dla gruntów jest kryterium Ladego-Duncana [6]. Kryterium to opracowano na podstawie wyników badań laboratoryjnych na próbkach piasku w prawdziwym aparacie trójosiowego ściskania. W przeprowadzonych później programach badań laboratoryjnych kryterium Ladego-Duncana było również stosowane do opisu wytrzymałości na ścinanie gruntów drobnoziarnistych [7]. Kryterium to jest więc związkiem empirycznym, co często decyduje o ostatecznym odrzuceniu tego warunku plastyczności w tworzonych modelach konstytutywnych na rzecz kryterium Matsuoki-Nakaiego, które powstało na bazie rozważań teoretycznych (patrz np. [11]).



Rys. 4. Porównanie analizowanych kryteriów wytrzymałości na ścinanie na płaszczyźnie dewiatorowej – wpływ wartości kąta tarcia wewnętrznego na kształt konturu kryterium: (a)  $\phi_c=10^\circ$ , (b)  $\phi_c=35^\circ$ .

W kryterium Ladego-Duncana zgodność z kryterium Coulomba-Mohra zachodzi jedynie w stanach naprężenia odpowiadających ściskaniu trójosiowemu. W pozostałych stanach naprężenia kąt tarcia wewnętrznego jest wyższy. Podobnie jak w kryterium Matsuoki-Nakaiego najwyższą wartość kąta tarcia wewnętrznego uzyskuje się w ściskaniu dwuosowym w płaskim stanie odkształcenia ( $\phi_{max}=\phi_{ps}>\phi_e>\phi_c$ ). Przykładowo przyjmując jako wyjściowy kąt tarcia wewnętrznego  $\phi_c=30^\circ$  otrzymujemy  $\phi_e=33.6^\circ$  natomiast  $\phi_{ps}$ , który trudno jednoznacznie zdefiniować analitycznie, może osiągnąć wartość ok.  $34^\circ$ . Tendencja ta jest silniejsza przy wyższych wartościach  $\phi_c$ .

Warunek plastyczności kryterium Ladego-Duncana jest zdefiniowany za pomocą dwóch niezmienników tensora naprężenia:

$$F_{LD} = \frac{I_1^3}{I_3} - k = 0, \quad k = \frac{(-3 + \sin \phi_c)^3}{(-1 - \sin \phi_c)(-1 + \sin \phi_c)^2} \quad (8)$$

Powierzchnię plastyczności  $F_{LD}=0$  odpowiadającą kryterium Ladego-Duncana w przestrzeni składowych głównych naprężenia przedstawiono na rysunku 3b.

Zestawienie porównawcze omówionych kryteriów wytrzymałości na ścinanie na płaszczyźnie dewiatorowej przedstawiono na rysunku 4. Kryteria porównano dla dwóch wartości kąta tarcia wewnętrznego  $\phi_c=10^\circ$  oraz  $\phi_c=35^\circ$ . Jak można zauważyć przy niskiej wartości kąta  $\phi_c$  kształt konturów kryteriów Matsuoki-Nakaiego oraz Ladego-Duncana coraz bardziej zbliża się do kształtu okręgu występującego w kryterium Druckera-Pragera. Przy  $\phi_c=0^\circ$  kryteria te pokrywają się i odpowiadają kryterium Hubera-Misesa, natomiast kryterium Coulomba-Mohra odpowiada kryterium Tresci.

### Przyjęta struktura modelu konstytutywnego

Ostatecznie do analiz obliczeniowych praktycznych zagadnień brzegowo-początkowych przyjęto kryteria wytrzymałości na ścinanie Coulomba-Mohra, Matsuoki-Nakaiego oraz Ladego-Duncana. Zastosowano stały i prosty schemat modelu konstytutywnego do wszystkich rozpatrywanych kryteriów. Schemat ten oparto na komercyjnej implementacji modelu Coulomba-Mohra w programie komputerowym *Plaxis* do rozwiązywania zagadnień brzegowo-początkowych geotechniki metodą elementów skończonych [1]. W ten sposób analizowane modele różniły się jedynie funkcją plastyczności oraz potencjałem plastycznym przy zachowaniu tego samego standardowego zestawu parametrów materiałowych.

W przypadku stanów naprężenia, w których rozpatrywana funkcja plastyczności spełnia warunek  $F(\boldsymbol{\sigma}) < 0$ , sztywność gruntu  $\mathbf{D}^t$  odpowiadała liniowej i izotropowej charakterystyce sprężystej Hooke'a:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{et} d\varepsilon_{kl}, \quad D_{ijkl}^{et} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1-2\nu}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \right] \quad (9)$$

W przypadku stanów naprężenia  $F(\boldsymbol{\sigma})=0$ , sztywność odpowiadała charakterystyce sprężysto-plastycznej bez wzmocnienia lub osłabienia. W praktyce obliczeniowej sztywność w tym przypadku wyznacza się na poprzez sprowadzenie (plastyczną relaksację) naprężenia ze stanu niedopuszczalnego ( $F(\boldsymbol{\sigma}) > 0$ ) na daną powierzchnię plastyczności  $F=0$  w procedurze numerycznego całkowania. W modelach przyjętych do obliczeń zastosowano schemat niejawni oraz procedurę Newtona-Raphsona według rozwiązań opisanych w pracy [5]. Korzystając z podobieństwa kryteriów Druckera-Pragera, Matsuoki-Nakaiego oraz Ladego-Duncana przy małych wartościach kąta tarcia przyjęto jako funkcję potencjału plastycznego uproszczoną funkcję Druckera-Pragera:

$$G_{MN} = G_{LD} = G_{DP} = q - M^* p, \quad M^* = \frac{6 \sin \psi_c}{3 - \sin \psi_c} \quad (10)$$

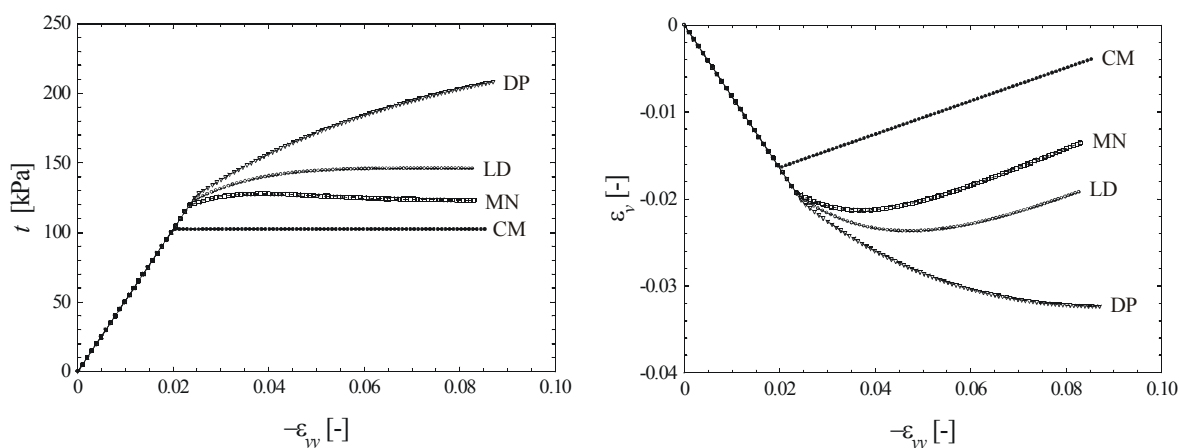
gdzie  $\psi_c$  jest kątem dylatacji wyznaczonym w standardowym badaniu ściskania trójosiowego. Wprowadzenie powyższego uproszczenia do struktury modelu znacznie przyspiesza działanie procedur obliczeniowych jak również pozostaje w zgodzie z powszechnie przyjętą praktyką obliczeniową, według której w przypadku modelu Coulomba-Mohra rzadko przyjmuje się kąt dylatacji o wartości innej niż  $\psi_c=0^\circ$  [10].

Parametr spójności nie występuje bezpośrednio w kryteriach Matsuoki-Nakaiego oraz Ladego-Duncana. Aby uwzględnić ten parametr należy sprawdzić warunek plastyczności  $F=0$  przy zmodyfikowanym stanie naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}^*$ :

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + p_c \delta_{ij}, \quad p_c = c \operatorname{ctg} \phi \quad (11)$$

co jest równoważne przesunięciu powierzchni plastyczności o odcinek równy  $\sqrt{3} p_c$  wzdłuż osi hydrostatycznej w przestrzeni składowych głównych naprężeń.

Implementację modeli opartych na kryteriach Matsuoki-Nakaiego oraz Ladego-Duncana przeprowadzono przy użyciu narzędzia *User-Defined Soil Models* dostępnego w programie *Plaxis* w wersji 8.0. Szczegóły, jak również szereg obliczeń sprawdzających zawarto w opracowaniach [2,3]. Na rysunku 5 przedstawiono wyniki przykładowej symulacji tzw. testu elementowego dwuosowego ściskania w płaskim stanie odkształcenia przy użyciu wszystkich omówionych kryteriów. Zestawienie to dobrze ilustruje różnice wytrzymałości związane z kształtem powierzchni plastyczności.

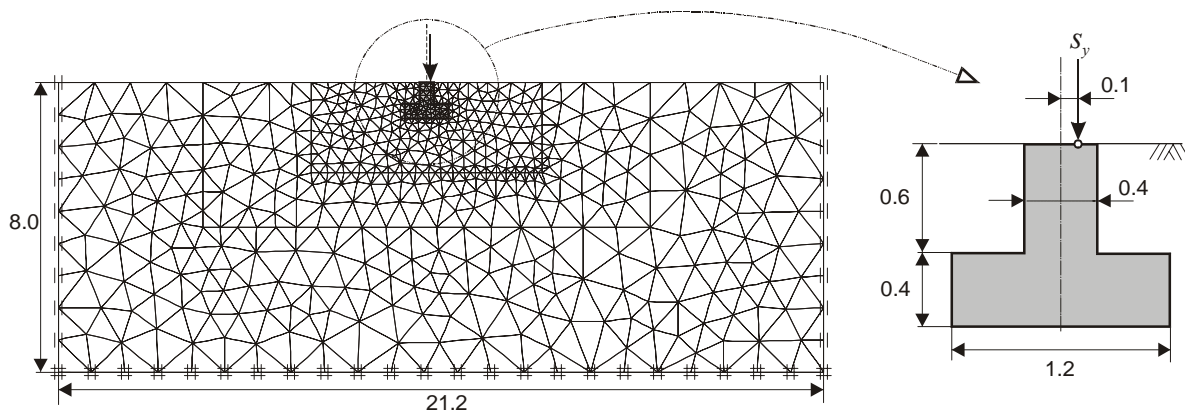


Rys. 5. Porównanie wyników symulacji ściskania dwuosowego z zastosowaniem przyjętych modeli gruntu; parametry materiałowe:  $\phi_c=30^\circ$ ,  $c=0$  kPa,  $\psi_c=5^\circ$ ,  $E=10000$  kPa,  $\nu=0.15$ ; izotropowy stan naprężenia początkowego  $p=100$  kPa; oznaczenia:  $t=(\sigma_1-\sigma_3)/2$ ,  $\varepsilon_v=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ .

## Schematy analizowanych zagadnień brzegowo-początkowych

### Nośność fundamentu bezpośredniego obciążonego mimośrodowo

Podstawowym zagadnieniem nośności w mechanice gruntów jest oszacowanie granicznego oporu pod podstawą fundamentu bezpośredniego. Rozwiązania analityczne dotyczą głównie fundamentów obciążonych osiowo, które przekazują obciążenie na grunt w poziomie terenu. W praktyce zagadnienie to jest jednak bardziej skomplikowane i duży wpływ na nośność fundamentu oprócz charakterystyki mechanicznej podłoża ma jego zagłębienie, geometria jak również mimośród i nachylenie obciążenia zewnętrznego.



Rys. 6. Zagadnienie nośności pasmowego fundamentu bezpośredniego obciążonego mimośrodowo – dyskretyzacja na elementy skończone oraz szczegół geometrii fundamentu.



Schemat przykładowego fundamentu bezpośredniego, poddane analizie wpływu rodzaju kryterium wytrzymałości na ścinanie na obliczeniową nośność, przedstawiono na rysunku 6. Podstawa analizowanego fundamentu pasmowego o szerokości  $B=1.2$  m znajduje się na głębokości 1.0 m p.p.t. Obciążenie w postaci wymuszenia przemieszczeniowego działa w kierunku pionowym z mimośrodem  $e_B=0.1$  m.

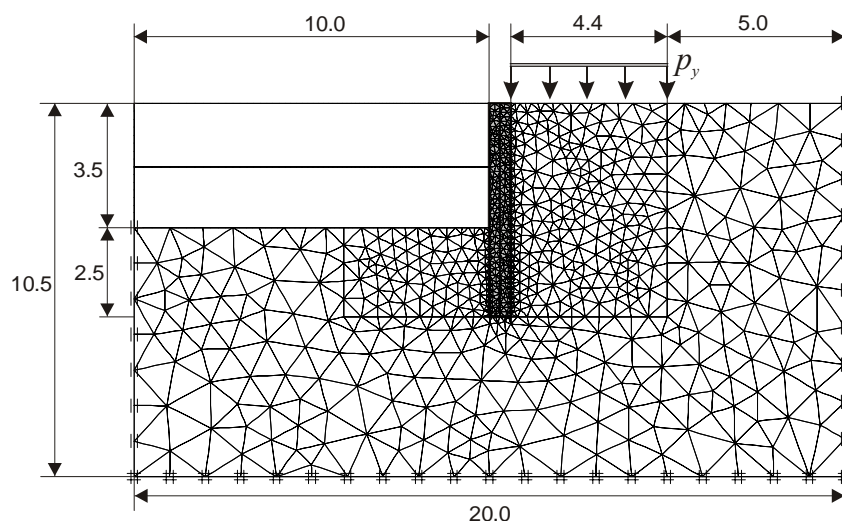
Przyjęto podłoże jednorodne o następujących parametrach geotechnicznych:  $\phi_c=30^\circ$ ,  $c=1$  kPa,  $\psi_c=0^\circ$ ,  $M_0=80000$  kPa,  $\nu=0.2$  ( $E_0=72000$  kPa),  $\gamma=18$  kN/m<sup>3</sup>. Materiał fundamentu przyjęto jako sprężysty:  $E=3\cdot 10^7$  kPa,  $\nu=0.15$ . Dyskretyzację modelu przeprowadzono przy użyciu elementów trójkątnych 15-węzłowych, natomiast pomiędzy brzegiem fundamentu i gruntem wprowadzono elementy kontaktowe 5-węzłowe. W obliczeniach odkształceń zastosowano tzw. uaktualniany układ Lagrange'a, w którym siatka elementów skończonych odkształca się razem z materiałem w kolejnych krokach obliczeniowych. Wyjściowy stan naprężenia przyjęto jako trójosiowy przy współczynniku parcia spoczynkowego jak w gruntach normalnie skonsolidowanych:  $K_0^{NC}=1-\sin\phi$ .

Zwiększanie obciążenia fundamentu kontynuowano do momentu przekroczenia warunków równowagi statycznej w zakresie przyjętego dozwolonego błędu obliczeniowego. Otrzymana nośność nie dotyczy więc osiągnięcia pełnego stanu granicznego lecz obciążenia, przy którym stosunek sił niezbalansowanych do sił zewnętrznych w równaniach równowagi statycznej przekracza pewną ustaloną wartość. W przeprowadzonych obliczeniach wartość ta wynosiła 1 %.

### ***Stateczność obciążonej konstrukcji oporowej***

Kolejnym zagadnieniem brzegowo-początkowym poddany analizie wpływu kryterium wytrzymałości na ścinanie była stateczność wspornikowej ściany oporowej. Obliczenia numeryczne w płaskim stanie odkształcenia polegały na określeniu granicznego obciążenia naziomu  $p_y$ , przy którym dochodzi do przekroczenia warunków równowagi statycznej.

Ściana oporowa symulowana w modelu obliczeniowym może odzwierciedlać zachowanie się ściany szczelinowej lub palisady z kolumn betonowych formowanych w gruncie. Przyjęto uproszczony model z jedną warstwą gruntu o parametrach materiałowych jak w zagadnieniu z fundamentem bezpośrednim. Na styku pomiędzy ścianą i gruntem wprowadzono elementy kontaktowe. Schemat zagadnienia z charakterystycznymi wymiarami oraz jego dyskretyzacją na elementy skończone przedstawiono na rysunku 7. Materiał ściany o grubości 0.6 m przyjęto jako sprężysty z parametrami sztywności  $E=3\cdot 10^7$  kPa,  $\nu=0.15$ .



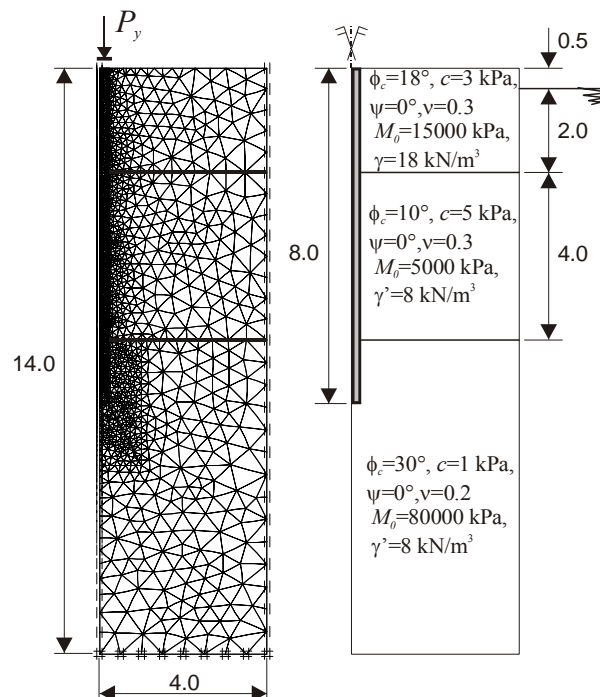
Rys. 7. Zagadnienie stateczności ściany oporowej z obciążeniem naziomu  $p_y$ ; geometria oraz dyskretyzacja na elementy skończone, grubość ściany oporowej 0.6m.

Wprowadzenie wyjściowego stanu naprężenia wymagało w tym zagadnieniu odtworzenia typowych etapów budowy analizowanej konstrukcji. W pierwszym etapie wprowadzono stan geostaticzny w warunkach normalnej konsolidacji. Następnie wprowadzono konstrukcję ściany oporowej poprzez zamianę opisu materiałowego z gruntu na beton w obszarze geometrycznym przewidzianym dla ściany. W kolejnym etapie usunięto elementy z obszaru wykopu odciążając podłoże gruntowe przy jednoczesnej mobilizacji parcia na ścianę oporową. Ostatnim etapem, właściwym w przeprowadzonej analizie stateczności, było wprowadzenie obciążenia naziomu, którego wartość zwiększano w kolejnych krokach obliczeniowych, aż do momentu utraty równowagi statycznej układu.

Proces odciążenia gruntu wywołany wykopem przed ścianą oporową jest również ciekawym zagadnieniem geotechnicznym, w którym bardzo ważnym elementem jest nieliniowa charakterystyka sztywności gruntu. W niniejszym artykule tematyka ta jest jednak pominięta i dyskusja dotyczy jedynie przeciążenia naziomu oraz wpływu przyjętego kryterium wytrzymałości na ścinanie na otrzymaną graniczną wartość  $p_y$ .

### *Nośność pojedynczego pala wierconego*

Ostatnim zagadnieniem, w którym przeanalizowano wpływ rodzaju kryterium wytrzymałości na ścinanie była nośność pojedynczego pala wierconego. Zagadnienie to zdefiniowano w układzie osiowo symetrycznym. W obliczeniach numerycznych zastosowano trójkątne elementy 6-węzłowe. Geometrię i dyskretyzację analizowanego obszaru na elementy skończone oraz wartości parametrów materiałowych przedstawiono na rysunku 8. Podłoże składa się z trzech warstw geotechnicznych o różnych charakterystykach wytrzymałościowych. Na głębokości 0.5 m poniżej terenu znajduje się zwierciadło wody gruntowej. Parametry materiałowe warstw geotechnicznych dobrano tak aby odtworzyć typowy układ obliczeniowy z wierzchnią warstwą gruntów o średniej ściśliwości przykrywającą warstwę słabonośną, która z kolei zalega nad warstwą najmocniejszą stanowiącą oparcie podstawy pala. Pal o długości 8.0 m oraz średnicy 0.4 m jest zagłębiony w warstwie mocnej 1.5 m poniżej jej stropu.



Rys. 8. Schemat obliczeniowy do zagadnienia nośności pojedynczego pala wierconego o średnicy  $D=0.4\text{m}$ ; geometria oraz dyskretyzacja na elementy skończone.

Do opisu zachowania się wierzchnich warstw gruntów przyjęto we wszystkich przeprowadzonych obliczeniach numerycznych model Coulomba-Mohra. Różne kryteria wytrzymałości na ścinanie stosowano jedynie w modelu materiałowym warstwy mocnej.

Styk poboczniczy pała z gruntem zamodelowano przy użyciu elementów kontaktowych. Wytrzymałość kontaktu na ścinanie obniżono o połowę stosując kąta tarcia pomiędzy gruntem i pobocznica  $\delta=0.5\phi_c$ .

Sposób symulacji instalacji pała w gruncie jest ograniczony w klasycznej metodzie elementów skończonych do wymiany modelu materiałowego w pewnym obszarze przy ewentualnej symulacji parcia hydrostatycznego świeżej mieszanki betonowej poprzez wymuszenia przemieszczeniowe. Taki sposób odzwierciedla więc w przybliżeniu technologię wykonywania pali wierconych. Metoda ta została zastosowana w prezentowanych obliczeniach. W przypadku obliczeń zachowania się pali wbijanych bardziej odpowiednie byłoby jednak zastosowanie opisu Eulera lub tzw. metod bezsiatkowych.

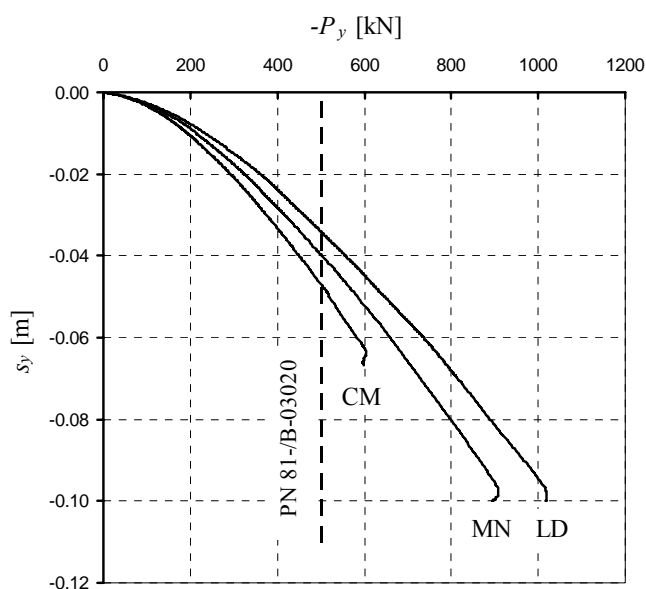
## Wyniki obliczeń

### *Nośność fundamentu bezpośredniego obciążonego mimośrodowo*

Największe różnice pomiędzy granicznymi obciążeniami uzyskanymi z trzech analizowanych modeli gruntu zaobserwowano w obliczeniach fundamentu pasmowego.

Stosując wzór na nośność obliczeniową podłoża według normy PN-81/B-03020 przy przyjętym schemacie obciążenia oszacowano wartość  $Q_{fNB}=500\text{kN}$ . Na podstawie obliczeń z zastosowaniem kryterium Coulomba-Mohra otrzymano wartość o 21% wyższą tj. 605 kN. W przypadku kryteriów Matsuoki-Nakaiego oraz Ladego-Duncana otrzymano odpowiednio 908 kN oraz 1015 kN.

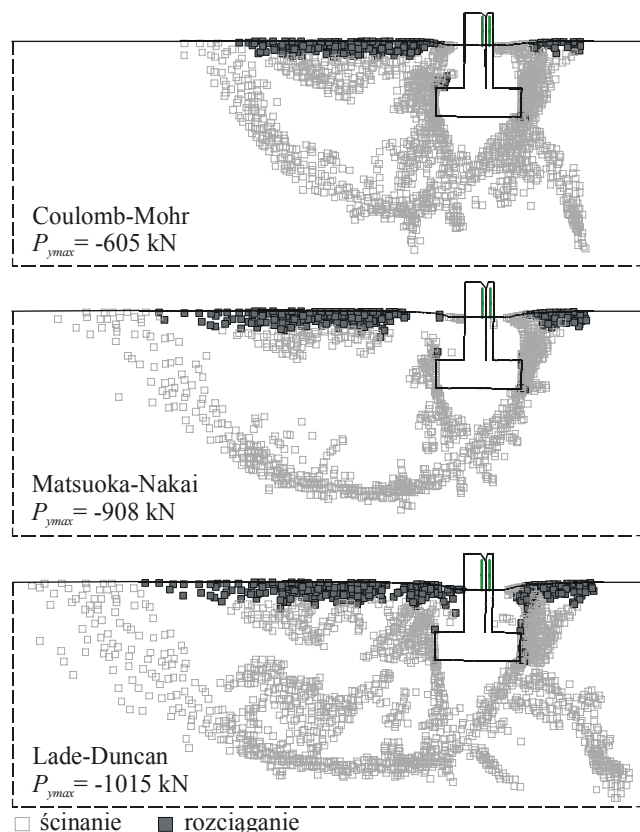
Otrzymane graniczne wartości sił działających na fundament znacznie przewyższają normowe oszacowanie nośności w płaskim stanie odkształcenia. Należy jednak wziąć pod uwagę fakt, że w sytuacji praktycznej o przyjęciu danego rozwiązania konstrukcyjnego zdecydować może nie nośność graniczna lecz stan graniczny użytkowania związany z odkształceniem podłoża. W symulacjach numerycznych z zastosowaniem modeli sprężysto-plastycznych obszary, w których osiągane są stany plastyczne pojawiają się dużo wcześniej przed osiągnięciem siły granicznej, natomiast pełna mobilizacja mechanizmu utraty stateczności całego układu konstrukcyjnego wymaga stosunkowo dużych przemieszczeń.



Rys. 9. Wyniki obliczeń nośności pasmowego fundamentu bezpośredniego z zastosowaniem trzech różnych kryteriów wytrzymałości na ścinanie.

Należałoby więc w analizie zagadnień inżynierskich metodą elementów skończonych brać pod uwagę nie tylko fakt spełnienia warunków równowagi statycznej, ale również stopień uplastycznienia np. poprzez kontrolę globalnej macierzy sztywności.

Dodatkowym elementem utrudniającym wyłapanie wyraźnej siły granicznej jest tzw. wzmocnienie geometryczne pojawiające się na poziomie zagadnienia brzegowego przy zastosowaniu opisu Lagrange'a nawet przy braku wzmocnienia w modelu materiałowym.



Rys. 10. Uplastycznienie podłoża w momencie utraty równowagi statycznej przy zastosowaniu różnych kryteriów wytrzymałości na ściananie; przedstawiono fragment analizowanego obszaru w pobliżu fundamentu.

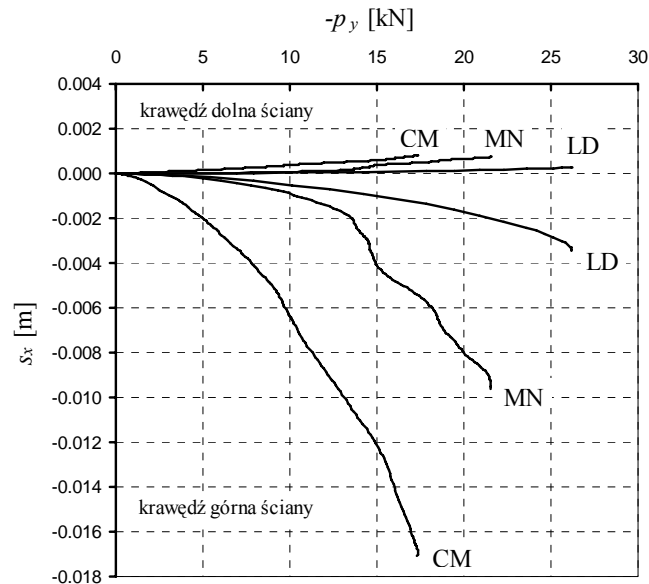
Wyniki obliczeń nośności pasmowego fundamentu bezpośredniego przedstawiono na rysunku 9 w postaci krzywych osiadanie-siła. Dodatkowo na rysunku 10 pokazano różnice w otrzymanym schemacie uplastycznienia w bezpośrednim sąsiedztwie fundamentu przy zastosowaniu różnych kryteriów wytrzymałości na ściananie. Jak można łatwo zauważyć otrzymane różnice nośności odpowiadają zasięgowi stref uplastycznienia i wielkości bryły gruntu ulegającej obrotowi względem niżej zalegającego podłoża.

### ***Stateczność obciążonej konstrukcji oporowej***

Podobne różnice jak w przypadku nośności fundamentu pasmowego otrzymano w obliczeniach stateczności ściany oporowej. Stan naprężenia w gruncie znajdującym się od strony naziomu wskazywał na znaczną mobilizację klina parcia czynnego już po wykonaniu wykopu we wstępnej fazie obliczeń. Wprowadzenie dodatkowego obciążenia doprowadziło stosunkowo szybko do utraty równowagi statycznej całego układu konstrukcyjnego. Największą wartość obciążenia uzyskano w wariancie z kryterium Ladego-Duncana  $p_y = -26.6 \text{ kPa}$ , następnie  $p_y = -21.5 \text{ kPa}$  oraz  $p_y = -17.3 \text{ kPa}$  odpowiednio w przypadku kryteriów Matsuoki-Nakaiego oraz Coulomba-Mohra.

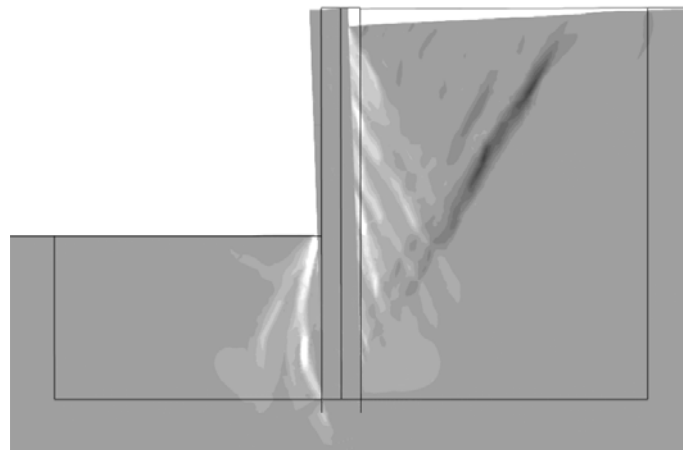
Ciekawy efekt zaobserwowano natomiast w ogólnej sztywności analizowanego układu co zilustrowano na wykresach przemieszczeń poziomych krawędzi ściany oporowej względem obciążenia naziomu przedstawionych na rysunku 11. Jak można zauważyć,

w wyniku przyjęcia modeli z kryterium, w którym kąt tarcia wewnętrzny jest funkcją kąta Lodego uzyskuje się wyższą sztywność oraz mniejsze przemieszczenia. Jest to związane z większą wytrzymałością na ścinanie jaką charakteryzują się te kryteria w stanach naprężenia odpowiadających odporowi tj. oddziaływaniu ściany na grunt w jej dolnej części (wbiciu), gdzie wzrastają przede wszystkim składowe poziome naprężenia. Wyższa wytrzymałość powoduje, że model odpowiada według charakterystyki sprężystej w większym obszarze przestrzeni naprężenia efektywnego.



Rys. 11. Wyniki obliczeń stateczności ściany oporowej z zastosowaniem trzech różnych kryteriów wytrzymałości na ścinanie; w górnej części wykresu przedstawiono przesunięcie poziome dolnej krawędzi ściany, dolna część wykresu dotyczy wychylenia górnej krawędzi ściany.

Schemat mechanizmu utraty stateczności ściany oporowej w przypadku trzech analizowanych kryteriów był bardzo podobny. Mechanizm ten można dobrze zilustrować poprzez rozkład składowych stycznych odkształceń, co przedstawiono na rysunku 12 na przykładzie modelu z kryterium Matsuoki-Nakaiego. Obszary lokalizacji odkształceń ścinających tworzą charakterystyczną siatkę, którą obserwuje się w laboratoryjnych badaniach modelowych. Utrata stateczności dotyczy jedynie lokalnego obszaru w pobliżu ściany oporowej.



Rys. 12. Rozkład składowej stycznej odkształcenia  $\gamma_{12}$  w obszarze przylegającym do ściany oporowej przy zastosowaniu kryterium Matsuoki-Nakaiego; wartości: -5.6% jasny odcień do +1.2% ciemny odcień; przemieszczenia przeskalowano 20x.

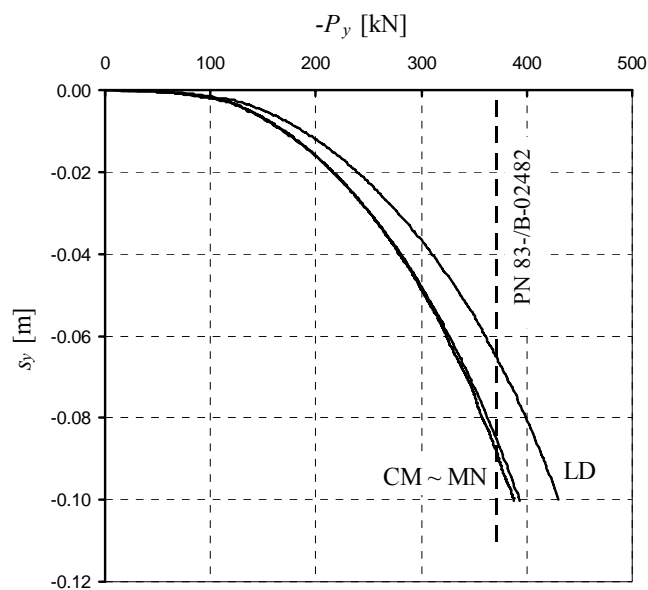
W celach kontrolnych sprawdzono także stateczność globalną analizowanej ściany oporowej tradycyjnymi metodami analizy granicznej. Jak wykazały obliczenia metodami Felleniusa, Bishopa oraz Janbu przy przyjęciu kołowych linii poślizgu minimalny współczynnik stateczności wynosił  $F=1.3$  przy obciążeniu naziomu  $p_y=-30$  kPa. Przyjmując wartość  $F=1.3$  jako dopuszczalną otrzymujemy zatem większe graniczne obciążenie niż w przypadku obliczeń zagadnienia brzegowo-początkowego. Doświadczenie to wskazuje na większe bezpieczeństwo uzyskane przy sprawdzaniu stateczności tego rodzaju konstrukcji w analizie metodą elementów skończonych, gdzie mechanizm utraty stateczności otrzymywany jest w wyniku numerycznego rozwiązania podstawowych równań teorii ośrodka ciągłego a nie założenia pewnej kołowej linii poślizgu. Bardziej właściwą tradycyjną metodą analizy granicznej byłoby założenie kombinowanej, wielosegmentowej linii poślizgu.

### Nośność pojedynczego pala wierconego

Obliczenia nośności pojedynczego pala wierconego są związane z dużymi odkształceniami względnymi pomiędzy palem i gruntem. Odkształcenia te nie stanowiły dużego problemu obliczeniowego na poboczniczy pala, gdzie zastosowano elementy kontaktowe, sprawiają jednak takie trudności w obszarze podstawy pala. Dochodzi tutaj do znacznych koncentracji naprężenia przy jednoczesnej małej swobodzie na przemieszczenia boczne gruntu znajdującego się na dużej głębokości. Uzyskanie wyraźnego punktu utraty równowagi układu konstrukcyjnego jest więc bardzo trudne. Szczególnie, gdy jak miało to miejsce w przeprowadzonej analizie, pod podstawą pala znajduje się warstwa mocna o nieokreślonej wyraźnie miąższości.

W celu uniknięcia porównania kryteriów wytrzymałościowych w zakresie obciążeń, w którym dochodzi do dużych fluktuacji naprężenia pod podstawą pala, analizę porównawczą przeprowadzono w wybranym zakresie osiadania głowicy pala. Jako przemieszczenie graniczne przyjęto  $s_y=10$  cm. Ze względów praktycznych jest to przemieszczenie niedopuszczalne, należy jednak wziąć pod uwagę fakt, że część sprężysta przyjęta w opisie materiałowym jest bardzo uproszczona i nie zakłada wzrostu sztywności z poziomem naprężenia.

Wyniki przeprowadzonych obliczeń przedstawiono na rysunku 13 w postaci krzywych obciążenie-osiadanie. Na wykresie naniesiono dodatkowo poziom nośności analizowanego pala wierconego oszacowany na podstawie normy PN 83/B-02482 ( $N=371$  kN).



Rys. 13. Wyniki obliczeń nośności pojedynczego pala wierconego. Nośności przy zastosowaniu poszczególnych kryteriów wytrzymałości na ścinanie porównano przy jednakowym przemieszczeniu głowicy pala  $s_y=10$ cm.

Otrzymano praktycznie identyczną odpowiedź w przypadku kryteriów Coulomba-Mohra i Matsuoki Nakaiego ( $N \approx 390$  kN). Jest to związane z osiowo-symetrycznym stanem naprężenia występującym w tym zagadnieniu brzegowo-początkowym. Kryteria te wykazują zgodność w wytrzymałości na ścinanie zarówno w warunkach trójosiowego ściskania jak i rozciągania. W wariacie obliczeniowym z użyciem kryterium Lodego-Duncana otrzymano nośność około 10% wyższą ( $N = 430$  kN), co jest związane z wyższą wytrzymałością na ścinanie w tym kryterium w warunkach trójosiowego rozciągania.

## **Wnioski**

Na podstawie wyników przeprowadzonych obliczeń numerycznych porównano wpływ przyjęcia rodzaju kryterium wytrzymałości na ścinanie na oszacowanie nośności w trzech typowych zagadnieniach brzegowo-początkowych rozwiązywanych w geotechnice. Pomimo zastosowania tej samej bazy standardowych parametrów materiałowych uzyskane wyniki wykazują znaczne różnice w granicznych obciążeniach zewnętrznych. Różnice te są bezpośrednio związane z charakterystycznym stanem naprężenia występującym w danym zagadnieniu. Największe różnice uzyskano w przypadku płaskiego stanu naprężenia, gdzie wartości kąta Lodego znacznie odbiegają od warunków naprężenia występujących w standardowych badaniach laboratoryjnych.

Ważną praktycznie obserwacją wynikającą z zastosowania analizy sprężysto-plastycznej jest również fakt mobilizacji pełnej wytrzymałości danego układu konstrukcyjnego przy znacznych odkształceniach ośrodka gruntowego, które mogą być niedopuszczalne ze względów użytkowania. Wskazuje to na konieczność uważnej kontroli przemieszczeń analizowanych konstrukcji uzyskiwanych we wszelkich analizach numerycznych.

## **Literatura**

- [1] Brinkgreve, R. B. J. et al.: Plaxis finite element code for soil and rock analyses, Version 8, Balkema: Lisse, 2002.
- [2] Cudny M.: Implementation of Lode angle dependent yield surfaces via User defined model into Plaxis. 3rd SCMEP Workshop, Helsinki University of Technology, 2002.
- [3] Cudny M., Kengatharam T., Havel F.: Evaluation of Plaxis exercise problems with the simple elasto-plastic model based on Lade-Duncan yield criterion. Technical Report. Plaxis B.V. Delft 2003.
- [4] Eekelen H.A.M.: Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in soil mechanics. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 4, 89-101, 1980.
- [5] Jeremić, B., Sture, S.: Implicit integrations in elastoplastic geotechnics. Mechanics of Cohesive-frictional Materials, vol. 2, 165-183, 1997.
- [6] Lade P.: The stress-strain and strength characteristics of cohesionless soils. Praca doktorska, Uniwersytet Kalifornijski, Berkeley, 1972.
- [7] Lade P. V., Musante H. M.: Three-dimensional behavior of remolded clay. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, vol. 104, GT2, 193-209, 1978.
- [8] Matsuoka H.: Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane. Soils and Foundations, vol. 14, 47-61, 1974.
- [9] Niemunis A.: Über die Anwendung der Kontinuumstheorie auf bodenmechanische Probleme, Eine Vorlesung für Grundbau- und Tunnelbauvertiefer. Uniwersytet w Bochum,

Skrypt dostępny *on line*: [www.gub.ruhr-uni-bochum.de/mitarbeiter/andrzej\\_niemunis.htm](http://www.gub.ruhr-uni-bochum.de/mitarbeiter/andrzej_niemunis.htm), 2003.

[10] Vermeer P.A., de Borst R.: Non associated plasticity for soils, concrete and rock. *Heron*, vol. 29, 1-64, 1984.

[11] Wroth C.B.: The interpretation of in situ soil tests. *Géotechnique*, vol. 34(4), 449-489, 1984.